Volume 3 Number 2 August 2017

EDiMaST

Experiences of Teaching with Mathematics, Sciences and Technology

Expériences pédagogiques avec les mathématiques, des sciences et de la technologie
Experiencias Educativas con Matemáticas, Ciencia y Tecnología
Esperienze Didattiche con Matematica, Scienze e Tecnologia

www.edimast.it

ISSN 2421-7247 (online)

EDiMaST

Experiences of teaching with Mathematics, Sciences and Technology

Esperienze Didattiche con Matematica, Scienze e Tecnologia
Experiencias Educativas con Matemáticas, Ciencia y Tecnología
Expériences pédagogiques avec les mathématiques, des sciences et de la technologie

Volume 3, Number 2, August 2017

ISSN 2421-7247 (online)

The Journal is issued online three times per year (April, August and December).

EDIMAST is an Open Access Online publication. This means that everybody can free access online to abstracts and full-length articles.

Anyone involved in the teaching of mathematics, sciences and technology is welcome to contribute.

EDIMAST is an international scientific journal and welcomes articles in English, Italian, Spanish and French.

Publish on EDIMAST has no costs for the papers' author.

For more information visit
www.edimast.it

To the authors:
paper can be addressed to:
edimast@gmail.com

article

ISSN 2421-7247

From shear transformations to the Pythagorean theorem

Rosa Marincola

Abstract. *This paper describes some teaching experiments carried out in the first two years of High School: the focus is on the concept of equivalence by using shear transformations. The goal was to show some properties of polygons and to prove the Pitagora's theorem by using the geometry of the transformations and through the utilisation of a dynamic Geometry software.*

Key words. *Area, equivalence, shear, problem solving, polygons.*

Sommario. *(Dalle trasformazioni shear al teorema di Pitagora). Questo contributo descrive alcune sperimentazioni didattiche realizzate con studenti del primo biennio di scuola secondaria superiore, focalizzate sul concetto di equivalenza utilizzando le trasformazioni shear (per scorrimento). L'obiettivo è stato quello di mostrare alcune proprietà di poligoni e di dimostrare il teorema di Pitagora con la geometria delle trasformazioni e attraverso l'utilizzo di un software di Geometria dinamica.*

Parole chiave. *Area, equivalenza, scorrimenti, problem solving, poligoni.*

Introduzione

Il 16 maggio 2017, presso l'Università della Calabria in Arcavacata di Rende, è stato organizzato un convegno dal titolo: "Una giornata di didattica della matematica per Margherita" (fig.1) per ricordare la professoressa Margherita D'Aprile, venuta a mancare nella notte tra il 16 e il 17 ottobre 2016. È stata docente di Geometria nel Dipartimento di Matematica dell'UNICAL dal 1972, anno di nascita dell'Ateneo, fino al 2011. Margherita è stata docente stimata da tutti coloro che hanno avuto l'opportunità di conoscerla, ma è stata anche una persona speciale di cui tutti ricordano il rigore, la gentilezza e il sorriso.

Hanno partecipato a questo evento numerosi docenti universitari e suoi ex-allievi ora docenti e alcuni, tra cui la sottoscritta, su invito del Comitato Organizzatore e Scientifico, hanno portato la loro testimonianza.

La professoressa Margherita D'Aprile è stata mia docente nel corso di Istituzioni di Geometria Superiore e successivamente è stata relatrice della mia tesi di laurea dal titolo: "Sottovarietà riemanniane e immersioni isometriche" (fig.2). Da allora siamo rimaste in contatto per attività di formazione, ricerca didattica (D'Aprile, 2008, link), sperimentazioni, progetti (Progetto Lauree Scientifiche e Libera le Idee), ma soprattutto per scambi di idee, di materiali, discussioni e momenti di condivisione. Tra le numerose iniziative da me citate nella conferenza ho voluto esporre in particolar modo la nostra ricerca sulle trasformazioni geometriche piane che conservano l'area dei poligoni piani e le relative sperimentazioni d'aula. In questo contributo, oltre a richiamare i contenuti di due articoli in cui abbiamo collaborato e da me presentati nella conferenza, desidero riproporre un ampliamento degli stessi e le sperimentazioni svolte in seguito riguardanti il teorema di Pitagora.

Fig.1 - Locandina dell'evento

Quadro teorico

Nelle attività che presenterò nel paragrafo successivo ho voluto far sperimentare agli studenti il gusto del fare matematica, superando le artificiose "frammentazioni del sapere in materie", come osservava Lucio Lombardo Radice nell'ormai lontano 1976, con un viaggio attraverso le diverse branche della matematica e non solo.

Gli obiettivi di apprendimento si sono configurati sotto forma di "sapere come fare a", piuttosto che di "conoscere che"; infatti in questo modo gli studenti hanno avuto la possibilità di prendere coscienza del perché è necessario conoscere qualcosa e come una certa conoscenza può essere utilizzata per sviluppare competenze (D'Amore B. e Fandiño Pinilla M.I., 2007, link). Per i nativi digitali, abituati a interazioni in modalità sincrone, molti a molti (link), l'uso delle tecnologie è immediato e continuo, ma induce a facili distrazioni.

Fig.2 - 12 luglio 1993: con la Prof.ssa D'Aprile durante la seduta di laurea

Per comprendere, approfondire, riflettere e memorizzare, occorre concentrazione, l'apprendere attraverso il fare, attraverso l'operare, favorisce questi processi. Sosteneva Piaget (1956): "*L'intelligenza è un sistema di operazioni... L'operazione non è altro che azione: un'azione reale, ma interiorizzata, divenuta reversibile. Perché il bambino giunga a combinare delle operazioni, si tratti di operazioni numeriche o di operazioni spaziali, è necessario che abbia manipolato, è necessario che abbia agito, sperimentato non solo su disegni ma su un materiale reale, su oggetti fisici*". Tali attività "prettamente manuali" non sono sempre possibili con enti matematici basati su teorie astratte, ma la manipolazione e la simulazione attraverso un software costituiscono un valido strumento per favorire la visualizzazione, l'acquisizione di concetti, di tecniche e procedure di calcolo. Occorre considerare inoltre che non si apprende attraverso il mero fare, affinché l'azione sia didatticamente efficace, è essenziale che l'insegnante guidi la discussione e induca ad un'attenta riflessione. Attraverso le semplici azioni si memorizzano azioni meccaniche, l'esecuzione di algoritmi o i passi di costruzioni geometriche devono essere interiorizzate, ripercorse mentalmente per acquisire consapevolezza. All'azione si deve accompagnare il pensiero: quindi il learning by doing, si deve coniugare col learning by thinking (Tenuta U., link).

Gli elementi essenziali del quadro teorico che mi hanno guidato nella conduzione e nell'osservazione dei lavori possono essere così sintetizzati:

1. gli studi sul ruolo del linguaggio nell'apprendimento e sui rapporti tra didattica generale e didattica della matematica (Vygotskij, 1966; D'Amore, 1999), nonché come "mediatore tra aspetti percettivi ed empirici e teorici […] essenziale per l'attività argomentativa" (Ferrara, Laiolo, Paola & Savioli, 2009);
2. gli studi sulla trasposizione didattica operata dall'insegnante per adattare la conoscenza matematica al contesto in cui opera, gli ostacoli epistemologici e la multimodalità nei

processi di apprendimento (Chevallard, 1985; D’Amore, 1999; D’Amore, 2009; Arzarello, Paola, Robutti & Sabena, 2008);

3. il laboratorio e la discussione matematica; i risultati relativi all’uso dei software di geometria dinamica come strumenti per la costruzione di significato in campo matematico (Laborde & Mariotti, 2001; Arzarello & Robutti, 2002; Paola, 2007).

Le trasformazioni che conservano l’area

L’idea di lavorare sul concetto di area e sulle trasformazioni che la conservano è nata nel giugno 2008 e nel 2009 è stata oggetto di un laboratorio nel Progetto Lauree Scientifiche (link) : il problema di fondo era quello di pensare a un percorso didattico di geometria euclidea da sviluppare in tempi ridotti (visti i tagli ai monte ore curricolari di matematica), che dai postulati giungesse almeno a dimostrare il teorema di Pitagora. L’obiettivo era dunque quello di realizzare un percorso snello, ma significativo, riconsiderando i problemi classici di costruzioni con riga e compasso, in cui il focus fosse sulle trasformazioni geometriche e non sul calcolo di aree, in accordo con quanto osservava N. Malara (1996 l.c.) rivolgendosi a insegnanti nella scuola media: “*Per quanto riguarda la misura delle aree, lamentiamo il grosso spazio dato nei testi scolastici a problemi che solitamente si riducono all’applicazione di formule, spesso neppure comprese nella loro genesi, e che contrabbandano per attività di geometria dei puri calcoli aritmetici.”*

Gli studi, il confronto, le sperimentazioni, le revisioni e rielaborazioni del nostro lavoro sono stati riportati in due articoli pubblicati sul n. 2 del mese di giugno 2010 della rivista L’educazione Matematica. Il primo articolo dal taglio più teorico portava la firma di Margherita D’Aprile ed era intitolato: “*Le trasformazioni piane che conservano l’area dei poligoni”* (D’aprile, 2010). Il secondo articolo, da me redatto, riportava le attività didattiche sperimentate, nonché i risultati ottenuti. Il titolo di questo secondo articolo era: *Dal concetto di area, alle trasformazioni che la conservano: riflessioni e proposte per attività con studenti* (Marincola, 2010).

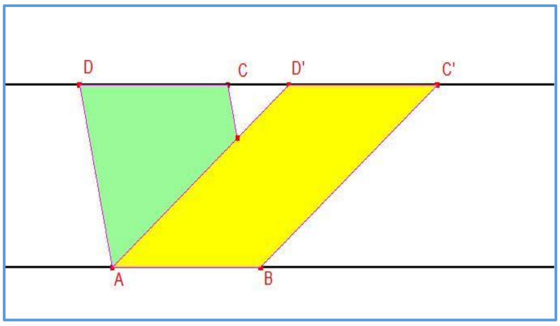


Fig.3 – trasformazione shear

Nel suo lavoro Margherita dopo una serie di considerazioni di carattere didattico riguardanti l’importanza della teoria della misura quale tema indispensabile nella formazione di ogni studente, suggeriva di adottare il metodo sintetico per l’insegnamento della geometria, nell’ambito di “un’isola deduttiva” basata sulle prime 34 proposizioni del libro I degli Elementi di Euclide. Seguiva l’introduzione delle trasformazioni shear e una serie di applicazioni per la dimostrazione di alcune proposizioni classiche. Per individuare una trasformazione per scorrimento, basta assegnare l’asse (ad esempio, la retta *AB* della fig.3) ed una coppia di punti corrispondenti (*C*, *C*'); lo scorrimento di asse *AB* che manda *C* in *C*' manda il parallelogramma *ABCD* in *ABC*'*D*'.

Condividendo il quadro teorico esposto da D'aprile (2010), nel mio articolo (Marincola, 2010), esponevo una serie di attività didattiche svolte nel primo biennio (di due licei scientifici diversi e di un istituto tecnico economico) in un modulo di 15 ore, e orientate alla scoperta di figure equivalenti, prima per via deduttiva e poi utilizzando le trasformazioni shear.

Durante queste attività abbiamo dimostrato i seguenti teoremi:

- Due triangoli aventi le basi coincidenti e il terzo vertice su una retta parallela alla base, sono equivalenti.
- Ogni triangolo si può trasformare in un parallelogramma equivalente avente per base la metà della sua base ed uguale altezza (fig.5).
- Un parallelogramma si può trasformare in un rettangolo equivalente aventi basi e altezze relative uguali.
- Ogni quadrilatero si può trasformare in un triangolo equivalente.
- Un poligono si può trasformare in un altro equivalente e con un lato di meno

  costruzione fatta realizzare agli studenti con una macro-costruzione col software di geometria dinamica GeoGebra (fig.6).

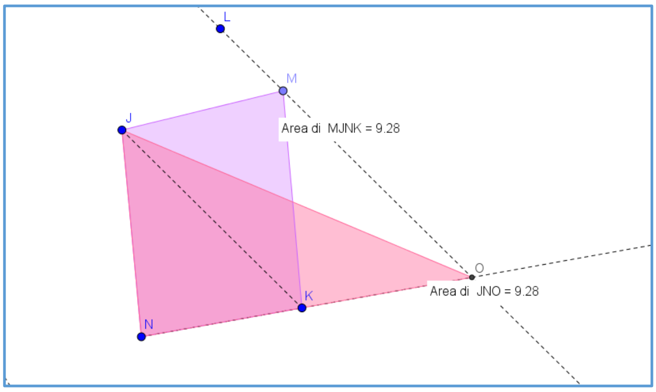


Fig.5

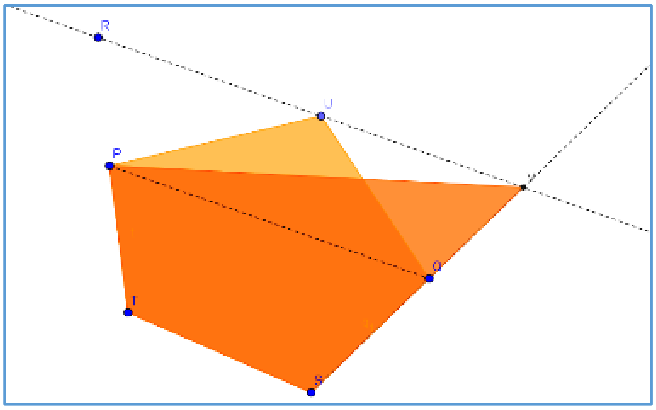


Fig.6

Tra i dati da me osservati e rilevati, evidenziavo che "*una volta scoperti gli scorrimenti, nel risolvere i problemi proposti, gli studenti usavano con maggior naturalezza le trasformazioni e non le costruzioni geometriche euclidee, nonostante che nell'attività curricolare fossero abituati alle dimostrazioni classiche; era evidente che la nuova impostazione appariva loro più semplice e congeniale in quanto avevano acquisito una rappresentazione mentale iconica dei processi eseguiti col software"* (Marincola, 2010; p. 41). Altra attività interessante proposta è stata quella di far realizzare delle macro-costruzioni con i software di geometria dinamica (Cabri II Plus e GeoGebra) per implementare nuovi strumenti personalizzati.

Esempi di attività svolte

Nell'ambito dei progetti PON (Piano Operativo Nazionale) ho realizzato due sperimentazioni (a.s. 2008/2009 e a.s. 2009/2010) che possono essere considerate la continuazione delle attività descritte negli articoli citati nel paragrafo precedente. In questi progetti ho lavorato in qualità di esperto esterno con un gruppo di 20 studenti della seconda classe del Liceo Scientifico "G.B. Scorza" di Cosenza.

I ragazzi hanno lavorato in piccoli gruppi di 2-3 elementi ciascuno, con strumenti da disegno, con i software di geometria dinamica Cabri II Plus e GeoGebra. Alcuni studenti presentavano carenze di base, altri, pur avendo una certa manualità nei calcoli, evidenziavano difficoltà di ordine logico-deduttivo e discontinuità nell'attenzione.

Nelle attività svolte, ho utilizzato inizialmente le trasformazioni shear per condurre gli studenti a dimostrare il Primo Teorema di Euclide. Come si vede in figura (fig.7): considerando lo scorrimento di asse *DE* e direzione *FH*, si può trasformare il quadrato *DEHF*, nel parallelogramma equivalente *DEQM*; applicando ad esso una traslazione di vettore *DL* e successivamente uno scorrimento di asse *DL* e direzione *PN*, si ha che il parallelogramma *DEQM* è equivalente al rettangolo *LNPD*; dunque per la proprietà transitiva si ha la tesi: il quadrato *DEHF*, costruito sul cateto del triangolo rettangolo *DCE*, è equivalente al rettangolo *LNPD* avente come dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto *DE* sull'ipotenusa.

Con trasformazioni analoghe si ha che il quadrato *ECKI*, costruito sul cateto *EC* è equivalente al rettangolo *NOCP*.

Il Teorema di Pitagora discende immediatamente dal Primo Teorema di Euclide, considerando la costruzione in figura (fig.7) poiché dato un triangolo rettangolo (nel nostro caso *DCE*), la somma dei quadrati costruiti sui cateti sono equivalenti alla somma dei rettangoli *LNCP* e *NOCP*, ma la somma di questi due rettangoli è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.

Ho anche fatto realizzare un semplice modellino con la carta del "Teorema della bustina" (fig.8), per utilizzare altre trasformazioni geometriche per far comprendere agli studenti che il teorema di Pitagora è valido anche se le figure costruite sui cateti e sull'ipotenusa non sono quadrati, ma figure simili tra loro. Manipolando il modellino, li ho invitati a enunciare e dimostrare il teorema; in questa occasione ho notato un progressivo in miglioramento rispetto alla situazione d'ingresso: la comprensione e l'enunciazione della dimostrazione attraverso le simmetrie assiali è stata immediata.

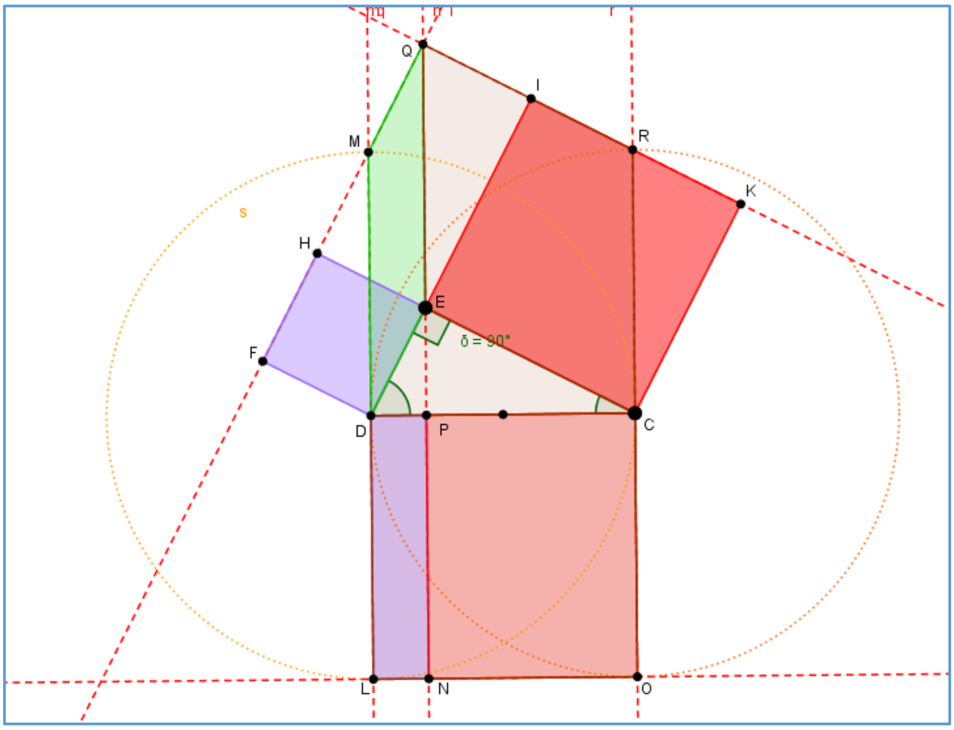


Fig.7 –I Teorema di Euclide

Successivamente gli studenti hanno realizzato un file in ambiente GeoGebra di cui la figura (vedi fig.9) illustra le principali caratteristiche.

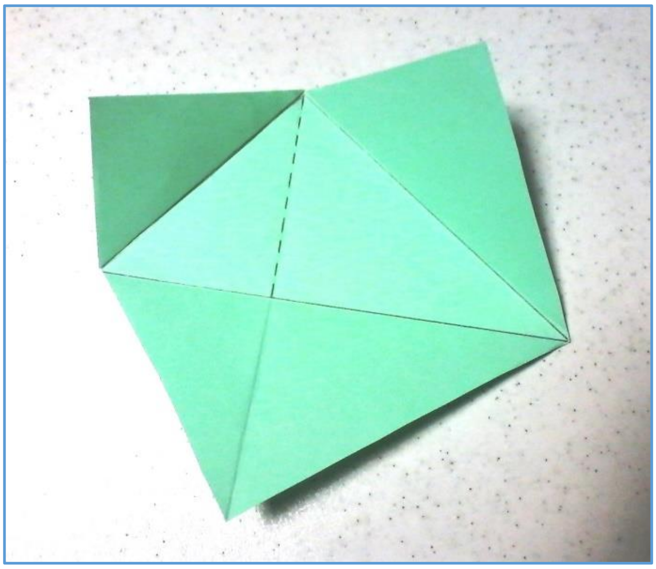


Fig.8 - Modellino

La costruzione rappresentata in figura (vedi fig.10) è stata occasione di discussione e condivisione dei contenuti teorici di geometria, dalla costruzione di un triangolo rettangolo, alla simmetria assiale, al teorema di Pitagora.

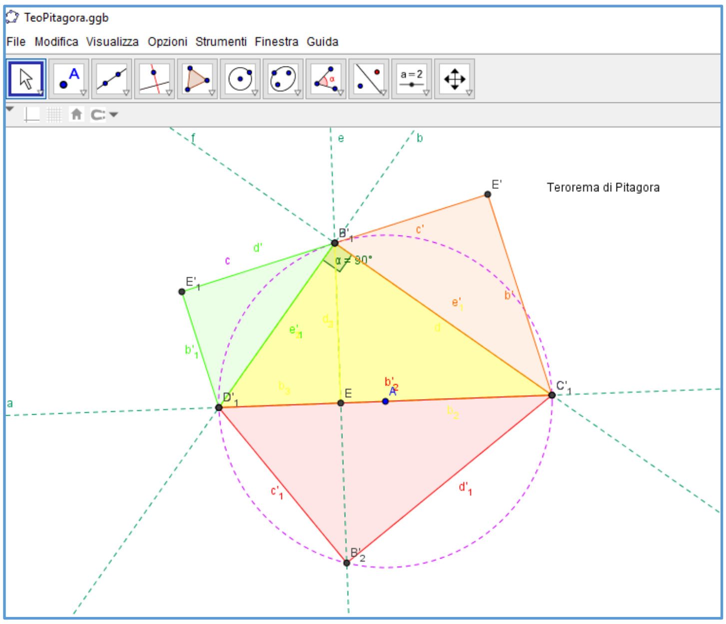


Fig.9 - Teorema della bustina

Ho poi mostrato col videoproiettore la figura (fig.10), per verificare l'effettiva comprensione dei concetti introdotti e ho chiesto agli studenti che cosa rappresentasse quell'immagine.

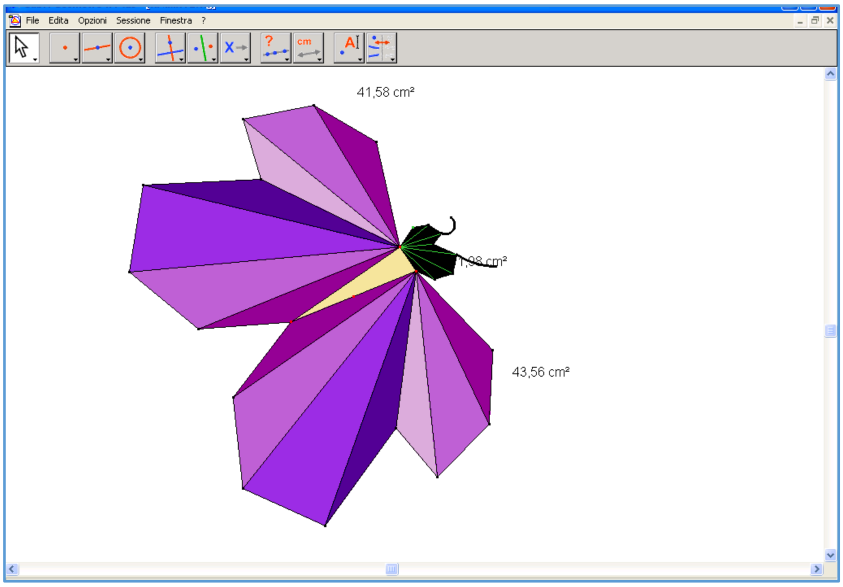


Fig.10

Al primo impatto tutti hanno detto di vedere una farfalla realizzata con Cabri II Plus; ho chiesto loro di osservare meglio, ho modificato un po' la figura e ho ingrandito il triangolo centrale; gli studenti, inizialmente, non riuscivano a cogliere il significato geometrico della figura. Quando ho mostrato che il triangolo era inscritto in una semicirconferenza, si sono resi conto che si trattava di un triangolo rettangolo e che le figure che apparivano come ali e testa erano simili tra loro; quindi si trattava ancora del teorema di Pitagora in una forma analoga a quello rappresentato in fig. 8 e fig.9.

Nello specifico, per ottenere una figura simile alla figura (vedi fig.10), gli studenti hanno realizzato le seguenti costruzioni:

1) hanno costruito un triangolo rettangolo e un poligono su uno dei cateti come in figura (fig.11)

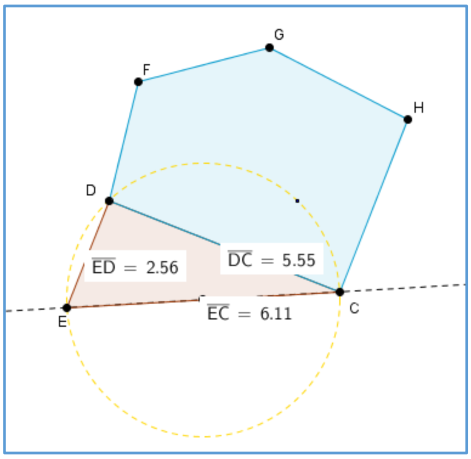


Fig.11

2) Hanno calcolato il rapporto di omotetia

$$k = \frac{EC}{DC}$$

digitando nella barra d'inserimento,

$$k = \frac{\text{Distanza}[E,\ C]}{\text{Distanza}[D,\ C]},$$

hanno selezionato la trasformazione Omotetia e hanno cliccato sul poligono di lato *CD*, poi il punto *C* e hanno inserito *k* nella finestra di dialogo, ottenendo la figura (fig.12).

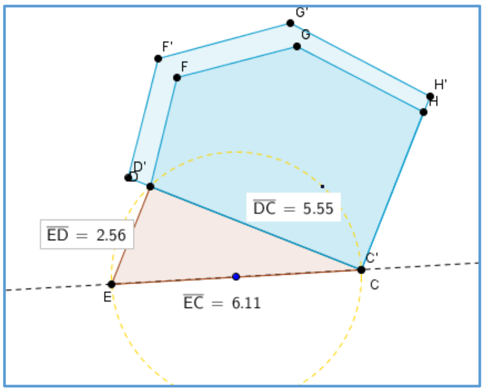


Fig.12

3) Successivamente è stata tracciata la bisettrice dell’angolo *DCE* ed è stata applicata la simmetria assiale del poligono *D’C’H’G’F’* rispetto alla bisettrice come in figura (fig.13).

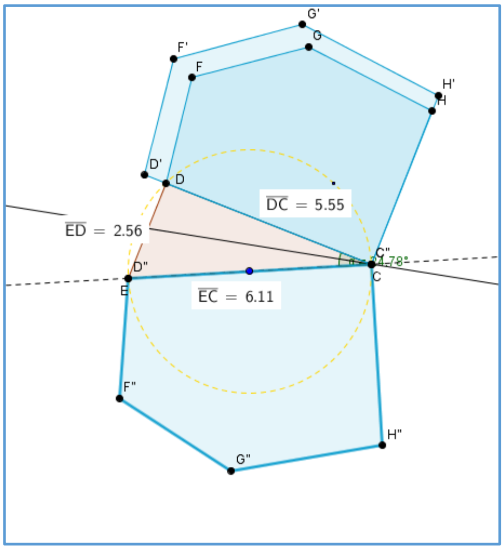


Fig.13

4) ripetendo i passi precedenti e nascondendo via via gli oggetti non più necessari, si perviene alla figura (fig.14) e dunque alla generalizzazione del teorema di Pitagora.

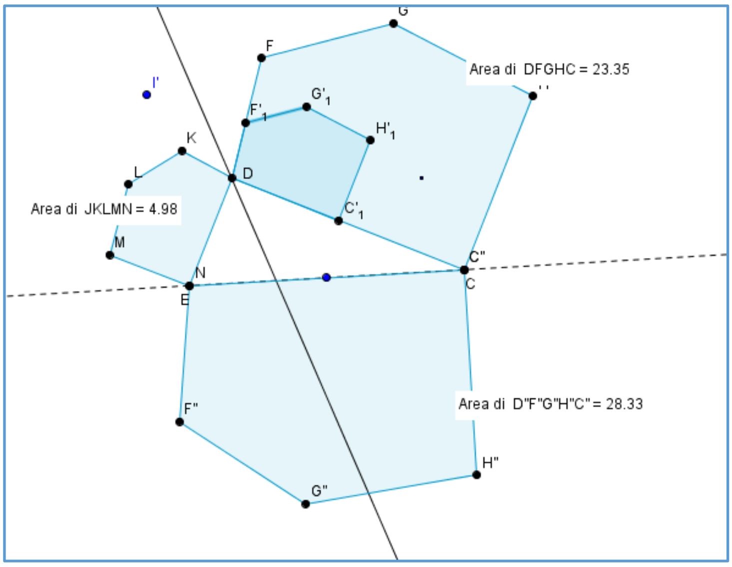


Fig.14

Le costruzioni sono state realizzate attraverso discussioni guidate; grazie anche a sistematiche e frequenti domande, richiamavo continuamente nozioni teoriche e, se necessario, fornivo chiarimenti, ma senza dare subito la risposta, attendendo il tempo necessario affinché qualche studente provasse a rispondere. Discussioni collettive guidate dall’insegnante e gruppi di lavoro autonomi si sono alternati durante tutta l’esperienza, secondo le indicazioni nazionali per il primo ciclo d'istruzione (link) e i curriculi UMI (link). Gli studenti hanno partecipato con entusiasmo e quasi sempre attivamente, anche se, talvolta, sono emersi momenti di deconcentrazione e disattenzione che hanno comportato alcuni problemi di comprensione da parte di alcuni. Ritengo che la causa più probabile di questi momenti di distrazione sia dovuta essenzialmente all'abitudine che gli studenti hanno di comunicare in modalità sincrone e reticolari, non sempre possibili nelle fasi del lavoro in classe. Per questi motivi, talvolta è stato necessario soffermarsi e richiamare l'attenzione sui punti essenziali, porre quesiti e verificare l'effettiva comprensione. Il gruppo seppur vivace, non ha creato problemi di carattere disciplinare, anche quando ha manifestato momenti di stanchezza dovuti al fatto che i lavori venivano proposti durante le prime ore pomeridiane.

Conclusioni

In questo lavoro sono state presentate attività di tipo laboratoriale che, attraverso l'osservazione, la manipolazione di modelli reali e la costruzione di una serie di file con software di geometria dinamica, ha condotto gli studenti a uno studio meditato e attento sul teorema di Pitagora utilizzando anche la geometria delle trasformazioni. In particolare, abbiamo scoperto con gli studenti le proprietà e alcune possibili attività con le trasformazioni shear e componendo altre trasformazioni che conservano l'area. Attraverso ricerche in rete sono state evidenziate le applicazioni delle trasformazioni shear nei software di grafica digitale, in reologia, in ingegneria, fisica, scienza dei materiali, ecc.

Le varie costruzioni realizzate hanno aiutato i ragazzi a comprendere meglio le proprietà degli enti geometrici in quanto l'uso delle tecnologie è presente nella quotidianità degli studenti e si rivela più consono ai loro mezzi espressivi. Dal momento che le tecnologie concorrono alla costruzione dei saperi informali e non formali (Finocchiaro S. 2015, link), appare opportuno sfruttarne le potenzialità per la costruzione dei saperi formali.

Ho voluto evidenziare quanto una didattica basata sul learning by doing, possa essere significativa per gli studenti. Essa, infatti, può creare le condizioni favorevoli per un apprendimento che mira allo sviluppo del pensiero matematico utilizzando, consapevolmente, strumenti diversi, tra cui quelli di calcolo automatico, ed essere al tempo stesso motivante e coinvolgente.

Con le attività realizzate, oltre a esercitazioni di recupero su argomenti segnalati dai docenti curricolari, ho tentato di potenziare la motivazione e di mostrare l'importanza di imparare a usare tecniche e procedure di calcolo in modo consapevole.

Dichiarazione di conflitti di interesse

L'autrice dichiara di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Deposito dei materiali dell'attività

Al seguente link sono depositati eventuali materiali inerenti questo l'articolo. Questi materiali nel tempo potranno essere modificati e arricchiti seguendo l'evoluzione delle idee sottostanti o/e future sperimentazioni svolte dall'autore dell'articolo.

http://rosamarincola.blogspot.it/2017/05/convegno-una-giornata-di-didattica.html

Acknowledgements

Ringrazio il Comitato Organizzatore e Scientifico del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'UNICAL: Prof.ssa Annamaria Canino, Dott.ssa Emilia Florio, Dott.ssa Concettina Galati, Prof.ssa Paolamaria Pietramala e Dott.ssa Paola Sdao per avermi dato l'opportunità di ricordare la figura della Professoressa D'Aprile nella giornata a lei dedicata.

Auspico che anche negli anni futuri ne venga mantenuta viva la memoria proseguendone l'opera con iniziative di formazione e ricerca didattica rivolti a studenti e docenti di ogni ordine e grado.

Un accorato ringraziamento va alla cara Professoressa Margherita D'Aprile con cui ho condiviso tanti momenti della mia formazione e il cui ricordo resterà indelebile.

Bibliografia

Arzarello F., Paola D., Robutti O., Sabena C. (2008). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom, *Educational Studies in Mathematics*, Springer Netherlands.

Arzarello F., Robutti O., (2002). *Matematica*, Editrice LA SCUOLA.

Amaldi U., (1983). *Sulla teoria della equivalenza*, in F. Enriques, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Parte prima, vol. II, art. VII, pag. 1-59, ristampa della terza edizione, Zanichelli, Bologna.

Cariani G., Fico M., (2003). *Matematica con… Geometria,* Loescher.

Cateni L., Fortini R., Bernardi C., (1990). *Nuova Geometria,* Le Monnier.

Chevallard Y., (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Coxeter H.S.M., (1980), *Introduction to Geometry, second edition,* Wiley, New York.

Dedò M., (1996), *Trasformazioni geometriche,* Decibel, Padova – Zanichelli, Bologna.

D'Aprile M., (2008). Per mitigare la solitudine di chi insegna geometria, *La matematica e la sua didattica*, anno 22, n. 4, 2008.

D'Aprile M., (2010). Le trasformazioni piane che conservano l'area dei poligoni, *L'educazione Matematica*, n. 2 pp. 15-30.

Euclide, (2007). *Tutte le opere*, a cura di F. Acerbi, Bompiani.

D'Amore B., (1999). *Elementi di didattica della matematica,* Pitagora, Bologna.

D'Amore B., (2009). Il ruolo dell'epistemologia dell'insegnante nelle pratiche d'insegnamento, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 32 B, n.2.

Ferrara F., Laiolo P., Paola D., Savioli K., (2009). Movimento, visualizzazione e costruzione di significato nella scuola primaria, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 32 A, N. 4 pag. 441 - 470.

Laborde C., Mariotti M., (2001). Grounding the notion of function and graph in DGS, Cabriworld *2001*, Montreal.

Lazzarini P., Sarnataro G., (2006). *Geometria,* ETAS.

Lombardo Radice L., (1976). *Logica e interdisciplinarità, in Introduzione alla logica*, Editori Riuniti, Roma.

Malara N., (1996). *L'insegnamento della geometria nella scuola media. Questioni teoriche e didattico-metodologiche*, n.7: Alcune osservazioni sulla equiestensione, in M.P.I. – U.M.I. L'insegnamento della geometria, Seminario di formazione per docenti, Lucca, 1995-96.

Marchini C., (1999). Il problema dell'area, *L'educazione Matematica*, n.1, pag. 27-48.

Marincola R., (2010). Una rivisitazione del problema della duplicazione del quadrato, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 33B, N. 1 pag. 69 – 86

Marincola R., (2010). Dal concetto di area, alle trasformazioni che la conservano: riflessioni e proposte per attività con studenti, *L'educazione Matematica*, n. 2 Giugno 2010 pp. 31-42

Paola D., (2007). *Dal laboratorio alla lezione: descrizione di un esempio*, Innovazione Educativa-Supplemento per l'Emilia Romagna, n. 8 - 2006, 13 - 20, IRRE Emilia Romagna.

Piaget J., (1956). *Avviamento al calcolo*, la Nuova Italia, Firenze.

Polo M., (1999). Il contratto didattico come strumento di lettura della pratica didattica con la matematica. *L'educazione matematica*, XX, VI, 1, 4-15.

School Mathematics Project, S.M.P., (1973). *Un progetto per l'insegnamento della matematica nella Scuola Media*, traduzione curata dall'Unione matematica Italiana, vol. 3, cap. 12, Zanichelli, Bologna.

Villani V., (2006). *Cominciamo dal punto*, Pitagora, Bologna.

Vygotskij L., (1966). *Pensiero e linguaggio*. Giunti e Barbera, Firenze.

Sitografia

http://matematica.unibocconi.it/articoli/margherita-daprile-un-ricordo

http://www.unical.it/portale/portaltemplates/view/view.cfm?70819

https://www.mat.unical.it/~daprile/pubblicazioni/DAPRILEformat.pdf

https://www.geogebra.org/m/TFJTdpbp

http://docenti.unicam.it/tmp/3608.pdf

L'Autrice

Rosa Marincola
IIS "Marconi-Guarasci" sez. ITE Rogliano
Via E. Altomare c.da Turbe 85/A, 87054 Rogliano (Cs)
E-mail: rosamarincola@virgilio.it
Italia

Laureata in Matematica presso l'UNICAL di Cosenza, ha conseguito due specializzazioni scientifiche biennali, due master e quattro corsi di perfezionamento. Ha insegnato Matematica e fisica nelle scuole superiori, attualmente è docente di Informatica. Ha partecipato a diverse iniziative di formazione dei docenti a livello nazionale. Collabora con diverse riviste ed è autrice di svariate pubblicazioni. Si occupa da anni di ricerca didattica, è stata tutor coordinatore per il TFA per le c.c. A047 Matematica e A048 Matematica Applicata. È referente regionale CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica). Scientix Ambassador for Italy.

Received June 19, 2017; *revised* July 20, 2017; *accepted* October 28, 2017; *published online* March 26, 2018

article

ISSN 2421-7247

Unpaired socks in a dark room. Probability calculation materials for teachers in primary and secondary schools

Fabio Brunelli, Francesco Chesi

Abstract. *The authors report a probability training course for primary and high school teachers. With the theoretical references, the contribution includes materials and proposals for activities to be carried out in the classroom.*

Key words. *Probability, frequency, INVALSI, problem solving, statistics.*

Sommario. (Calzini spaiati in una stanza buia. Materiali di calcolo della probabilità per i docenti di scuola primaria e secondaria di primo grado*). Gli autori riferiscono di un corso di formazione di calcolo delle probabilità destinato agli insegnanti della scuola primaria e della scuola secondaria di primo grado. Oltre a riferimenti teorici, il contributo comprende materiali e proposte di attività da svolgere in classe.*

Parole chiave. *Calcolo delle probabilità, frequenza, INVALSI, problem solving, statistica.*

Introduzione

I colleghi di Bisceglie non si sono sentiti molto attratti dalla Probabilità. Inizialmente abbiamo dovuto raccattarne qualcuno pure dagli altri gruppi, Ci siamo trovati così solo in dodici intorno a un tavolo con i nostri dadi, le nostre monete e le puntine da disegno (Fig.1).

L'accaduto è una ulteriore evidenza di quanto la probabilità metta a disagio alunni e docenti (Anichini, 2018).

Dopo quarantottore di "full immersion", tuttavia, corsisti e formatori avevamo costituito un unicum di piacevole collaborazione e di amicizia.

Pensavamo di avere proposto materiali noti e facilmente reperibili. Invece i colleghi partecipanti li hanno trovati interessanti e ci hanno chiesto di metterli a disposizione di un maggior numero di utenti. Da qui è nata l'idea di raccoglierli in questo contributo.

Fig.1 – Materiali per il laboratorio.

Per iniziare

Volendo seguire la nostra metodologia laboratoriale, dopo le reciproche presentazioni e scambio di indirizzi di posta elettronica, abbiamo posto le seguenti domande e abbiamo aperto una discussione in merito.

Consideriamo i seguenti tre esempi di probabilità, pensiamo in che modo poter formulare una previsione relativa ai seguenti fatti:

1. Lancio di una moneta (lancio di un dado, estrazione di un numero della tombola, ecc.).
2. Lancio di una puntina da disegno.
3. Partita di calcio Salernitana – Bari che si svolgerà sabato prossimo quattro novembre allo stadio Arechi di Salerno.

Non trascriviamo qui l'ampia discussione che si è sviluppata, ma solo le conclusioni:

1. Il primo caso rientra nella così detta "probabilità classica", che qualcuno ha anche definito a priori, matematica, teorica, basata sulle simmetrie, ecc.
2. Il secondo caso rientra nella così detta "probabilità frequentista", che qualcuno ha anche definito a posteriori, statistica, empirica, basata sull'esperimento, ecc.
3. Il terzo caso rientra nella così detta "probabilità soggettiva", definita anche "cognitiva", introdotta da Bruno De Finetti (De Finetti, 1930).
4. Per completezza abbiamo ricordato che esiste la concezione formale-assiomatica di probabilità (Kolmogorov, 1933).

A questo punto abbiamo ricordato le parole di Giovanni Prodi (Fig.2a) che ci teneva a distinguere la cultura dell'insegnante da quella dell'allievo. Nella scuola primaria e secondaria di primo grado i primi due aspetti della probabilità, infatti, sono più che sufficienti.

A proposito di citazioni, Giuseppe Peano (Fig.2b) diceva agli insegnanti: "Non dovete dire tutto ai vostri allievi, ma dovete dire cose vere!" e questo è possibile solo per i docenti che coltivano assiduamente la loro preparazione culturale.

Fig.2a – Giovanni Prodi (1925 – 2010)

Fig.2b – Giuseppe Peano (1858 – 1932)

Cenni storici

Alcune parti della matematica sono antiche (Elementi di Euclide), mentre la probabilità è una disciplina relativamente recente. I giochi probabilistici sono antichi quanto l'uomo, infatti sono stati rinvenuti dadi fatti con ossa di animali che risalgono all'epoca neolitica, oltre 6000 anni fa, e appaiono molto simili a quelli moderni. Tali dadi primitivi si chiamavano *astragaloi* e venivano ricavati da alcune particolari falangi delle pecore che avevano 2 facce arrotondate e 4 facce quadrate quasi uguali (Fig.3). Gli antichi uomini giocavano con questi dadi, scommettendo sugli esiti possibili.

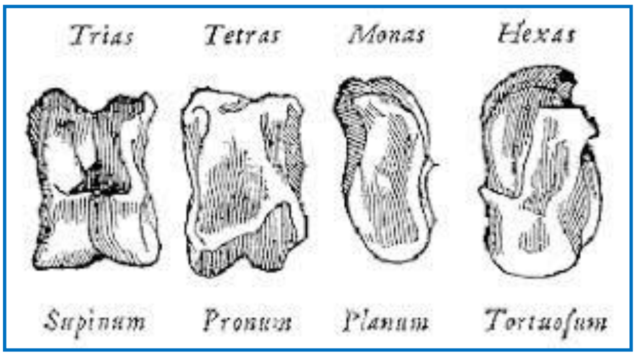


Fig.3 – Astragali romani

Abbiamo notizie di un "Gioco della pietra egiziana" (3500 a.C.) di cui riferisce Cicerone in "De Divinazione" (44 a.C.):

> "*... cercare di descrivere gli eventi che si sono presentati in passato in una medesima circostanza*".

Gli antichi romani giocavano a dadi (Fig.4), usando anche loro gli astragali di pecora.

Per difendersi dall'imprevedibilità del caso, i Greci avevano inventato addirittura una divinità, la Tiche, dai Romani chiamata poi Fortuna, alla quale appellarsi per ottenere un minimo di benevolenza. Bisognava tuttavia saper cogliere il momento giusto, il cosiddetto *kairós*, un lampo di luce la cui durata era quella di un battito di ali di una farfalla e che dunque si poteva agguantare solo molto rapidamente.

Fig.4 – Fanciulla romana gioca agli astragali

Nella Divina Commedia scritta nei primi anni del ‘300, Dante Alighieri (Fig.5) parla del gioco della Zara (dall'arabo zahr, dado) nel Canto VI dell’Inferno (vv. 1-12). Tale gioco consisteva nel sommare i risultati del lancio di tre dadi e ogni giocatore scommetteva su un numero da 3 a 18.

“Quando si parte il gioco de la zara,
colui che perde si riman dolente,
repetendo le volte, e tristo impara;
con l'altro se ne va tutta la gente;
qual va dinanzi, e qual di dietro il prende,
e qual dallato li si reca a mente;
el non s'arresta, e questo e quello intende;
a cui porge la man, più non fa pressa;
e così da la calca si difende.
Tal era io in quella turba spessa
volgendo a loro, e qua e là, la faccia,
e promettendo mi sciogliea da essa.”

Fig.5 – Dante Alighieri

Nel 1232 Federico II di Svevia promulgò la legge *de aleatoribus* e una ventina di anni dopo, nel 1255, il re di Francia Luigi IX proibì non solo il gioco, ma persino la costruzione dei dadi.

Nel 1423 ritroviamo i medesimi divieti nel sermone *Contra aleatorum ludus* di san Bernardino da Siena, anche se c'è da dire che dal X al XIII secolo si erano susseguiti una serie di editti che vietava allo stesso clero di partecipare al gioco. Addirittura coloro che partivano per la terza Crociata avvenuta tra 1189 e 1192, erano in possesso di una prescrizione che limitava il loro comportamento nei confronti delle scommesse: a nessuno che fosse al di sotto del grado di cavaliere veniva concesso di giocare per denaro e comunque cavalieri e religiosi non potevano perdere più di 20 scellini al giorno (Lissoni, 2011).

Nel libro “Sopra le scoperte dei dadi”, Galileo Galilei (1596), su richiesta del Granduca di

Toscana, calcola la probabilità che la somma delle facce di 3 dadi sia uguale ad un certo numero *k*. Il nome del gioco era *Passa dieci*.

Il Cavaliere di Méré, giocatore d'azzardo cavaliere alla corte di Luigi XIV, pose a Blaise Pascal i seguenti 2 problemi: "E' più probabile ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado o avere almeno una volta il doppio 6 lanciando 24 volte 2 dadi? E ancora: Se 2 giocatori ugualmente bravi interrompono un gioco in cui vince per primo chi totalizza un certo punteggio, senza averlo raggiunto, come si divide il premio?"

Pascal cercò il consiglio di Fermat e dalla loro corrispondenza nascono alcune pubblicazioni e le prime leggi della probabilità e del calcolo combinatorio.

Pascal pubblica nel 1654 il *Traité du Triangle Arithmétique* che parla del Triangolo di Tartaglia; tornano alla ribalta i coefficienti binomiali (già studiati precedentemente da Stifel), utili per risolvere diversi problemi di probabilità.

Il primo matematico che diede una vera definizione di probabilità fu così Pierre-Simon de Laplace, che nel suo libro *Essai philosophique sur les probabilités* (1812) scrisse:

> "*La teoria della probabilità consiste nel ridurre tutti gli eventi dello stesso tipo a un certo numero di casi ugualmente probabili, vale a dire, per cui siamo ugualmente indecisi per quanto riguarda la loro esistenza; e nel determinare il numero di casi favorevoli all'evento la cui probabilità è cercata. Il rapporto tra questo numero e quello di tutti i casi possibili è la misura di questa probabilità, che è così semplicemente una frazione il cui numeratore è il numero di casi favorevoli e il cui denominatore è il numero di tutti i casi possibili."*

Quella definita qui sopra è la cosiddetta definizione classica di probabilità.

Nell'insegnamento della matematica il calcolo delle probabilità è entrata in tempi recenti. Nei programmi del 1979 della scuola media inferiore, nel paragrafo "Matematica del certo e matematica del probabile", si legge:

a) Affermazioni del tipo vero/falso e affermazioni di tipo probabilistico. Uso corretto dei connettivi logici (e, o, non): loro interpretazione come operazioni su insiemi e applicazioni ai circuiti elettrici.
b) Rilevamenti statistici e loro rappresentazione grafica (istogrammi, aerogrammi...); frequenza; medie.
c) Avvenimenti casuali; nozioni di probabilità e sue applicazioni.

Dai *Commenti* agli stessi programmi:

> "*La riflessione sull'uso dei connettivi concorre alla chiarificazione del linguaggio e del pensiero logico. L'introduzione degli elementi di statistica descrittiva e della nozione di probabilità ha lo scopo di fornire uno strumento fondamentale per l'attività di matematizzazione di notevole valore interdisciplinare. La nozione di probabilità scaturisce sia come naturale conclusione dagli argomenti di statistica sia da semplici esperimenti di estrazioni casuali. L'insegnante, evitando di presentare una definizione formale di probabilità, avrà cura invece di mettere in guardia gli allievi dai più diffusi fraintendimenti riguardanti sia l'interpretazione dei dati statistici sia l'impiego della probabilità nella previsione degli eventi. Le*

applicazioni non dovranno oltrepassare il calcolo delle probabilità in situazioni molto semplici, legate a problemi concreti (ad esempio nella genetica, nell'economia, nei giochi)."

Dal 1979 in poi la probabilità e la statistica figurano nei programmi e nelle indicazioni di tutti gli ordini scolastici.

Tanti problemi

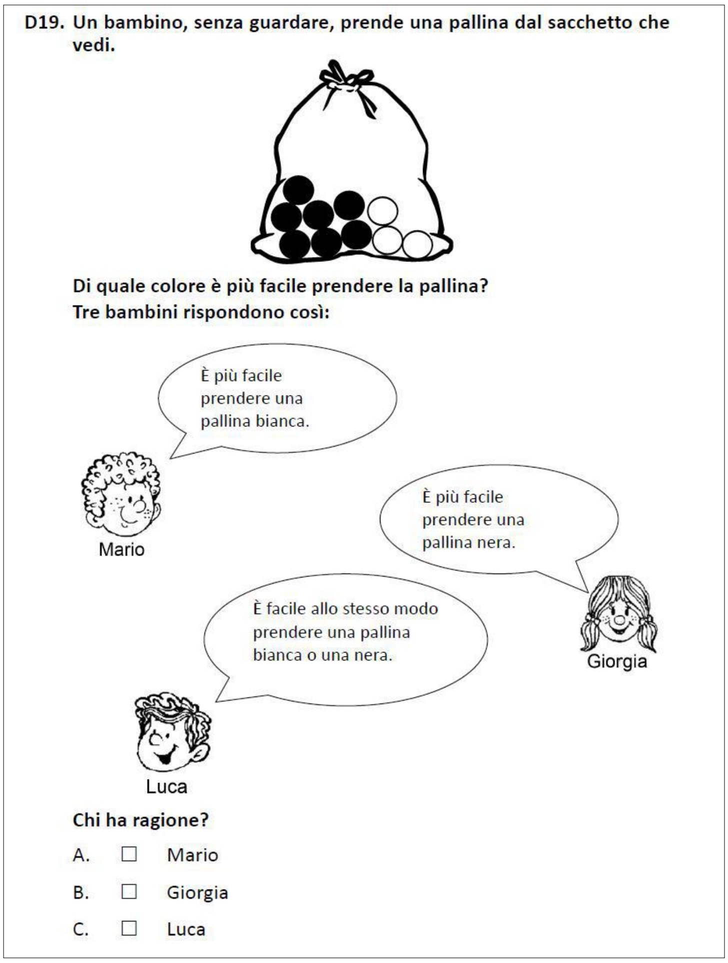
Qui di seguito sono presentati i problemi utilizzati nel laboratorio. Per ogni problema sono indicati la prova a cui appartiene, l'anno di pubblicazione, la classe proposta, la percentuale di risposte corrette (ove noto e per ogni domanda presente nel testo).

Legenda: *SNV* = Sistema Nazionale di Valutazione Invalsi (prova intermedia)

PN = Prova Nazionale Invalsi (prova di fine 1° ciclo)

RMT = Rally Matematico Transalpino, gara matematica

L = livello (L1 è 1ª primaria, L6 è 1ª sec. 1° grado, L9 è 1ª sec. 2° grado)


D19. **Un bambino, senza guardare, prende una pallina dal sacchetto che vedi.**

Di quale colore è più facile prendere la pallina?
Tre bambini rispondono così:

Chi ha ragione?

A. ☐ Mario

B. ☐ Giorgia

C. ☐ Luca

Fig.6 – SNV 2013 – L2

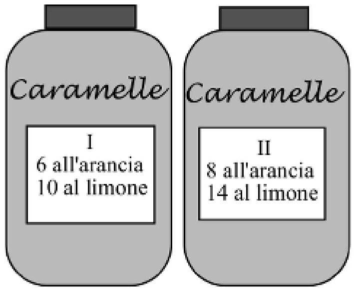
Esempio: *SNV 2016 – L10 – 45%* = problema tratto dalla prova Invalsi del 2016 (SNV 2016) per la classe 2a della sec. 2° grado (L10), il 45% degli studenti italiani ha risposto correttamente.

Nonna Matilde mette in un barattolo 6 caramelle all'arancia e 10 al limone.

In un secondo barattolo mette 8 caramelle all'arancia e 14 al limone. Le caramelle hanno la stessa forma e sono incartate nello stesso modo.

La nonna sa che a Giulio non piacciono le caramelle al limone e quindi gli dice:

«Puoi prendere una caramella. Ti lascio scegliere il barattolo nel quale puoi infilare la mano, senza guardare dentro.»



Giulio ci pensa un po' e sceglie infine il barattolo che, secondo lui, gli offre più possibilità di prendere una caramella all'arancia.

Al posto di Giulio quale barattolo scegliereste?

Spiegate il vostro ragionamento.

Fig.7 – RMT 2006 – L5-10

Il problema delle due monete (Fig.8) è ricco di ricadute didattiche.

D11. Per scegliere chi deve lavare i piatti del pranzo, Marco, Lorenzo e Livia decidono di lanciare due volte una moneta da 1 euro come quella che vedi in figura:

Testa **Croce**

Stabiliscono che:

- **se verranno 2 croci, laverà i piatti Marco;**
- **se verranno 2 teste, laverà i piatti Livia;**
- **se verranno una testa e una croce, laverà i piatti Lorenzo.**

a. Pensi che tutti e tre abbiano la stessa probabilità di lavare i piatti?

☐ Sì

☐ No

b. Giustifica la tua risposta.

....

Fig.8 – PN 2011 – L8 – a33% b16,6%

Una delle maggiori difficoltà è individuare lo spazio degli eventi. In particolare quanti singoli eventi contribuiscono a formare il risultato “una testa e una croce”?

Utile per rispondere alla domanda è una efficace visualizzazione dello spazio degli eventi (per elencazione, con una tabella, con un grafo ad albero, con un diagramma di Venn).

Ancora questo quesito apre la discussione: se il lancio di una moneta ripetuto due volte equivale o meno ad un solo lancio di due monete diverse (utile usare due monete di metalli differenti).

Abbiamo ripreso con approccio statistico il problema del lancio della moneta e della puntina. Divisi in gruppi abbiamo lanciato questi oggetti molte volte registrando i risultati.

Abbiamo raccolto i risultati dei gruppi in un’unica tabella, evidenziando le frequenze relative e assolute degli eventi (Fig.9).

Benché le nostre prove superassero solo di poco il centinaio la frequenza dell’evento “testa” si è ben presto attestata sul valore di 0,5. Mentre la frequenza dell’evento “puntina in su” si è attestata su un valore nettamente inferiore.

Fig.9 – Tabella dei risultati del lancio della puntina.

Oltre al lancio delle due monete abbiamo considerato il lancio di due dadi, introducendolo con la richiesta di sommare i risultati e tabulare tutte le somme.

Abbiamo proseguito con la richiesta di moltiplicare i risultati come richiesto dal quesito Invalsi (Fig.10).

D7. **Anna e Daniele giocano con due dadi. Ciascuno tira i due dadi e moltiplica i due numeri. Ad esempio, in questo caso 4 × 3 = 12.**

Anna vince se il prodotto è un numero pari.
Daniele vince se il prodotto è un numero dispari.

Hanno entrambi la stessa probabilità di vincere?

Fig.10 – PN 2013 – L8 – Risposte corrette solo il 32%.

Il superenalotto è un gioco che coinvolge milioni di italiani. Gli aspetti emotivi e psicologici prevalgono nettamente sulle corrette misure di probabilità. Ne abbiamo discusso affrontando il seguente quesito Invalsi, tratto dalla Prova Nazionale 2015 per il livello 8:

> "*Nel gioco del superenalotto ogni giocatore sceglie almeno sei numeri interi compresi tra 1 e 90. Gli organizzatori estraggono a caso sei numeri, sempre compresi tra 1 e 90. Vincono i giocatori che hanno scelto proprio gli stessi numeri estratti dagli organizzatori del gioco.*
>
> *Sara ha scelto i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6.*
>
> *Guglielmo ha scelto i numeri 7, 12, 15, 23, 28, 34.*
>
> *Sara e Guglielmo hanno la stessa probabilità di vincere?*
>
> *A. No, perché i numeri scelti da Sara sono consecutivi*
>
> *B. Sì, perché tutti i numeri hanno la stessa probabilità di essere estratti*
>
> *C. No, perché Sara e Guglielmo non hanno scelto gli stessi numeri*
>
> *D. Sì, perché non conosciamo i numeri usciti nelle estrazioni precedenti*"

Un problema divertente che sorprende sempre coloro che lo affrontano per la prima volta è senz'altro quello dei calzini spaiati:

> "*In un cassetto mescolati tra di loro si trovano calze blu, calze rosse e calze nere in ugual numero. Ci si trova al buio. Qual è il numero di calze che basta prendere per essere certi di averne due dello stesso colore?*"

Qualcuno ha voluto anche ritagliare e colorare calzini di molti colori diversi e, bendato, procedere a sorteggi (Fig.11). Lo scopo evidente è quello di cercare un approccio didattico coinvolgente e motivante. La risposta al quesito non potrà che essere di tipo teorico. Nel caso più sfortunato, dopo aver scelto tre calzini, avremo tre colori diversi. Basterà scegliere un quarto calzino per avere la certezza di averne due dello stesso colore.

Fig.11 – Estrazioni di calzini colorati.

Conclusione

Due giorni non sono sufficienti per un corso di probabilità. Tuttavia i colleghi partecipanti (Fig.12) nella restituzione finale ai componenti degli altri gruppi hanno dimostrato di essersi impadroniti di alcune attività, che sono riusciti a comunicare con efficacia anche grazie alla loro vivacità ed entusiasmo.

Fig.12 – I partecipanti al gruppo "ProbabilMente".

Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Nota

1. L'esperienza descritta prende spunto dalle attività svolte durante il primo corso di "matematica laboratoriale" tenuto al Nicotel di Bisceglie in Puglia, dal 3 al 5 novembre 2017. Convegno per insegnanti, organizzato da Margherita Ambrosini in collaborazione con il Centro Orientamento "Don Bosco" e con l'Asilo nido e Scuola dell'Infanzia Paritaria "Stella Stellina" di Bisceglie.

Bibliografia e sitografia

Anichini G., (2018). Probabilità, didattica e *giochini* a scuola. *Nuova Secondaria, 6*: 70-73.

de Finetti B., (1930). Fondamenti logici del ragionamento probabilistico. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 9*(5): 258-261.

Galilei G., (1596). *Sopra le scoperte dei dadi*. Barbera, Firenze.

Kolmogorov, (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung [Concetti fondamentali del Calcolo delle Probabilità]*. Springer, Berlino.

Laplace P.S.de, (1812). *Essai philosophique sur les probabilités*. Bachelier, Parigi.

Lissoni A., (2011). *Probabilità e caso. La scienza dell'alea*. Edizioni Kangourou Italia.

Pascal B., (1654). *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière.* Desprez, Parigi.

Prodi G., (1991). Didattica della probabilità nella scuola media. Ristampato in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 33A*: 533-551.

I problemi proposti nel nostro laboratorio sono reperibili ai seguenti indirizzi:

http://www.gestinv.it - Gestinv 2.0 Archivio interattivo delle prove Invalsi, realizzato da Cervelli in Azione srl e ForMath srl. sviluppando un progetto realizzato per l'Invalsi.

http://www.armtint.org/ - Associazione Rally Matematico Transalpino (RMT).

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/bp-it2.html - Banca dei problemi del RMT.

Gli Autori

Fabio Brunelli
UMI – GRIMeD - GFMT
brunelli1950@libero.it
Italy

Laureato in matematica, ha insegnato matematica e scienze in una scuola secondaria di primo grado.
Si interessa di didattica della matematica e di formazione docenti.
Ha collaborato con INDIRE come autore di materiali didattici on-line per il progetto nazionale M@t.abel e PQM.
Attualmente è consulente di alcuni Istituti Comprensivi per la costruzione del Curricolo Verticale di Matematica.

Francesco Chesi
MIUR - I.C. Guicciardini
Via Ramirez de Montalvo 1, 50141 Firenze (FI)
francesco.chesi@gmail.com
Italy

Laureato in scienze naturali, insegna matematica e scienze in una scuola secondaria di primo grado.
Si interessa di didattica della matematica e di formazione docenti.
Collabora con riviste di didattica.

Received April 23, 2017; *revised* June 29, 2017; *accepted* August 19, 2017; *published online* June 6, 2018

article

EDiMaST

ISSN 2421-7247

Basic geometric-trigonometric equalities and problem-solving: Angular Elements

Panagiote Ligouras

Abstract. *This paper presents some equalities that we consider useful for the resolution of general high school level geometry problems. The presented equalities involve only angular elements. The objective of this work is to monitor, on a small scale, the skills and knowledge acquired by students in the eleventh year of school in an Italian region named Apulia. This goal has been done by mean of different exercises where 21 students were asked to recognise and combine the equalities presented. Results are reported and discussed.*

Key words. *Mathematics, Teaching, Geometric equalities, Trigonometric equalities, Angular elements, Problem solving.*

Sommario. *In questo lavoro si presentano alcune uguaglianze che riteniamo utili per la risoluzione di problemi di carattere geometrico a livello di scuola secondaria superiore di secondo grado. Le uguaglianze presentate coinvolgono solo elementi angolari. L'obiettivo del lavoro è quello di monitorare, in scala molto ridotta, il grado di competenze acquisite dagli studenti dell'undicesimo anno di scolarità nella regione italiana denominata Puglia. Questo obbiettivo è stato raggiunto tramite diversi esercizi nei quali è stato chiesto a 21 studenti di riconoscere e combinare le uguaglianze proposte. In conclusione, i risultati sono stati presentati e discussi.*

Parole chiave. *Matematica, Didattica, Uguaglianze trigonometriche, Uguaglianze geometriche, Elementi angolari, Problem-solving.*

Introduction

This article is part of the research previously presented in the first phase (Ligouras, 2017). The first phase of the research considered the learning of a group of students who attended a course on geometric equalities concerning only linear elements. The current paper initially presents a collection of equalities that used correctly favour the resolution of many problems of geometry and trigonometry. In this second phase, geometrical and trigonometric equalities were investigated that involved only angular elements.

Generally, the learning of concepts involving angular elements represents a higher difficulty for students than learning concepts that involve only linear elements.

The equalities have been experimented with groups of students of the third (L11) and of the fourth year (L12) of some high schools of the Puglia region, during their preparation for the mathematical competitions, in the last five years.

The primary purpose of the research was to understand if the Italian school:

- prepares students for the acquisition of skills related to problem-solving;
- offers an adequate degree of acquisition of skills related to problem-solving;
- offers the opportunity for students to build meaningful learning in mathematics.

Furthermore, the students' aptitude to work in small groups of three monitored in tasks requiring knowledge not studied at school.

The difference in performance between male and female pupils also observed.

The students involved in the experimentation described below are different from those involved in the first article already presented.

All the students who took part in the experimentation have a passion for mathematics, high performances and the right motivation to improve them.

Description

Below is a summary of the activities performed and evaluated for this experimentation.

Notations

The figure (Fig.1) shows the annotations useful for reading the basic geometric equations that follow. The annotations provided to each student who participated in the experience.

notations	
A*, *B*, *C	vertices of a triangle
a*, *b*, *c	sides *BC*, *CA*, *AB*
α*, *β*, *γ	angles of a triangle

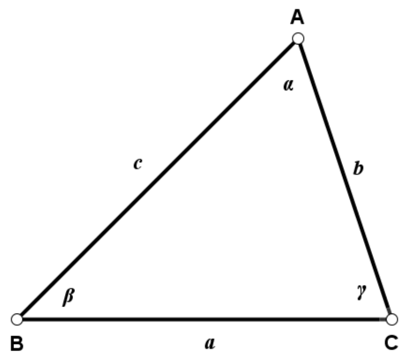


Fig. 1 – Notations

Angular elements

To perform the experimentation, we used the following 40 geometric equations as a material. This collection has been created over the past five years by examining the formulas used to create the problems of international mathematical competitions. For their collection it was very useful Internet but also some documents, articles and books (Andreescu & Feng, 2004, Anonymous, 1904, Altshiller-Court, 2007; Bottema et All., 1969; Engel, 1998; Hang & Wang, 2017; Hobson, 2005; Larson, 1983; Ligouras, 2008; Prasolov & Tikhomirov, 2001; Shariguin, 1989; Zeitz, 2006).

basic angular elements	
b.1	$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$
b.2	$\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$
b.3	$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}+1$
b.4	$\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}-1$
b.5	$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$
b.6	$\sin 2\alpha+\sin 2\beta-\sin 2\gamma=4\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma$
b.7	$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-4\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma-1$
b.8	$\cos 2\alpha+\cos 2\beta-\cos 2\gamma=-4\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma+1$
b.9	$\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=-4\cdot\cos\frac{3\alpha}{2}\cdot\cos\frac{3\beta}{2}\cdot\cos\frac{3\gamma}{2}$
b.10	$\sin 4\alpha+\sin 4\beta+\sin 4\gamma=-4\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\sin 2\gamma$
b.11	$\sin 4\alpha+\sin 4\beta-\sin 4\gamma=-4\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\gamma$
b.12	$\cos 4\alpha+\cos 4\beta+\cos 4\gamma=4\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\gamma-1$
b.13	$\cos 4\alpha+\cos 4\beta-\cos 4\gamma=4\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\gamma+1$
b.14	$\sin 5\alpha+\sin 5\beta+\sin 5\gamma=4\cos\frac{5\alpha}{2}\cdot\cos\frac{5\beta}{2}\cdot\cos\frac{5\gamma}{2}$
b.15	$\sin 5\alpha+\sin 5\beta-\sin 5\gamma=4\sin\frac{5\alpha}{2}\cdot\sin\frac{5\beta}{2}\cdot\cos\frac{5\gamma}{2}$
b.16	$\cos 5\alpha+\cos 5\beta+\cos 5\gamma=4\sin\frac{5\alpha}{2}\cdot\sin\frac{5\beta}{2}\cdot\sin\frac{5\gamma}{2}+1$
b.17	$\cos 5\alpha+\cos 5\beta-\cos 5\gamma=4\cos\frac{5\alpha}{2}\cdot\cos\frac{5\beta}{2}\cdot\sin\frac{5\gamma}{2}-1$
b.18	$\sin 6\alpha+\sin 6\beta+\sin 6\gamma=4\cdot\sin 3\alpha\cdot\sin 3\beta\cdot\sin 3\gamma$

b.19	$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma+2$
b.20	$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma$
b.21	$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma+1$
b.22	$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\gamma=-2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma+1$
b.23	$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}=-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}+1$
b.24	$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}=-2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}+1$
b.25	$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}+2$
b.26	$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\frac{\gamma}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$
b.27	$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)(\sin\gamma+\cos\gamma)=2(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)+1$
b.28	$\frac{\cot\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}+\frac{\cot\beta}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha}+\frac{\cot\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}=2$
b.29	$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$
b.30	$\tan n\alpha+\tan n\beta+\tan n\gamma=\tan n\alpha\cdot\tan n\beta\cdot\tan n\gamma$
b.31	$\tan\alpha\cdot\tan\beta+\tan\beta\cdot\tan\gamma+\tan\gamma\cdot\tan\alpha=\sec\alpha\cdot\sec\beta\cdot\sec\gamma+1$
b.32	$\cot n\alpha\cdot\cot n\beta+\cot n\beta\cdot\cot n\gamma+\cot n\gamma\cdot\cot n\alpha=1$
b.33	$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=\cot\alpha\cdot\cot\beta\cdot\cot\gamma+\csc\alpha\cdot\csc\beta\cdot\csc\gamma$
b.34	$\frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}+\frac{\cot\beta+\cot\gamma}{\tan\beta+\tan\gamma}+\frac{\cot\gamma+\cot\alpha}{\tan\gamma+\tan\alpha}=1$
b.35	$\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}$
b.36	$\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma}$
b.37	$\left(1+\tan\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\tan\frac{\beta}{4}\right)\left(1+\tan\frac{\gamma}{4}\right)=2\tan\frac{\alpha}{4}\cdot\tan\frac{\beta}{4}\cdot\tan\frac{\gamma}{4}+2$
b.38	$\frac{\tan\alpha\cdot\tan\beta-1}{\cos^2\gamma}+\frac{\tan\beta\cdot\tan\gamma-1}{\cos^2\alpha}+\frac{\tan\gamma\cdot\tan\alpha-1}{\cos^2\beta}=\frac{3}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$
b.39	$\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)+\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)=4\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{4}\cdot\cos\frac{\gamma-\alpha}{4}-1$
b.40	$\sin^3\alpha\cdot\cos(\beta-\gamma)+\sin^3\beta\cdot\cos(\gamma-\alpha)+\sin^3\gamma\cdot\cos(\alpha-\beta)=3\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$

Fig.2 – Basic geometric-trigonometric equalities

Activities and experimentation

As a first activity, the students practised recognising if a specific expression is an immediate consequence of one of those illustrated in the figure (Fig.2). The following figure (Fig.3) presents one of the cards used for the exercise.

Proposal n. 1	
w.01	$\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1}{4}=\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$
w.02	$\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$
w.03	$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
w.04	$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma=0$
w.05	$\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\dfrac{\cot\alpha-1}{\cot\alpha+1}$
w.06	$\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\cot\beta-\cot\alpha$
w.07	$\tan\alpha+\cot\alpha=\dfrac{2}{\sin 2\alpha}$
w.08	$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+1$
w.09	$\sin^2 2\alpha+\sin^2 2\beta+\sin^2 2\gamma+2\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\gamma=2$
w.10	$\dfrac{1-\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha}{1+\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha}=\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$
Identify any expressions that are consequences of one of the forty basic geometric-trigonometric equalities. Indicate below their ID.	
Answers:	

Fig. 3 – recognition questionnaire

Subsequently, students were offered some cards with problems to verify their ability to recognise the expressions that are constructed by combining two or more geometrical equalities between the 40 of the figure (Fig. 2). The following figure (Fig. 4) presents one of the boards used for the exercise.

Each student had 15 minutes to answer the question.

Proposal n. 2	
x.01	$4\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma=-\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma-1$
x.02	$\sin\alpha+\sin\beta=2\cos\dfrac{\gamma}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\right)$

x.03	$\dfrac{\tan\alpha\cdot\tan\beta+\tan\beta\cdot\tan\gamma+\tan\gamma\cdot\tan\alpha-1}{\sec\alpha\cdot\sec\beta}=\sec\gamma$
x.04	$\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}+\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\sin\alpha}+\dfrac{\cos\gamma}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}-2=0$
x.05	$\cos 4\alpha+\cos 4\beta-4\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\gamma=\cos 4\gamma+1$
Identify any expressions that are a consequence of two or more of the forty expressions provided. Indicate below their ID.	
Answers:	

Fig. 4 – Combination of basic geometric equalities

Finally, the students were asked to demonstrate one of the five expressions proposed using their knowledge and the 40 equalities (see Fig. 2). The following figure (Fig.5) presents one of the boards used for group exercise.

Each group had 20 minutes to answer the question.

Survey n. 3	
y.1	$\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta-2\sin\gamma\cos\gamma}{4\cos\alpha}=\cos\beta\cdot\sin\gamma$
y.2	$\cos^2\alpha-\cos^2\gamma=\sin^2\beta-2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma$
y.3	$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma}{\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$
y.4	$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma}\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}$
y.5	$\sin 4\alpha+\sin 4\beta=-8\sin 2\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot\cos 2\gamma+\cos 4\gamma\cdot\tan 4\gamma$
Solve, in groups, one of the following geometric equalities. Basic geometric-trigonometric equalities can use without demonstration.	
Resolution:	

Fig. 5 – Resolution, in groups, geometric equalities

Finally, the figure (Fig. 6) presents one of the worksheets used, at the end of the path, to monitor the skills acquired (acquired and previous) individually.

Each student has had 45 minutes to answer the question.

Proposal n. 4	
z.1	$2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+2\cos^2\dfrac{\beta}{2}+2\cos^2\dfrac{\gamma}{2}=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+3$
z.2	$2\sin 4\gamma=4\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta\left(\cos 2\gamma-\sin 2\gamma\right)$

z.3	$\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}=4\cos\frac{180°-\alpha}{4}\cdot\cos\frac{180°-\beta}{4}\cdot\cos\frac{180°-\gamma}{4}$
Solve, individually, one of the following geometric-trigonometric equalities. Basic geometric-trigonometric equalities can use without demonstration.	
Resolution:	

Fig. 6 – Individually final test. Solution of geometric equalities

Discussion and results

21 students L11 and L12 year of schooling participated in this research. Of these, 12 were males and nine females. During the course topics and insights were discussed that are generally not carried out at school during the period of study in Italy.

The first figure (Fig.7) presents the percentages of the exact answers achieved by the students during the first exercise.

85.71% of students have identified that question w.01 is an immediate consequence of b.3 of fundamental geometric equalities. This question had a correct answer from 91.67% of the 12 male students, which corresponds to 11 students and 77.78% of the nine female students corresponding to 7 people.

76.19% identified that question w.04 is a consequence of equality b.29. This question was answered correctly by 83.33% of males, which corresponds to 10 students and 66.67% of female students who correspond to 6 people.

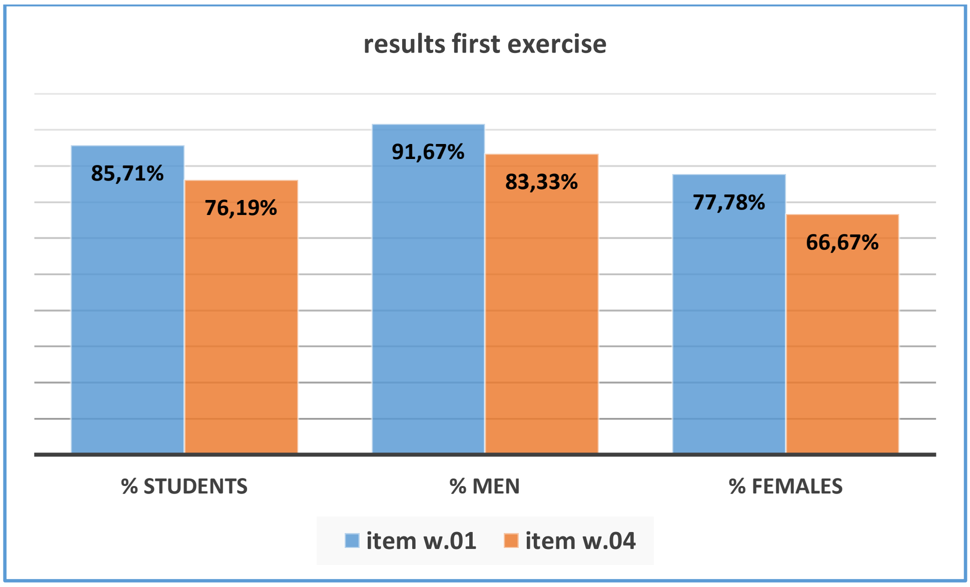


Fig. 7 – Results first exercise

The percentage of responses cannot be considered a good result. In fact, the task was only to observe and decide to use only the four fundamental operations of arithmetic. Also, the results of the percentages of correct answers of the other cards were similar and included in a range of ±1.82% compared to the values presented in the graph.

The figure (Fig.8) shows the percentages of the correct and non-correct answers for the second exercise.

The exercise asked to identify the equalities that would result in combinations of two or more basic expressions.

9.52% of the students have identified that question x.1 is a consequence of the equality b.7 (see Fig.2). Only two students answer incorrectly.

In fact, the item is an equivalent formulation of the equality b.7.

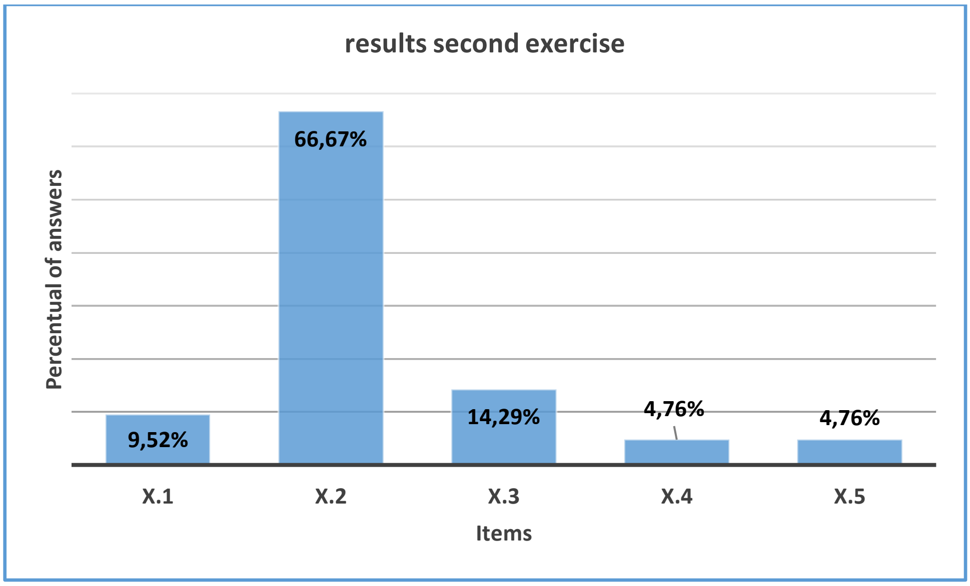


Fig. 8 – Results second exercise

66.67% of the students indicated that the question x.2 is a consequence of the questions b.1 and b.2. These (14) students answered correctly. In fact, the equality can achieve by following simple algebraic operations using items b.1 and b.2.

14.29% of the students indicated that the question x.3 is a consequence of the question b.31. These three students answered incorrectly. In fact, item x.3 is a writing equivalent of equality b.31.

4.76% of the students identified that question x.4 is a consequence of question b.28. These one student answered incorrectly. In fact, the element x.4 is identical to the question b.28.

4.76% of the 21 students identified that question x.5 is a consequence of question b.13. These one student answered incorrectly. Indeed, equality x.5 is identical to question b.13.

We can think, after reading these results, that even the students of the second phase of experimentation like those of the first phase, cannot read carefully and consequently understand the deliveries of the tasks to be performed. Our conjecture could further deepen (with subsequent research) extending the statistical sample to other Italian students of school age L11 and L12. The exercise asked to identify the equalities that would result in combinations of two or more basic expressions.

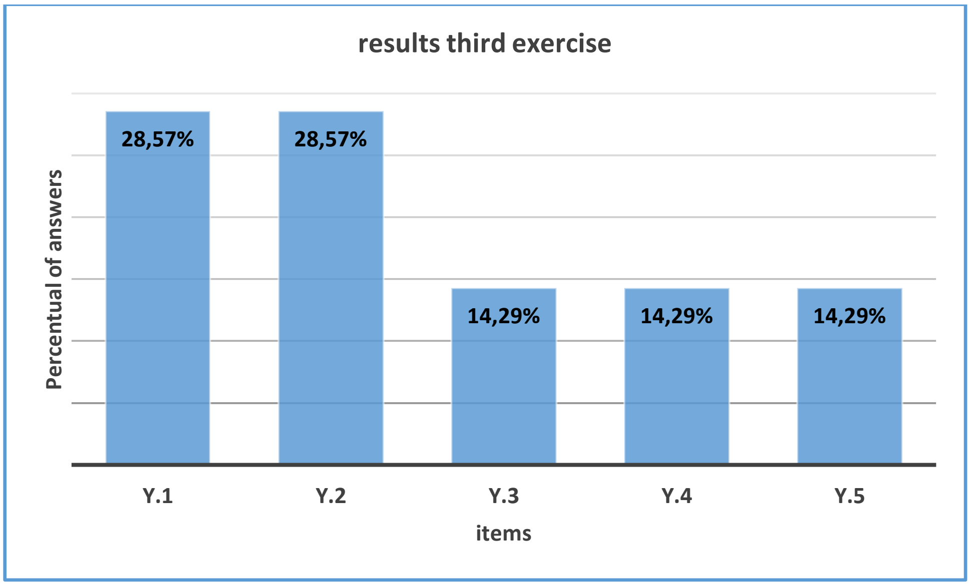


Fig. 9 – Results third exercise

Figure (figure 9) presents the percentages of the seven groups of students who have solved a specific item of the third exercise.

28.57% of the groups, which corresponds to 2 groups of the seven formats, solved the question y.1. The question presents a medium difficulty.

28.57% which corresponds to 2 groups, solved the question y.2. The question presents a medium difficulty.

14.29% (corresponds to 1 group) solved the question y.3. The question presents a medium-high difficulty.

The 14.29% that corresponds to 1 group solved the question y.4. The question presents a medium difficulty.

14.29% which corresponds to 1 group, solved the question y.5. The question has a medium difficulty.

It is important to stress that all the groups have solved one of the five proposed questions successfully.

As can be seen in the last figure (Fig. 10):

42.86% of the students, which corresponds to 9 people, solved the question z.1. The question does not present a high level of difficulty. The largest number of students chose this question.

33.33% of the students, which corresponds to 7 people, solved the question z.2. The application does not present a high level of difficulty.

The 19.05% that corresponds to 4 students solved the question z.3. The question presents a higher level of difficulty with than the other two proposed.

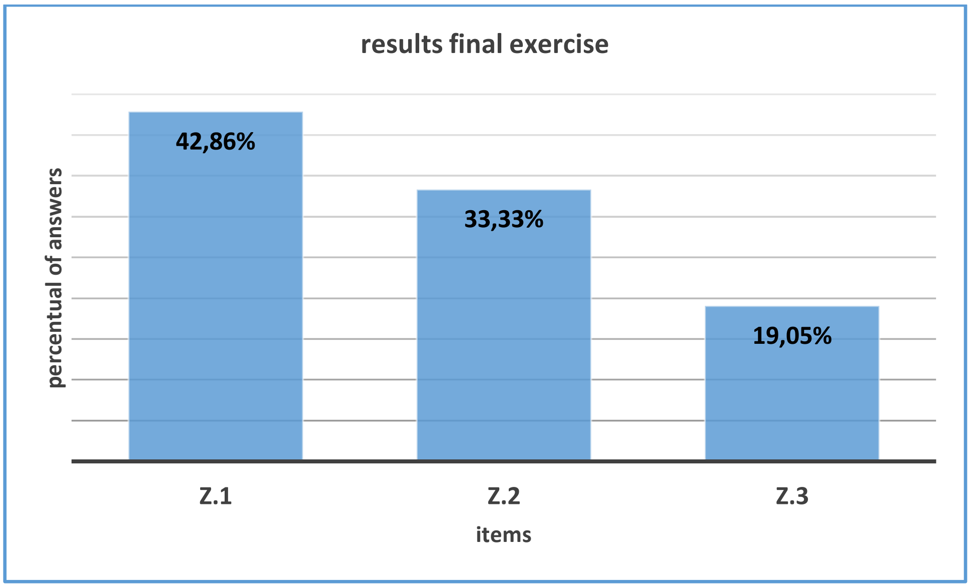


Fig. 10 – Results final exercise

Finally, it should note that the 4.76% that corresponds to 1 student, has not been able to completely or correctly solve any item of those proposed.

Also in the second phase, we did not intervene with the students to understand the motivations of the decision-making process that guided their response choices.

Conclusion

The authors intend to continue the research following the same basic methodology. This new experiment that will involve a new group of students will have three phases. The first phase will concern only linear elements. The second phase will involve only angular elements. The third phase will involve both linear elements and angular elements. In this way - by gradually inserting linear elements, angular elements and linear and angular elements - the information field provided is expanded and the requests to the students become more complex. This way of proceeding seems to the authors to evaluate the degree of ability of the students in managing much information on increasingly complex problematic situations close to the world of abstraction compared to the real world in which they live every day.

None of the students in the group highlighted particular heuristic skills.

Declaration of Conflicting Interests

The author declared that they had no conflicts of interest concerning their authorship or the publication of this article.

References

Andreescu T., Feng Z., (2004). *103 Trigonometry Problems: From the Training of the USA IMO Team*, Birkhauser, Boston.

Anonymous, (1904). *Relations entre les éléments d'un triangle*. Vuibert et Nony, Éditeurs, Paris.

Altshiller-Court N., (2007). *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, Dover Publications.

Bottema O., Djordjevic R.Z., Janic R.R., Mitrinovic D.S., Vasic P.M., (1969). *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordho Publishing Groningen.

Engel A., (1998). *Problem Solving Strategies*, Springer Verlang.

Hang K.H., Wang H., (2017). *Solving Problems in Geometry: Insights and Strategies*, World Scientific Pub Co Inc.

Hobson E.W., (2005). *A Treatise on Plane and Advanced Trigonometry*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York.

Larson L.C., (1983). *Problem-Solving Through Problems*, Springer-Verlag.

Ligouras P., (2017). *Basic Geometric Equalities and Problem-Solving: Linear Elements*, Experiences of Teaching with Mathematics, Sciences and Technology — ISSN 2421-7247, vol. 3, n. 1, 475-487.

Ligouras P., (2010). 1691 *Algebraic Inequalities: Problem Solving – Old and New Problems for the Mathematical Olympiads*, AGA editrice.

Ligouras P., (2008). *Geometrical Olympiad 2008*, AGA editrice, ISBN: 88-95089-11-9 (Italian).

Prasolov V.V., Tikhomirov V.M., (2001). *Geometry*, American Mathematical Society.

Shariguin I., (1989). *Problemas de Geometría Planimetría*. Editorial Mir.

Zeitz P., (2006). *The Art and Craft of Problem Solving*, Wiley International Student edition.

About the Author

Panagiote Ligouras
I.I.S. "Leonardo da Vinci – Galileo Galilei" - Noci (BA)
Currently in service at the Regional School Office (USR Puglia)
Via Col di Lana, 33, 70011 Alberobello (BA)
ligouras@alice.it
Italy

Teacher of mathematics and computer science. Passionate about mathematical problem-solving, ICT, didactic communication and online and Blended educational activities. It also deals with learning and evaluation processes in various training and system contexts.

Collaborates for years with the Italian Ministry of Education, University and Research (MIUR), with the INDIRE (National Institute of Documentation, Innovation and Educational Research, Italy), with INVALSI (National Institute for the Evaluation of the Educational System of Education and training, Italy) and with the USR Puglia (Regional School Office, Italy).

Trainer accredited in "Evaluation of learning and system" - SNV.

He is the author of numerous scientific papers.

Website: www.takismath.eu

LinkedIn: http://it.linkedin.com/pub/ligouras-panagiote/33/113/a02

Received April 17, 2017; *revised* June 22, 2017; *accepted* August 6, 2017; *published online* July 2, 2018

Experiences of teaching with Mathematics, Sciences and Technology

Volume 3, Number 2, August 2017 ISSN 2421-7247 (online)

Reviewers

MIUR: Ministry for Education, University and Research – Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
INDIRE: National Institute for Documentation, Innovation and Educational Research – Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa
INVALSI: National institute for the evaluation of the education and training system – Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione.

Volume 3, Number 2, August 2017 ISSN 2421-7247 (online)

Tutors

Simone **Banchelli**
MIUR, Ravenna (RA), Italy

Nicola **Chiriano**
MIUR, Cosenza, Italy

Titti **D'Acunto**
University of Salerno, Italy

Umberto **Dello Iacono**
University of Salerno, Italy

Flora **Del Regno**
University of Salerno, Italy

Alessandra **Faniuolo**
MIUR, Putignano (BA), Italy

Laura **Lombardo**
University of Salerno, Italy

Maria **Piccione**
MIUR, Firenze, Italy

Grazia Patrizia **Raciti**
MIUR, Riposto (CT), Italy

Fiorenza **Turiano**
MIUR, Savigliano (CN), Italy

Dario **Zuccato**
MIUR, Due Ville (VI), Italy

Vincenzo **Palumbo**
MIUR, Rutigliano (BA), Italy

MIUR: Ministry for Education, University and Research – Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

INDIRE: National Institute for Documentation, Innovation and Educational Research – Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa

INVALSI: National institute for the evaluation of the education and training system – Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione.

Volume 3, Number 2 ISSN 2421-7247 (online) August 2017

Contents

Experiens & Research Articles