

EDiMaST

**Experiences of Teaching
with Mathematics, Sciences and Technology**



**Expériences pédagogiques avec les mathématiques, des sciences et de la technologie
Experiencias Educativas con Matemáticas, Ciencia y Tecnología
Esperienze Didattiche con Matematica, Scienze e Tecnologia**

Experiences of teaching with Mathematics, Sciences and Technology

Esperienze Didattiche con Matematica, Scienze e Tecnologia
Experiencias Educativas con Matemáticas, Ciencia y Tecnología
Expériences pédagogiques avec les mathématiques, des sciences et de la technologie

Volume 2, Number 2, August 2016



ISSN 2421-7247 (online)

The Journal is issued online three times per year (April, August and December).

EDIMAST is an Open Access Online publication. This means that everybody can free access online to abstracts and full-length articles.

Anyone involved in the teaching of mathematics, sciences and technology is welcome to contribute.

EDIMAST is an international scientific journal and welcomes articles in English, Italian, Spanish and French.

Publish on EDIMAST has no costs for the papers' author.

For more information visit
www.edimast.it

To the authors:
paper can be addressed to:
edimast@gmail.com

Editor in Chief

Panagiotis Ligouras
MIUR, Alberobello (BA), Italy

Associated Editors

Mohammed Aassila
Université de Fribourg, France
Rosado Francisco Bellot
OEI, Valladolid, Spain
Giorgio Bolondi
Università di Bologna, Italy
Rossella Garuti
MIUR-USR Emilia-Romagna, Italy
Chronis Kynigos
National and Kapodistrian
University of Athens, Greece
Anna Lena Manca
MIUR, Tricase (LE), Italy
Elena Mosa
INDIRE, Firenze, Italy
Aurelia Orlandoni
MIUR-INVALSI, Bologna, Italy
Domingo Paola
MIUR-Università di Genova, Finale
Ligure Borgo (SV), Italy
Elvira Pistoressi
MIUR-INVALSI, Roma, Italy

Editorial Board

Laura Antichi
MIUR-CREMIT, Brescia, Italy
Vito Giuseppe Clarizio
MIUR-USR Puglia, Bari, Italy
Laura Branchetti
Università di Palermo, Italy
Anna Federico
INDIRE, Firenze, Italy
Ivan Graziani
MIUR, Forlì, Italy
Maria Antonietta Impedovo
Université de Aix-Marseille, France
Youngdae Reo Kim
Darim Vision Co., Ltd., Seoul, Korea
Francesco Paolo Liuzzi
IIS "Davinci – Galilei" Noci (BA), Italy
Andrea Maffia
MIUR-Università di Bologna, Italy
Gregory Moutsios
Vassiliadis College, Thessaloniki, Greece
Flavio Oliva
MIUR, Polignano a Mare (BA), Italy
Monica Pentassuglia
Università di Verona, Italy
Maria Sorrentino
MIUR, Torre del Greco (NA), Italy

Lorita Tinelli
CESAP, Noci (BA), Italy

Scientific Committee

Fabio Brunelli
MIUR, Firenze, Italy
Ilaria Bucciarelli
INDIRE, Firenze, Italy
Giuseppe Devillanova
Politecnico di Bari, Italy
Maria Antonietta Impedovo
Université de Aix-Marseille, France
Teruni Lambert
University of Nevada, Reno, USA
Petros Lameris
Coventry University-The Serious Games Institute, UK
Olivia Levrini
Università di Bologna, Italy
Francesca Martignone
Università del Piemonte Orientale, Alessandria, Italy
Victor Larios Osorio
University of Querétaro, Mexico
Silvia Panzavolta
INDIRE, Firenze, Italy
Kyriakos Petakos
University of Rhodes, Greece
Stefania Pozio
MIUR-INVALSI, Roma, Italy
Catalina Rodriguez
Technological University of Tijuana, Baja California,
Mexico
Mario Rotta
IBIS Multimedia, Arezzo, Italy
Elvira Lázaro Santos
Politecnico di Setúbal & Escola Básica 2º-3º ciclos,
Lisbon, Portugal
Toyanath Sharma
Kathmandu University School of Education,
Kathmandu, Nepal
Giulia Tasquier
Università di Bologna, Italy
Marika Toivola
University of Turku, Finland
Luigi Tomasi
MIUR-Università di Ferrara, Italy
Saverio Tortoriello
Università di Salerno & CIRPU, Italy
Constantinos Xenofontos
University of Nicosia, Cyprus.

Against problem solving by segment method

Antonella Castellini

Abstract. *The segment methods as graphic-methods for problem solving, are one of the crucial points in Italian lower secondary school. Usually, they are faced during grade 6 in Problem Solving classes. However, the conceptual gap that has to be faced is not problem solving but the conversion from one representational register to another. Pupil's difficulties could be overcome using other representations and they require a specific preliminary work of conversion between many different representational registers. In this paper some activities aimed to overcome this gap are presented. Such activities are suitable for a conscious and significant introduction to algebraic language.*

Key words. *Relations visualization, I start to the algebra, resolution of problems.*

Sommario. *(Contro i “problemi con i segmenti”). I cosiddetti problemi con i segmenti o problemi che si risolvono con il metodo grafico, sono uno dei punti cruciali nella scuola secondaria di primo grado italiana. Di solito vengono affrontati nella prima classe all'interno di una unità didattica generale spesso indicata come Risoluzione di Problemi mentre il nodo concettuale è di altro genere: è la traduzione da un linguaggio ad un altro. Le difficoltà incontrate dagli alunni possono essere superate facendo ricorso ad altre rappresentazioni grafiche e soprattutto necessitano a monte di un lavoro specifico di traduzione con l'uso di più registri rappresentativi e semiotici. In questo articolo si presentano alcune attività che superano questo gap e che si prestano ad un avvio consapevole e significativo verso il linguaggio algebrico.*

Parole chiave. *Visualizzazione di relazioni, avvio all'algebra, risoluzione di problemi.*

Introduzione

I cosiddetti “problemi con i segmenti” ovvero problemi che vengono risolti con il metodo grafico, sono assai comuni nella pratica didattica della scuola secondaria di primo grado italiana. Si chiede in pratica di passare da un linguaggio delle parole ad un linguaggio simbolico ad uno figurato dove la rappresentazione grafica è riferita esclusivamente a segmenti (da qui il nome).

Questo tipo di problemi è tanto diffuso e usato dai docenti quanto, a mio avviso, è ostico e complesso per gli alunni. Questo passare attraverso diversi registri rappresentativi invece di facilitare la comprensione la rende complessa e astratta mentre lo scopo dovrebbe essere esattamente l'opposto ovvero rendere concrete e visibili alcune relazioni. Ecco quindi la

necessità di rivedere il percorso che deve iniziare da una riflessione sul linguaggio; da qui si sviluppa e amplia fino ad arrivare ad una interconnessione fra i vari linguaggi, che sia significativa per l'alunno e lo aiuti a comprendere l'importanza della simbologia in matematica.

Destinatari

Il percorso è stato realizzato nella classe prima E della scuola secondaria dell'Istituto Comprensivo 1 di Poggibonsi (SI) nell'anno scolastico 2015-2016 nel periodo settembre-febbraio. All'interno del Dipartimento dello stesso Istituto (comprensivo da soli 3 anni) è iniziata una condivisione dello stesso percorso che ne prevede uno sviluppo in verticale all'interno del curriculum di matematica.

Lo stesso è stato presentato ad incontro di formazione per docenti di ogni ordine e grado, organizzato dal GFMT (*Gruppo di Formazione Matematica della Toscana*), presso Università degli Studi di Firenze nel mese di marzo 2016.

Idea di partenza

L'idea nasce da una considerazione oggettiva: la difficoltà per i bambini di risolvere alcuni tipi di problemi, quelli solitamente definiti come problemi con i segmenti o risolubili con il metodo grafico. Mi sono chiesta quali potessero essere gli ostacoli e come poter agire per superarli. La prima riflessione è stata sulla comprensione del testo in lingua italiana quando si hanno delle informazioni espresse non solo con numeri (dati assoluti) ma anche con relazioni (dati relazionali). Da qui la necessità di lavorare con attività specifiche sul linguaggio e sulla traduzione in forma sintetica di un testo scritto (Vygotsky, 1969). A questa prima fase, complessa e articolata, ne sono seguite altre finalizzate alla formalizzazione e alla modellizzazione del problema per arrivare alla sua risoluzione. Questa modalità di approccio ha portato gli alunni (in modo naturale) al concetto di equazione ed alla sua risoluzione in forma semplice e intuitiva.

Nell'ideare tutto il percorso ho trovato molti spunti e riferimenti che ho seguito nel progetto Ar.Al (Navarra, 2006a; 2006b).

Finalità

- Favorire il potenziamento del problem solving (D'Amore, 1993; Borasi, 1984).
- Promuovere un approccio all'algebra come linguaggio attraverso l'aritmetica (Malara, 2004, 2012; Malara et al. 2004).
- Sviluppare la comprensione dei testi (da linguaggio naturale a simbolico).
- Individuare e rappresentare relazioni (D'Amore, 1999).
- Stimolare apprendimento attivo e cooperativo.
- Favorire un atteggiamento di scoperta (Piochi, 2010).
- Creare momenti di discussione e confronto.
- Sviluppare l'uso di vari registri (semiotici e rappresentativi).

Obiettivi di apprendimento

- Analizzare, individuare relazioni tra i dati, elaborare procedimenti di soluzione.
- Organizzare in successione logica le operazioni di un problema e verificarle.
- Tradurre le informazioni e le indicazioni del linguaggio comune in un linguaggio matematico utilizzandone correttamente simboli e termini.
- Confrontare criticamente le strategie risolutive.
- Comunicare con un linguaggio spontaneo sempre più chiaro e preciso.

Prerequisiti

Non è richiesto alcun requisito particolare diverso dai traguardi previsti al termine del ciclo della scuola primaria italiana.

Contenuti

- Il testo del problema: analisi
- Dati relazionali e assoluti
- Linguaggio naturale e matematico
- Avvio alle equazioni

Descrizione del percorso

Dati relazionali: difficoltà

In una situazione problematica, un dato assoluto è generalmente ben identificato dai bambini anche perché sono soliti incontrarli nella maggior parte dei problemi che usualmente vengono assegnati nelle classi: il perimetro misura tot, le caramelle sono tot ecc. Un dato relazionale invece, sfugge spesso alla loro attenzione proprio perché non fornisce una informazione numerica anzi, questa è spesso espressa a parole e non si incontra spesso.

I problemi cosiddetti “risolubili con il metodo grafico” o con i segmenti, pongono l’accento sulla rappresentazione grafica mentre la difficoltà, secondo la mia esperienza, è a monte ovvero nella identificazione, comprensione, appropriazione delle informazioni di tipo relazionale.

Consideriamo un problema classico di questo gruppo:

Un signore regala alla figlia Lucia il doppio di quanto dà al figlio Marco. In tutto regala 48 monete d’oro. Quanto riceve ognuno dei due figli?

La situazione contiene un dato assoluto (48 monete d’oro) e un dato relazionale: Lucia riceve il doppio di Marco.

Le incognite da trovare sono due e rappresentano un numero di monete. Nella maggior parte dei testi italiani per la risoluzione viene usata la rappresentazione tipica del metodo grafico che “trasforma” numeri in segmenti.

Si prende casualmente un segmento che rappresenta il numero delle monete di Marco e poi si rappresenta con un segmento “opportuno” il numero delle monete di Lucia; in questo caso la

quantità di monete di Lucia sarà identificata da un segmento lungo il doppio del precedente come si vede nell'immagine (Fig. 1)

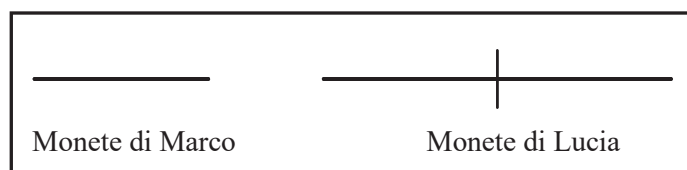


Fig.1 – Le monete di Marco e quelle di Lucia

A questo viene associata un'altra immagine che lega il dato assoluto con le informazioni precedenti ovvero che insieme hanno 48 monete (Fig. 2):

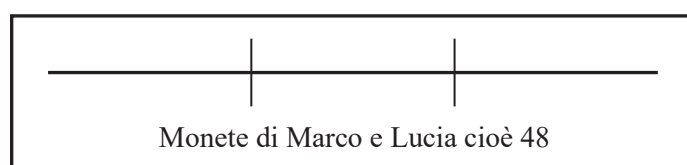


Fig.2 – Le monete di Marco e Lucia

Riflettiamo sulle difficoltà presentate da questo tipo di procedimento:

- Il segmento che è identificato da una lunghezza, fra l'altro arbitraria, sta a rappresentare un numero incognito di monete, in ogni caso una quantità finita. Questo tipo di rappresentazione grafica che vorrebbe essere concreta, risulta in realtà un forte passaggio astratto; a mio avviso, l'alunno non riesce ad identificare nel segmento una quantità da determinare anzi, spesso questa quantità viene identificata erroneamente con la lunghezza del segmento (in centimetri o in lati di quadretto del quaderno) rendendo un'incognita un dato stabilito e quindi fuorviante.
- Occorre riuscire a stabilire una connessione fra il dato assoluto e le rappresentazioni grafiche. Di nuovo un passaggio alla rappresentazione grafica che però nasconde, in questo caso, un'operazione di somma e che deve essere rappresentata con un segmento ottenuto dalla somma dei precedenti.
- Alla rappresentazione con i segmenti spesso non si affianca una scrittura simbolica che traduca il linguaggio naturale e quindi la comprensione del testo risulta totalmente slegata perché operazioni come doppio triplo ecc. non sono visualizzate in simboli matematici.

Linguaggio naturale e simbolico

Il dato relazionale dell'esempio precedente è molto semplice (il doppio) e riporta ad una operazione nota e ben conosciuta agli alunni, ma cosa succede quando la relazione è più complessa?

Partiamo da alcuni esempi di relazioni presenti in problemi riscritti sulla falsa riga di quelli che si ritrovano in testi in uso nella scuola italiana non solo secondaria di primo grado ma addirittura anche alla primaria.

Situazione 1: in una classe i maschi sono 3 in più delle femmine

Situazione 2: una scatola contiene cioccolatini al latte e fondenti. Il numero di quelli al latte supera di 4 quello dei fondenti.

Situazione 3: l'età di Marco supera di 3 anni il triplo di quella di Luca.

Nella situazione 1 viene solitamente fornita questa modalità di rappresentazione (Fig. 3)

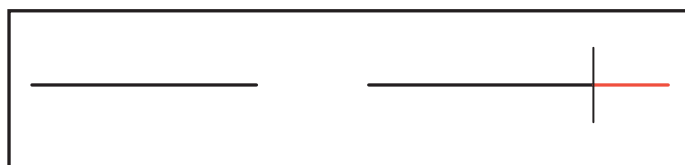


Fig.3 – Presentazione della situazione 1

Dove il segmentino in rosso sta ad indicare quei 3 maschi in più delle femmine la cui quantità è invece identificata dal segmento nero. L'uso del segmento per la rappresentazione è, in questo caso, ancora più fuorviante; ad una lunghezza non conosciuta e scelta arbitrariamente per il primo segmento, si associa un altro "segmentino" altrettanto arbitrario che rappresenta un numero dato.

La situazione 2 contiene un termine su cui è bene soffermarsi a riflettere che è "supera". Per i ragazzi si riferisce esclusivamente alla relazione d'ordine e quindi viene interpretato come sinonimo di "maggiore"; in pratica dire 5 supera 3 è come dire $5 > 3$. In questo caso invece bisogna puntualizzare che il "supera di" non è "supera" e pertanto non porta ad una disuguaglianza ma proprio ad una uguaglianza. Ecco che diventa fondamentale l'uso della scrittura simbolica che ancora prima della rappresentazione grafica deve servire a appropriarsi del testo. Se indichiamo con L il numero dei cioccolatini al latte e con F quello dei fondenti proviamo a "tradurre" la frase in questione aiutando i ragazzi con domande guida.

- *Chi è il soggetto?* Il numero dei cioccolatini al latte.
- *Cosa significa che supera di 4?* Che se conto i fondenti, quelli al latte sono 4 di più.
- *Come possiamo scrivere allora la stessa frase in un altro modo?* I cioccolatini al latte sono 4 in più di quelli fondenti
- *Qual è la differenza tra le due scritture simboliche? Sono entrambe corrette o ce n'è una errata?* $L = F + 4$ oppure $L > F$? Dalla discussione dovrà emergere che vanno bene entrambe ma la prima ci dice esattamente "di quanto è maggiore", mentre la seconda no.

La situazione 3 porta ad una ulteriore riflessione:

Supera di quanto? Di 3

Supera che cosa? Il triplo dell'età di Luca.

Riscriviamo in italiano e poi convertiamo in simboli: Marco ha 3 anni in più del triplo di quelli di Luca oppure Marco ha il triplo degli anni di Luca aumentato di 3, quindi $M = 3 \times L + 3$.

Prima di risolvere problemi, dando per scontato la comprensione del testo, ritengo sia necessario lavorare attentamente sul linguaggio naturale e sulla conversione in simboli matematici. Anche la rappresentazione deve essere sequenziale, o almeno contemporanea, agli altri due aspetti e non certamente precederla né avvenire senza che gli alunni si siano appropriati del testo in modo completo. La risoluzione del problema è di secondaria importanza e non avverrà se prima

non si sono comprese queste dinamiche relazionali nel testo.

In classe ci siamo soffermati a lungo solo sull'aspetto linguistico/simbolico, realizzando molte attività di traduzione da linguaggio naturale a matematico e viceversa, esattamente come suggerito dal Progetto ArAl: "privilegiare la comprensione dei significati delle scritture algebriche attraverso attività di traduzione dal linguaggio naturale a quello algebrico e viceversa, evitando quindi che gli allievi pervengano ad una manipolazione non consapevole dei simboli". www.progettoaral.it.

Dal linguaggio alla rappresentazione: il "mucchio"

Molti ragazzi non riescono a comprendere la rappresentazione grafica con i segmenti nemmeno dopo aver imparato a convertire il testo in simboli. Ho cercato di ideare un metodo diverso che permettesse di superare gli ostacoli dovuti alle difficoltà, di cui ho parlato nei paragrafi precedenti, ed il suggerimento è venuto da una rilettura dei problemi del papiro di Rhind: www.dm.uniba.it/ipertesto/egiziani/rhind. http://online.scuola.zanichelli.it/bergamini-files/Biennio/Esplorazioni/Esp_07_papiro.pdf

Un gruppo di questi viene indicato con il nome "problemi del mucchio": in pratica sono problemi risolvibili con equazioni di primo grado, dove il "mucchio" è proprio la quantità incognita. Questa parola ha attirato la mia attenzione: un "mucchio" è qualcosa che si vede, si percepisce, si osserva senza sapere esattamente da quanti elementi è composto. Io l'ho visto come un sacchetto che contiene oggetti: non so quanti siano ma so che all'interno ci sono, li sento, li tocco, li percepisco. Dunque perché non presentare la quantità incognita come un "mucchio"?

Ho portato in classe dei bicchieri di plastica e un sacchetto di ceci ed ho presentato questa situazione specificando chiaramente che all'interno di ogni bicchiere c'era la stessa quantità di ceci. Il bicchiere è il nostro "mucchio"; a differenza del segmento, che non si percepisce come un contenitore di elementi, ma solo come "un pezzo di retta che contiene centimetri", si vede il contenitore e si sente la presenza dei ceci, che possono rappresentare di volta in volta altri elementi ecc. Ho chiesto: "descrivi a parole la situazione che vedi" (Fig. 4).



Fig.4 – Problema del "mucchio": caso 1

La risposta è stata ovvia, ma deludente per me: Anna ha due bicchieri e Bea ne ha uno! Completamente assente l'aspetto relazionale. Chiedo:

"Posso sapere quanti ceci ha Anna?"

"No perché non li vedo"

“Anna ne ha meno di Bea?”

“No prof, ne ha di più.” “Anna ne ha uno in più”

È proprio qui uno dei nodi concettuali: questo “uno” è un mucchio o un elemento del mucchio?

Qualcuno dice

“Non lo vede prof che Anna ne ha il doppio?”

Finalmente appare l’aspetto relazionale fra le due quantità. Allora chiedo di tradurre in linguaggio naturale e in simboli: Anna ha il doppio dei ceci di Bea ovvero $A = 2 \times B$.

Riflettiamo su questa informazione; stimolando opportunamente la discussione emerge forte ora la relazione: “se so quanti ne ha Anna trovo quanti ne ha Bea, ma anche il contrario perché una dipende dall’altra”.

Il mucchio-bicchiere contenente ceci permette di superare un altro ostacolo. Ripensando all’affermazione “Anna ne ha uno in più” propongo questa situazione (Fig. 5):

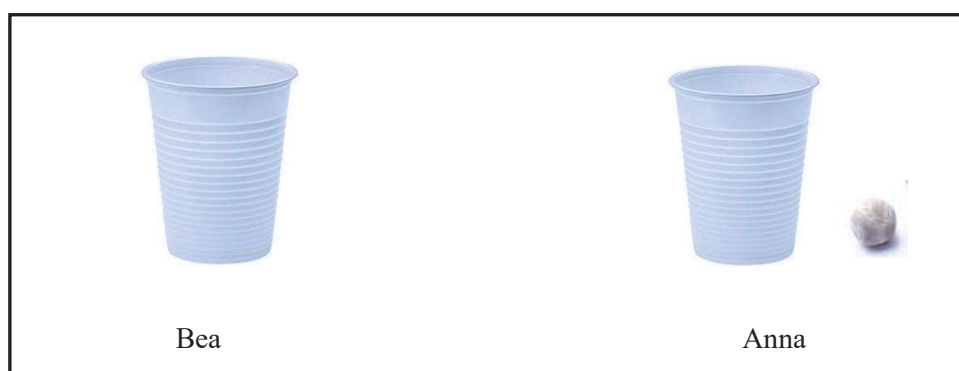


Fig.5 – Problema del “mucchio”: caso 2

e chiedo di descrivere a parole e con i simboli i due casi facendo emergere le differenze. Le risposte sono:

- Per il caso 1 Anna ha un bicchiere in più - Anna ha il doppio
- Per il caso2 Anna ha un cece in più – Anna supera Bea di 1 cece.

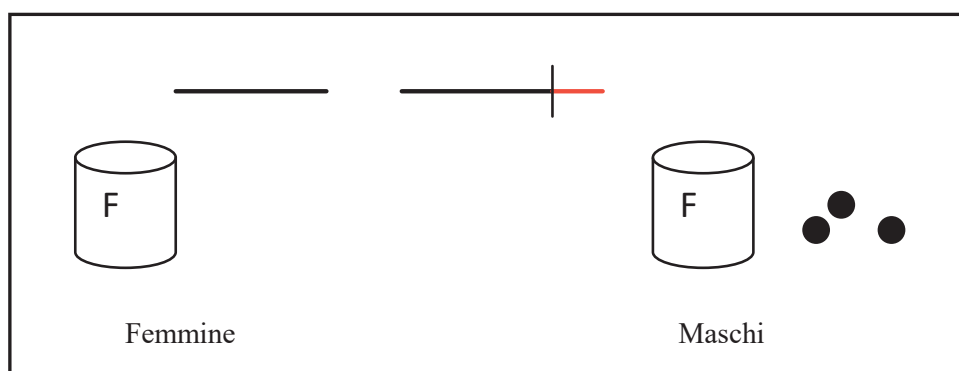


Fig.6 – Maschi e Femmine

L'affermazione precedente "Anna ne ha uno in più" sembra essere troppo generica e viene scartata perché non sembra riferita ad un caso in particolare e viene ritenuta non chiara.

Confrontiamo la rappresentazione con i segmenti del caso iniziale (i maschi sono tre più delle femmine) con la rappresentazione di ceci e bicchieri (Fig. 6)

Il segmento non si "vede" come contenitore di oggetti e il segmento piccolo in rosso non si riesce a capire che cosa rappresenti. Nel caso dei bicchieri è tutto più concreto: l'incognita è rappresentata dal numero dei ceci contenuti in un bicchiere, mentre l'elemento è il cece stesso.

In simboli si ha $M = F + 3$.

Algebricamente questa rappresentazione visiva è molto forte e permette un avvio al calcolo letterale; basta osservare, per esempio, il caso seguente (Fig. 7) con la relativa conversione in x , $x + x + x = 3x$, $x + 2$.

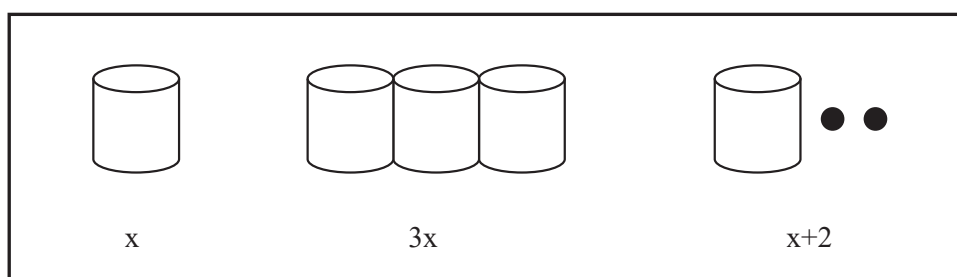


Fig.7 – Passaggio al calcolo algebrico

Su queste rappresentazioni possono essere proposte diverse situazioni da esplicitare.

Dalla rappresentazione alla “macchinetta”

Questo lavoro di analisi del testo, con particolare riferimento agli aspetti relazionali, e di relativa rappresentazione in simboli e grafica, trova una ulteriore espansione con l'utilizzo della “macchinetta”. Con questo termine i miei alunni intendono il diagramma che, nella scuola primaria, viene spesso affiancato alla risoluzione dei problemi con espressioni. Vediamo quale opportunità offre questo strumento.

Riferiamoci ancora all'esempio precedente dei maschi e femmine della classe. Il diagramma è il seguente (Fig. 8): $F + 3 = M$.

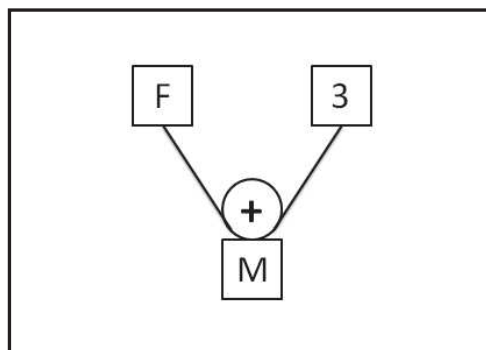


Fig.8 – Diagramma di una “macchinetta”

Percorrendo “alla rovescia” il diagramma, ovvero, come dicono i ragazzi, cambiando il soggetto della frase, riescono a ricavare velocemente le altre relazioni: $F = M - 3$ e $3 = M - F$.

Propongo in classe altri diagrammi sempre più articolati e invito gli alunni a convertire le relazioni da italiano, in simboli matematici, in una rappresentazione grafica e a ricavare altri termini.

Esempio (Fig. 9)

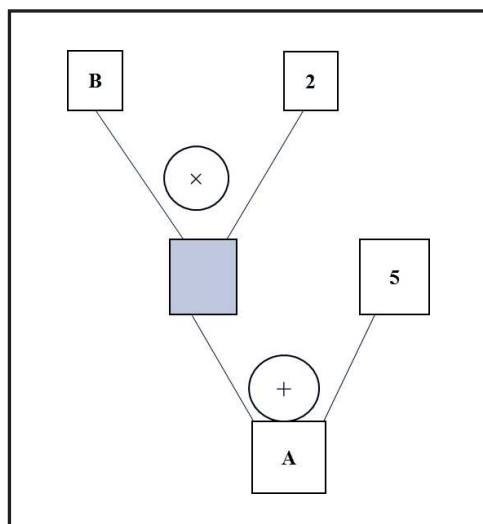


Fig.9 – Diagramma di una “macchinetta” complessa

Italiano: Antonella ha il doppio delle caramelle di Barbara aumentato di 5 oppure, più sinteticamente, A supera di 5 il doppio di B e ancora, A ha 5 in più del doppio di B.

Simboli: $A = 2 \times B + 5$

Rappresentazione grafica (Fig. 10):

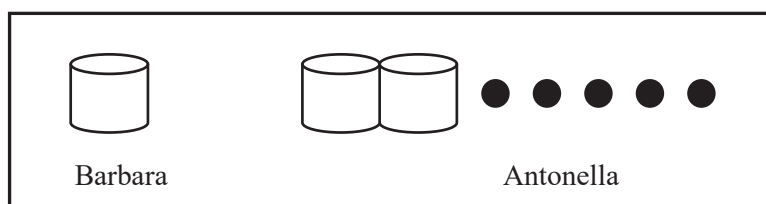


Fig.10 – Rappresentazione grafica del quesito

Ricaviamo B, cambiando soggetto, e otteniamo $B = (A-5):2$. Il risultato $A-5$ della parentesi si trova nella casella grigia. Questo tipo di attività aiuta, pertanto, a dare senso all'uso delle parentesi e delle precedenze.

L'uguaglianza è una equazione che in questo caso è rappresentata in un diagramma. Gli alunni si abituano da subito a procedere all'inverso applicando in maniera naturale e spontanea, supportati dalla rappresentazione grafica con bicchieri e ceci, i principi di equivalenza. Questo modo di procedere sarà di grande aiuto ai ragazzi nella manipolazione delle formule geometriche ed eviterà di parlare di “formule inverse dell'area”: non esiste una formula inversa in assoluto come non ne esiste una diretta in assoluto, ma esistono relazioni inverse una

dell'altra.

Da un registro all'altro fino alla risoluzione di problemi con equazione

In classe continuiamo a lavorare su vari registri comunicativi con esercizi e attività da svolgere in gruppi. Ogni gruppo successivamente pone agli altri alcuni quesiti e spiega come ha affrontato i propri. La condivisione crea un clima positivo che permette di affrontare anche altre tematiche, di cui parlerò in seguito.

Dopo questa fase di lavoro sul testo si passa alla risoluzione vera e propria del problema che ormai si presenta molto facilitata anche nel caso di situazioni complesse.

Facciamo un esempio:

In una società sportiva con 65 atleti quelli che fanno tennis sono tre in più di quelli che giocano a basket mentre quelli della pallavolo sono due più del doppio di quelli del basket. Trova il numero di atleti che pratica ciascun sport.

Fase 1 - identificazione del "mucchio": il numero dei giocatori di basket

Fase 2 - traduzione in simboli:

B = numero di chi fa basket,

P = numero di chi fa pallavolo,

T = numero di chi fa tennis da cui

$$T = B + 3 \text{ e } P = 2 \times B + 2$$

Fase 3 - rappresentazione grafica (Fig. 11):

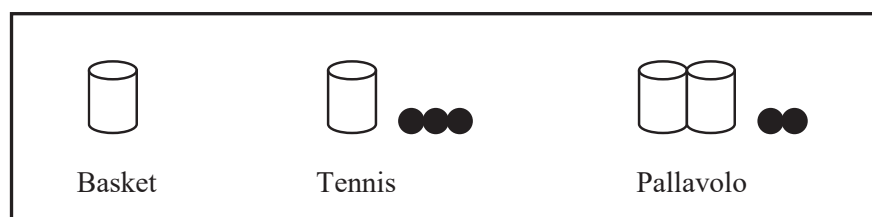


Fig.11 – Rappresentazione grafica del quesito atleti e sport

In un secondo tempo dal barattolo-mucchio si può passare, con facilità, ad una scrittura letterale così: m , $m + 3$, $2 \times m + 2$ dove m sta per il mucchio.

Leghiamo ora il dato assoluto con la rappresentazione grafica (Fig. 12):

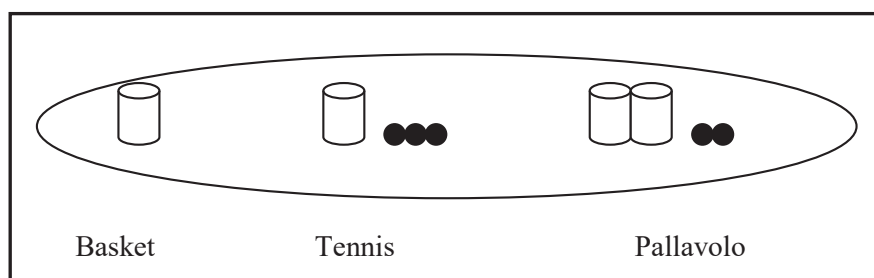


Fig.12 – Rappresentazione grafica del dato assoluto del quesito atleti e sport

Siccome tutto insieme è 65 come possiamo trovare solo il contenuto dei barattoli?

Basterà eseguire $65 - 5 = 60$. Poiché 60 è rappresentato da 4 mucchi uguali basta eseguire $60:4$ e troveremo il numero del mucchio ovvero la nostra incognita che rappresenta il numero di coloro che fanno basket cioè 15.

A questo punto, dalla rappresentazione, si ricava che $T = 15 + 3 = 18$ e che $P = 15 \times 2 + 2 = 32$.

Trasformiamo quest'ultimo disegno in una vera e propria equazione:

$4m + 5 = 65$, che con la macchinetta (Fig. 13), diventa:

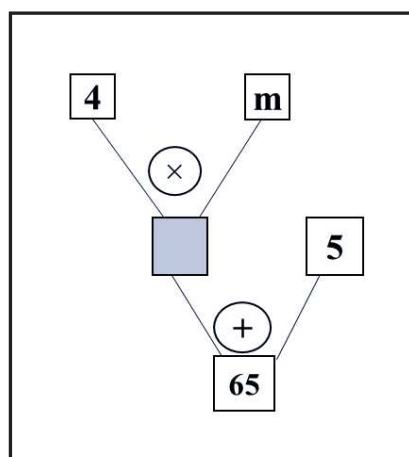


Fig.13 – Rappresentazione grafica della “macchinetta” del problema aggiornata

da cui procedendo al contrario si ha $(65-5):4 = m$.

Punti di Forza

I punti di forza sono diversi e significativi. Eccone alcuni:

- La visualizzazione concreta di situazioni problematiche supera la visione stereotipata e astratta dei segmenti e diventa uno stimolo di ricerca personale, da discutere successivamente con i compagni. Quindi il percorso favorisce sia il *cooperative learning* che la centralità dello studente nel suo apprendimento.
- La molteplicità dei registri utilizzati favorisce la didattica inclusiva, permettendo a ciascuno di conseguire un livello di comprensione positiva di uno o più di essi.
- L'approccio algebrico mette solide basi agli sviluppi successivi, evitando di percepire l'algebra come una serie di regole, dove “oltre ai numeri, a complicare la vita ci sono le lettere” (come ho più volte sentito ripetere a studenti della scuola secondaria di secondo grado).
- La strategia risolutiva del problema diventa semplice, in quanto il percorso permette di superare il vero ostacolo che è quello della comprensione del testo.

Punti di Debolezza

Se faccio l'avvocato del diavolo sono facili da identificare: il tempo e il "programma". Sappiamo bene che il programma nella scuola italiana non esiste più, ma come un fantasma ricompare spesso e molti docenti si lamentano di non avere tempo per svolgerlo tutto. Bisogna avere una visione diversa che sia in linea con le *Indicazioni Nazionali* e con una scuola che si basa sull'apprendimento e non sull'insegnamento; in tal caso non ci sono punti di debolezza, anzi! Il percorso richiede tempi distesi, come è giusto che sia e può protrarsi anche per parecchi mesi. Emma Castelnuovo (1993; 2003; 2007), nell'ambito dell'Officina Matematica, più volte ha ripetuto "lasciate ai ragazzi il tempo di perdere tempo". Bisogna crederci e comprendere che se si procede in questa direzione si raggiungono competenze, che negli anni successivi saranno già consolidate e tali dunque da aver permesso il raggiungimento dei traguardi, che sono i veri obiettivi del nostro lavoro.

Risultati positivi dal punto di vista cognitivo

La classe ha risposto molto positivamente, infatti nessun alunno è stato reticente di fronte alle consegne e tutti hanno preso parte al lavoro in prima persona senza delegare ad altri.

Risultati positivi dal punto di vista motivazionale

Il percorso, che si è arricchito con altre attività pre-algebriche, ha coinvolto così tanto i ragazzi che si sono avute "espansioni" interessanti. Abbiamo lavorato, ad esempio, sulla scoperta di regolarità in sequenze di vario tipo e per ciascuna è stata una vera e propria gara, non solo identificare la regola, ma soprattutto convertirla in linguaggio algebrico, oltre che nel linguaggio naturale. Tutto il lavoro fatto è stato presentato con successo all'esposizione di matematica al termine dell'anno scolastico. Inoltre, abbiamo iniziato ad usare bilance per stabilire e cercare relazioni fra più soggetti.

Difficoltà cognitive e organizzative e superamento delle stesse

Le difficoltà cognitive, che nell'analisi a priori avevo previsto, in realtà, non sono state rilevanti. Il mio timore era riferito al passaggio dal linguaggio naturale a quello simbolico/rappresentativo, che invece è avvenuto spontaneamente per alcuni ragazzi, che nella classe si distinguono per le loro capacità. Fortunatamente gli stessi, anche grazie ad un continuo stimolo a lavorare in gruppo e a discutere collettivamente le proposte, sono un buon traino per gli altri e i loro spunti non cadono quasi mai nel vuoto anzi vengono accettati in modo stimolante. L'apprendimento tra pari, la capacità che hanno raggiunto nel lavorare in gruppi e nel discutere collettivamente sono state, dunque, le vere risorse di tutto il percorso.

Documentazione fotografica e spunti per la verifica

Seguono due testimonianze del lavoro in classe degli alunni (Figg. 14 e 15):

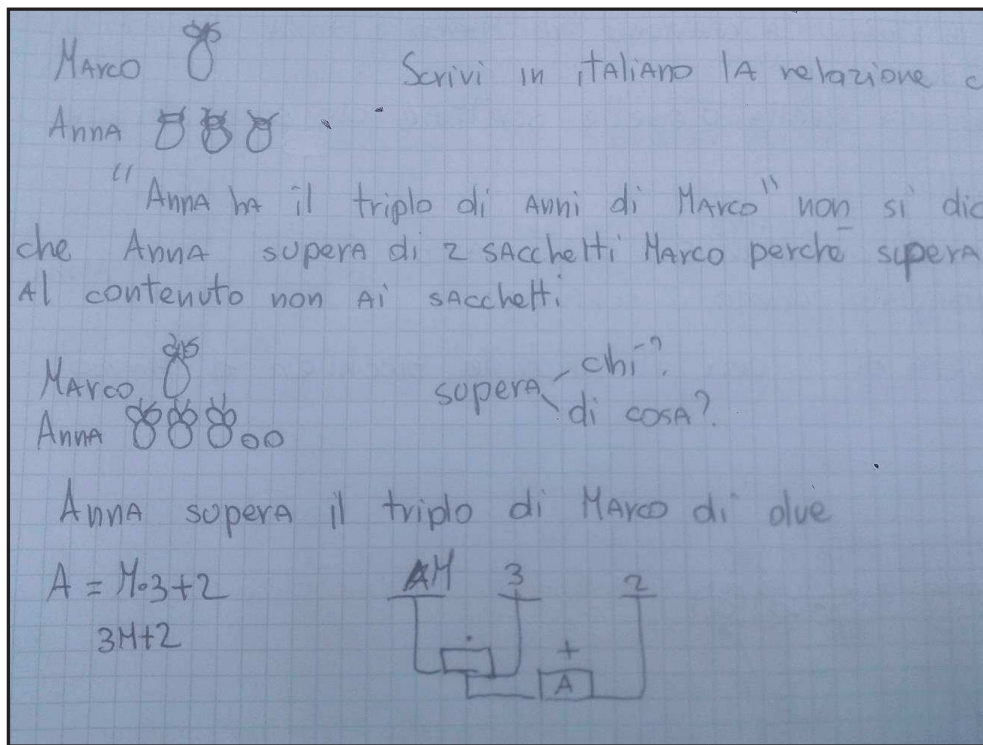


Fig.14 – Prima testimonianza del lavoro in classe di un alunno

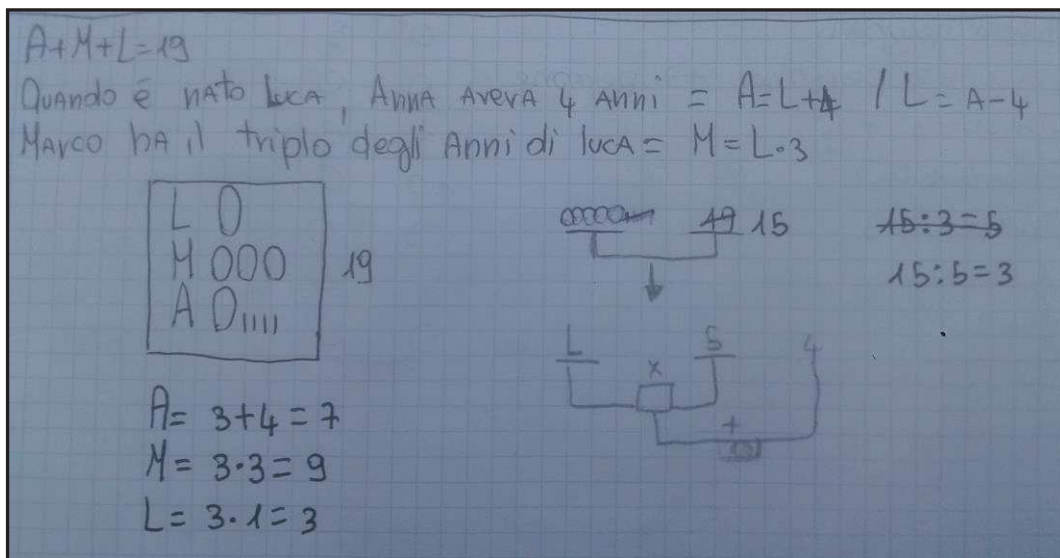


Fig.15 – Seconda testimonianza del lavoro in classe di un alunno

Nella cartella dedicata a questo articolo il lettore troverà ulteriori documentazioni fotografiche delle attività in classe ed alcuni spunti per la prova di verifica finale.

Conclusione

L'esperienza presentata è frutto di diversi anni di riflessione, studio, prove e tentativi. Credo che un docente debba sempre porsi la domanda:

- Perché questo argomento o questo concetto non è passato?
- Perché il sapere non è diventato apprendimento?
- Cosa posso fare per superare questa difficoltà?

Apprendere non è un processo di memorizzazione, ma è acquisire atteggiamenti e comportamenti diversi: le informazioni devono essere rielaborate, direi "rimasticate", dall'alunno in autonomia e nel rapporto tra pari. Per fare questo è necessario che il docente proponga attività stimolanti, in grado di mettere l'alunno a proprio agio in un atteggiamento costruttivo, collaborativo, propositivo.

Quindi prima di tutto ho cercato di identificare quale potesse essere l'ostacolo di quella tipologia di problemi e in seguito di ideare metodi e strategie di superamento; ci sono state varie fasi che hanno visto le mie riflessioni unirsi e connettersi con le proposte dei ragazzi. Ne è uscito questo percorso che, di volta in volta, continua ad ampliarsi e ad arricchirsi portando alla luce *misconcetti*, ma anche fornendo spunti e idee interessanti, che nascono dalla discussione diretta con gli alunni e che portano al loro superamento.

Per me è stata una grande soddisfazione vedere come i ragazzi siano riusciti, non tanto a risolvere i problemi, ma principalmente ad acquisire una competenza nell'uso dei linguaggi, appropriandosi di significati e dei modelli mentali tipici del pensiero algebrico.

L'uso dei segmenti per la risoluzione di questo tipo di problemi, risulta a mio parere e sulla base della mia esperienza, astratta e vuota di significati. A conclusione, quindi, mi sento di ringraziare i miei alunni che nel corso degli anni sono andati decisamente oltre queste sterili rappresentazioni, riuscendo a fornirmi spunti di riflessione determinanti, che, ridiscussi in classe, hanno portato alla stesura di questo percorso, in grado di sviluppare una nuova visione del pensiero algebrico.

Dichiarazione di conflitti di interesse

L'autrice dichiara di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Deposito dei materiali dell'attività

Al seguente link sono depositati eventuali materiali inerenti questo l'articolo. Questi materiali nel tempo potranno essere modificati e arricchiti seguendo l'evoluzione delle idee sottostanti o/e future sperimentazioni svolte dall'autore dell'articolo.

<http://www.edimast.it/J/20160202/02870302CA/>

Bibliografia

- Borasi R., (1984). Che cos'è un problema? Considerazioni sul concetto di problema e sulle sue implicazioni in didattica della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 2, 7, 83-98.
- Castelnuovo E., (1993). *Pentole, ombre, formiche. In viaggio con la matematica*. La Nuova Italia, Firenze.
- Castelnuovo E., Barra M., (2000³). *Matematica nella realtà*, Boringhieri, Torino.
- Castelnuovo E., (2003). *Emmatematica – insegnamento di Emma Castelnuovo*, Edifir Edizioni, Firenze.
- Castelnuovo E., (2007). Lectio magistralis: Insegnare Matematica, Festival della matematica di Roma, 15 marzo 2007, in Emma Castelnuovo- insegnare Matematica (DVD a cura di S. Serafini), 2008, Iacobelli, Roma; reperibile su: <http://www.umi-ciim.it/downloads/storia/testimonianze/LectioMagECast.pdf> oppure su <http://www.mat.uniroma1.it/ricerca/gruppi/education>
- D'Amore B., (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*, Angeli, Milano.
- D'Amore B., (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna.
- D'Amore B., Sandri P., (1993). Il problema nella pratica matematica ed educativa. *L'educatore*. I-X.
- Malara Nicolina A., Fiorini R., Incerti V., (2004). *Percorsi di insegnamento in chiave prealgebrica nella scuola dell'obbligo. Rappresentazione di problemi e di processi, segni e simboli ...*, Pitagora editrice, Bologna.
- Malara Nicolina A., (2012). Il caso dell'algebra. Consolidamenti nella ricerca e mutamenti di prospettiva nell'insegnamento, in Arzarello, F. (a cura di), *Insegnare matematica, 5 oggi. Ricerca didattica, rilevamento degli apprendimenti. Pratiche di classe. Dossier Insegnare*, pp. 52-61.
- Malara Nicolina A., (2004). Formazione degli insegnanti ed avvio al pensiero algebrico, in Malara, N.A. *Altri Percorsi di insegnamento in chiave pre-algebrica: rappresentazione di problemi e di processi, segni simboli e negoziazione dei loro significati*, Pitagora, Bologna, pp. 11-36.
- Navarra G., (2006a). Prassi. In D'Amore B. e Sbaragli S. (Eds), *Atti Incontri con la matematica n.20: La didattica della matematica in aula*, Castel S. Pietro, Pitagora Editrice, Bologna, pp. 165-170.
- Navarra G., (2006b). Il rinnovamento dell'insegnamento dell'area aritmetico-algebrica nella scuola dell'obbligo: il caso del Progetto ArAl. In *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 29 A-B, n. 6. Centro U. Morin, Paderno, pp. 701-712.
- Piochi B., (2010). Laboratorio di matematica nella scuola secondaria di I grado, Fare Matematica con mente e corpo. *L'insegnamento della matematica e delle Scienze integrate*, Vol. 33 (1-A), pp. 47-63.
- Zan R., (2007a). La comprensione del problema scolastico da parte degli allievi: alcune riflessioni, *L'insegnamento della matematica e delle Scienze integrate*, Vol. 30 (6-A-B), pp. 741- 762.
- Zan R., (2007b). *Difficoltà in matematica – Osservare, interpretare, intervenire*, Springer, Milano.
- Vygotsky L.S., (1969). *Pensiero e linguaggio*, Giunti-Barbèra, Firenze.

L'Autrice

**Antonella Castellini**

Istituto Comprensivo 1

Scuola secondaria di primo grado "F.C.Marmocchi"

Viale Garibaldi 30-32 53036 Poggibonsi (SI)

E-mail antocastellini@gmail.com

Italia

Laureata in matematica ha conseguito due master in "Didattica della matematica".

Si occupa da anni di formazione dei docenti.

È autrice per una rivista nazionale di didattica per la scuola primaria.

Ha svolto il ruolo di tutor in vari progetti nazionali del MIUR.

Svolge attività di ricerca-azione anche a livello internazionale nell'ARMT.

Coautrice di diverse pubblicazioni su esperienze didattiche.

Received July 27, 2016; revised August 18, 2016; accepted September 13, 2016; published online September 21, 2016

Open Access This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)



Pitag'ORA PRO NOBIS

Ivan Graziani, Stefano Babini

Abstract. “Pitag'ORA PRO NOBIS” comes out from our desire to deal with Pythagoras and the Pythagorean school. We decided to fulfil this project by realizing a workshop in an exciting and unconventional way. We took into account the “Indicazioni Nazionali 2012” with reference respectively to the Pre-school and Primary School curriculum, and to the secondary high school “Assi culturali”.

We decided to treat some particularities of the so-called “arithmo-geometry”, introduced by the Pythagoreans, with the study of algebraic numbers and their characteristics, also figured. We then moved on to some examples of demonstrations of the famous theorem, then started to analyze some peculiarities and regularities contained in Pythagorean triples. For these activities we tried to address these nodes in a different and funny way, alternating, at all levels, the mathematical rigor to moments of imagination and games.

We tried to make a mathematician like Pythagoras nicer. In fact, He's well-know for his most famous theorem but at the same time he's not loved by most students. For this reason, this experience involved first by the pre-school including children of 5 years, and then all classes of the primary school, then the secondary school and finally the secondary high school.

Key words. Verticality, numbers, geometry, Pythagoras.

Sommario. “Pitag'ORA PRO NOBIS” nasce dal nostro desiderio di affrontare Pitagora e la scuola pitagorica in modo laboratoriale e non convenzionale, ma soprattutto divertente. Naturalmente anche in verticale e tenendo conto delle Indicazioni Nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione del 2012 e, per quanto concerne il segmento di istruzione superiore, dei relativi Assi Culturali e Indicazioni.

Abbiamo pensato di affrontare alcune particolarità della cosiddetta “aritmo-geometria”, introdotta dai pitagorici, con lo studio dei numeri figurati e delle loro caratteristiche, anche algebriche. Siamo quindi passati ad esempi di dimostrazioni del famoso teorema, per poi giungere ad analizzare alcune particolarità e regolarità contenute nelle terne pitagoriche.

Anche per queste attività abbiamo cercato di affrontare tali nodi in modo diverso e divertente, alternando a tutti i livelli la rigore matematica alla fantasia e al gioco.

Si è cercato così di rendere maggiormente simpatico un matematico troppo spesso presentato solo per il suo teorema più famoso e per questo non amato dalla maggior parte degli studenti.

Per tale motivo, questa esperienza ha visto coinvolte per prima la scuola dell'infanzia, coi bambini di 5 anni, e successivamente tutte le classi della scuola primaria, quelle della scuola secondaria di I grado e, infine, quelle della secondaria di II grado.

Parole chiave. Verticalità, numeri geometria, Pitagora.

Introduzione

Pitagora viene spesso ricordato a scuola solo per il suo famoso teorema. Inoltre, per come viene presentato, viene “odiato” forse più della stessa matematica ... (Come dice anche Umberto Eco nelle sue “Interviste impossibili”, edite da Bompiani nel 1975: “... *mi chiedo se per molti altri che ci ascoltano il suo nome non evochi soltanto memorie ingrate: la tavola pitagorica, il teorema di Pitagora ...*”).

In molti casi ci sono eccessi di “pitagorismi” concentrati nel secondo anno di scuola secondaria di primo grado con ripetizioni di problemi tutti uguali e spesso astratti rispetto alla realtà. Insegnando in due ordini di scuola differenti, abbiamo pensato di affrontare Pitagora a modo nostro, in verticale dalla scuola dell’infanzia alla secondaria di secondo grado, con attività legate non solo al famoso teorema, ma anche ad altre applicazioni note ai pitagorici.

Per tale motivo questo è diventato un Pitagora per noi, ossia pro nobis.

Anche questa è stata un’attività collegata al progetto “*Happy verticality in matematica*”, nato due anni fa per coinvolgere studenti e insegnanti in verticale su alcuni nodi concettuali affrontati in modo divertente e che ha portato anche alla formazione di un gruppo di ricerca in didattica della matematica denominato *Divertical-math*.

Abbiamo quindi presentato Pitagora fin dalla scuola dell’infanzia, giocando con i numeri figurati, triangolari e quadrati, insieme ai bambini. Lo stesso argomento è stato quindi proposto, approfondendolo, ai bambini di tutte le classi della primaria, agli studenti della secondaria di primo grado e a quelli della secondaria di secondo grado.

Abbiamo, inoltre, giocato su alcune caratteristiche particolari della tavola pitagorica e su qualche collegamento particolare tra il teorema di Pitagora, le terne pitagoriche e altre applicazioni matematiche.

Destinatari e tempi

L’attività è stata svolta durante l’anno scolastico 2015/2016 presso le scuole dell’Infanzia, Primaria e Secondaria di primo grado dell’Istituto Comprensivo di Santa Sofia (FC) di Santa Sofia e presso alcune classi del Liceo Economico Sociale “Rambaldi – Valeriani – A. Da Imola” di Imola (BO).

Gli incontri nelle classi della scuola dell’Infanzia e in quelle della Primaria sono stati due di due ore ciascuna insieme all’insegnante della classe. Nelle Scuole secondarie di primo e secondo grado sono state effettuate cinque lezioni di due ore ciascuna.

Attività e sperimentazione

I numeri figurati

Alla Scuola dell’Infanzia abbiamo iniziato, insieme alla maestra, a chiedere ai bambini di 5 anni cosa fosse secondo loro la matematica (D’Amore, 2001; Lombardo Radice, 2004) e che cosa facesse un matematico, ottenendo varie risposte alcune delle quali un po’ spiazzanti, tipo “*il matematico lavora in banca*” o la “*matematica serve per scrivere*”.

Dopo aver chiarito qualche dubbio dei bambini, siamo passati a raccontare un po’ la storia di Pitagora e della sua Scuola, mostrando anche l’immagine del “bel” signore che faceva il

“matematico”.

Abbiamo quindi chiesto loro quali numeri e quali figure geometriche conoscevano, aiutandoci anche con le forme che ci ha dato la maestra.

Dopo abbiamo affrontato, come attività-gioco, i numeri figurati, utilizzando della pasta alimentare colorata (i “ditalini”) per costruire numeri triangolari e quadrati anche con l’aiuto delle forme triangolari e quadrate (Fig. 1).



Fig. 1 – bambini all’opera nella costruzione di figure con la pasta colorata



Fig. 2 – i numeri figurati

I bambini hanno realizzato con relativa facilità i diversi numeri fino a 10 per i “triangolari” e fino a 9 per quelli “quadrati”. Alcuni di loro hanno provato a spingersi oltre, soprattutto con i numeri triangolari (Fig. 2).

I bambini hanno apprezzato questo loro primo incontro con i numeri di Pitagora.

Hanno poi incollato la pasta su fogli bianchi con la colla vinilica, tanto cara al “Mucciaccia di Art Attack” e alla fine dell’attività hanno incollato i loro lavori più significativi su un cartellone, con la maestra, per ricordare la giornata dedicata ai numeri figurati (Fig. 3).

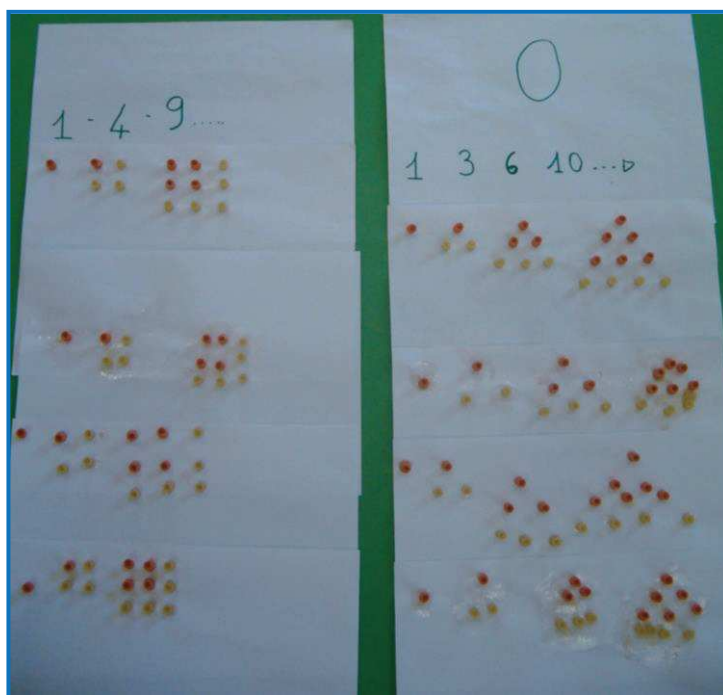


Fig. 3 – Il cartellone

Per il livello di scuola è stato un approccio più che soddisfacente.

Abbiamo poi ripreso i numeri figurati nelle classi prime e seconde della scuola primaria facendo realizzare questi particolari numeri sul foglio di carta con la penna (Simonetti, 1995).

Nella prima parte però abbiamo ripercorso alcuni aspetti della storia della scuola pitagorica, soffermandoci brevemente sul simbolo della Scuola e sul celebre motto “tutto è numero”.

Abbiamo poi introdotto l’aritmo geometria e i numeri figurati, partendo da quelli triangolari, soffermandoci sulle particolarità che osservavano i bambini e provando a generalizzare alla lavagna (Fig. 4).

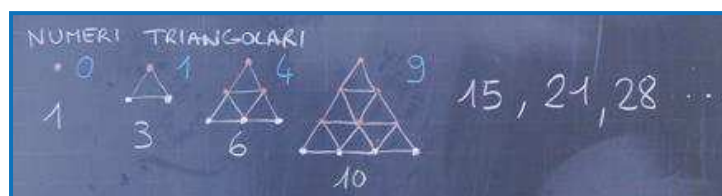


Fig. 4 – Numeri triangolari

Siamo poi passati ai numeri quadrati e abbiamo chiesto ai bambini cosa notassero di particolare (Fig. 5).

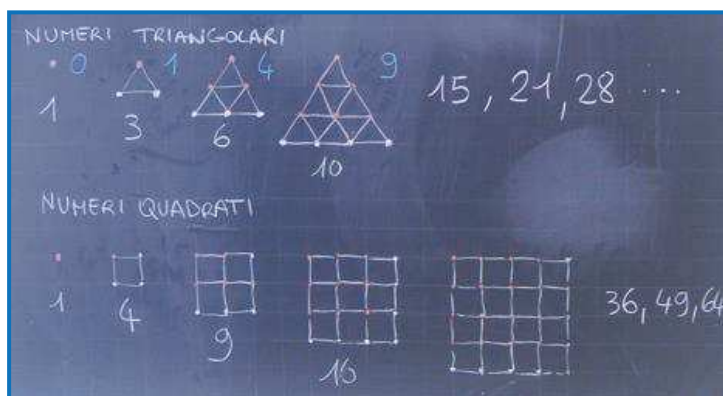


Figura 5 – Numeri quadrati

Si sono alternate osservazioni particolarmente acute sulle similitudini tra i due sistemi e altre un po' più bizzarre, legate all'età dei "nostri scolari", come quella di Nicola che ha detto che "i numeri triangolari sono il tetto di quelli quadrati".

Irene e Andrea hanno notato che "il numero di triangolini realizzati nei numeri triangolari è uguale ai numeri quadrati".

Riccardo e Gianluca hanno notato che "il numero di quadratini dei numeri quadrati è uguale al numero quadrato precedente".

Anche nella classe terza siamo partiti dalla storia dei pitagorici (Agostino, 2002) e poi siamo passati ai numeri figurati, però abbiamo insistito maggiormente sull'abilità di argomentare relativamente alle regolarità e alle caratteristiche particolari di questi numeri.

Ilaria ha notato le differenze tra i numeri e li ha collegati indicando quanto doveva "aggiungere ai numeri per ottenere il numero successivo" (Fig. 6).

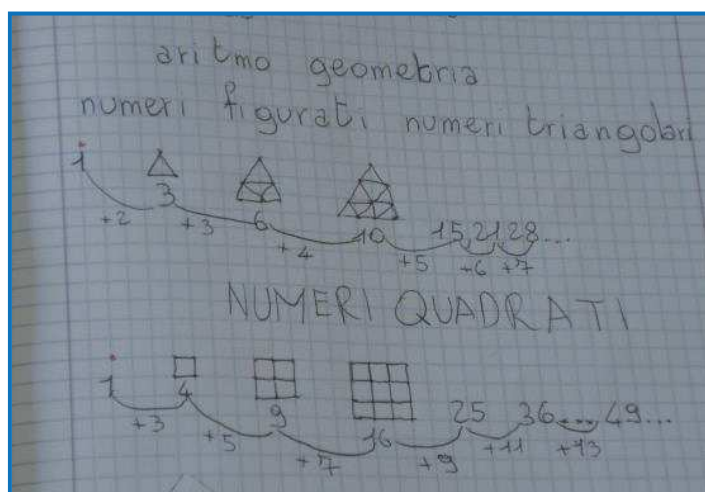


Figura 6 – Regola generatrice dei numeri triangolari e quadrati

Matteo ha notato che per i numeri triangolari si può fare questa sequenza:

$$“1 + 0 = 1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \dots \text{e così via}”.$$

Sofia è stata particolarmente brava ed è arrivata con i numeri triangolari fino a 120 (15° numero triangolare). Tutti i bambini sono arrivati a fare la sequenza dei numeri quadrati fino a 100 (10° numero quadrato).

Martina ha osservato che i numeri quadrati sono il prodotto di “un numero per se stesso”.

Ilaria ha detto che “il numero dei triangolini è uguale ai numeri quadrati” (Fig. 7).

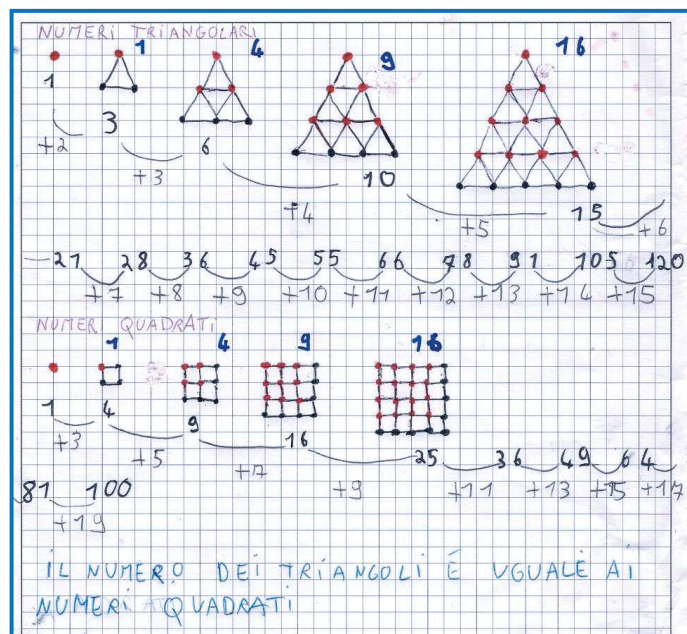


Fig. 7 – Relazione tra i numeri triangolari e i quadrati

In quarta e quinta primaria, avendo i bambini già affrontato le potenze e le superfici (Lang, 1991), abbiamo potuto alzare un po’ il tiro sia nella storia che nelle attività.

La nostra storia del simbolo della scuola è potuta partire dal pentagono e dalle sue diagonali. Il motto “*tutto è numero*” è stato affrontato con bambini che conoscevano già le frazioni e le potenze e quindi abbiamo parlato anche dei “problemi” determinati dalla radice di 2 e di Ippaso da Metaponto.

Nell’attività sui numeri figurati i bambini hanno fatto osservazioni più consapevoli sulle similitudini tra numeri triangolari e quadrati, seppure in modi diversi (Fig. 8a e Fig. 8b).

Inoltre, alcuni di loro hanno subito notato la particolarità dei numeri quadrati di essere dei quadrati perfetti e quindi, come ha detto Alessia:

“*Possiamo prevedere qualsiasi numero quadrato elevando alla seconda il numero dell’ordine*”, in pratica “se voglio l’ottavo numero, basta fare $8^2 = 64$ ”.

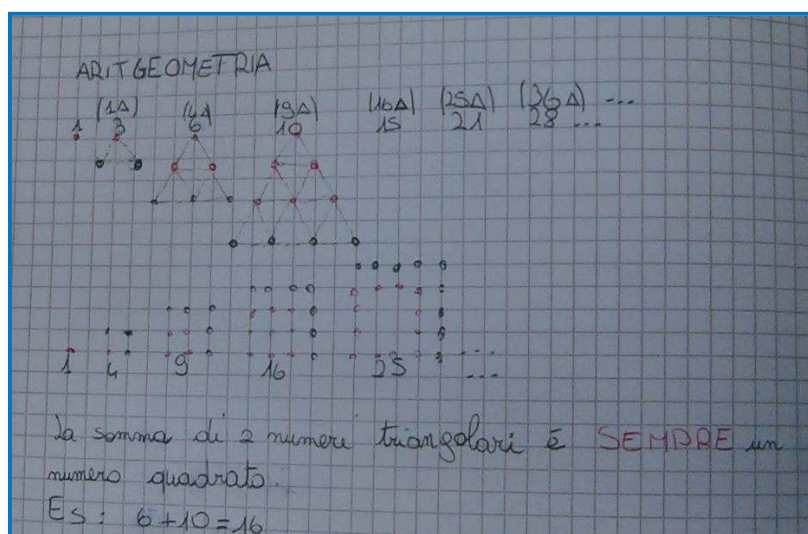


Fig. 8a – Numeri quadrati e quadrati perfetti

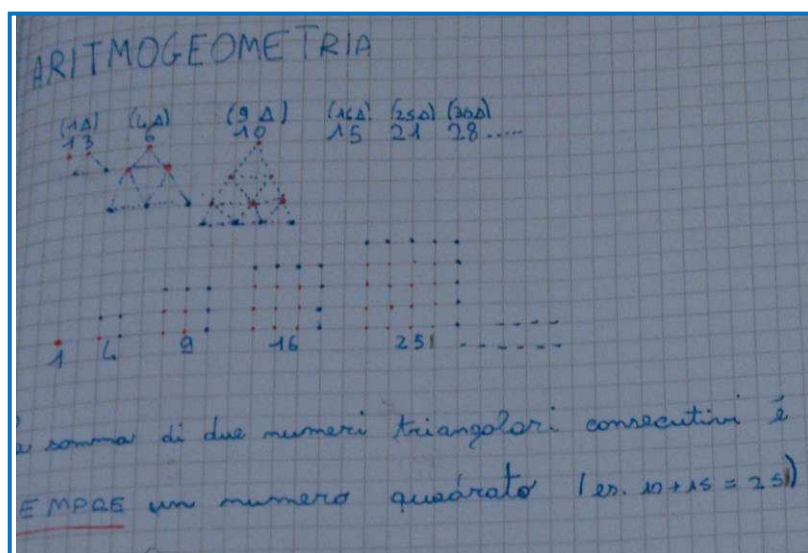


Fig. 8b – Numeri quadrati e quadrati perfetti

L'attività svolta nelle classi prima e seconda della secondaria di primo grado è stata effettuata nel primo periodo dell'anno scolastico, insieme ai numeri naturali e ai numeri razionali.

Siamo sempre partiti dalla storia di Pitagora (Guedj, 2000), dal periodo in cui è vissuto, dalla sua Scuola e dal suo simbolo, che ci ha permesso di svolgere un'ulteriore attività nella classe prima sui segmenti.

Da alcune immagini del passato abbiamo anche potuto scoprire sia gli interessi sia l'importanza del grande Pitagora (Fig. 9a e Fig. 9b).

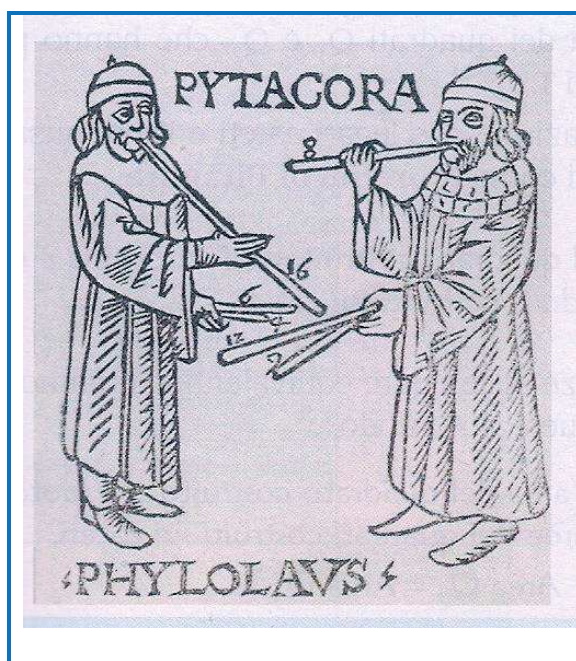


Fig. 9a



Fig. 9b

I numeri figurati sia triangolari che quadrati sono stati costruiti insieme ai ragazzi, sia sui quaderni che sulla lavagna LIM. I ragazzi dovevano poi trovare quali fossero le analogie tra i due tipi di numeri e le particolarità sia dei numeri triangolari che di quelli quadrati.

Giorgia e Vittoria hanno scritto che “da un numero triangolare al successivo si aggiunge un pallino in più del precedente” (Fig. 10).



Fig. 10 – Giorgia e Vittoria

Rocco ha scritto che “il numero quadrato è uguale al numero di triangolini contenuti in quelli triangolari” (Fig. 11).

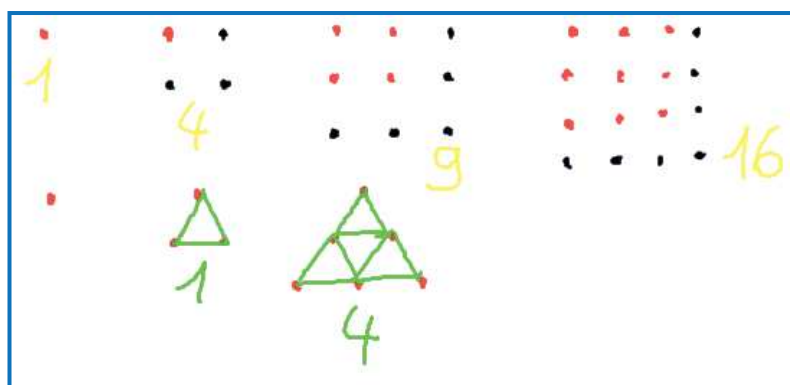


Fig. 11 – Il disegno di Rocco

Andrea ha scritto che “i numeri quadrati sono quelli che posso esprimere come prodotto di due numeri uguali, cioè come quadrato di un numero”.

Alice e Sara hanno detto che “i numeri quadrati sono sempre il quadrato di un numero”.

Guido e Matteo hanno detto che “da un numero quadrato al successivo si aggiungono sempre due pallini in più rispetto a quanto aggiunto al precedente”.

Stefano e Marina hanno notato che “la differenza tra due numeri quadrati successivi è sempre un numero dispari e questo accade anche per la somma di due numeri quadrati successivi”.

$$\text{Es.: } 9 - 4 = 5 \quad 36 - 25 = 11 \quad 9 + 16 = 25 \quad 36 + 49 = 85$$

Alessandro ha detto che “il numero di triangolini e di quadratini che si formano nei due tipi di numeri sono uguali”

Mattia ha detto che i numeri quadrati si ottengono “Sommando successivamente i numeri dispari”.

In seconda abbiamo incontrato anche i numeri rettangolari ed esagonali.

Siamo partiti da quelli rettangolari (Fig. 12) e abbiamo chiesto: “Cosa notate di particolare?”

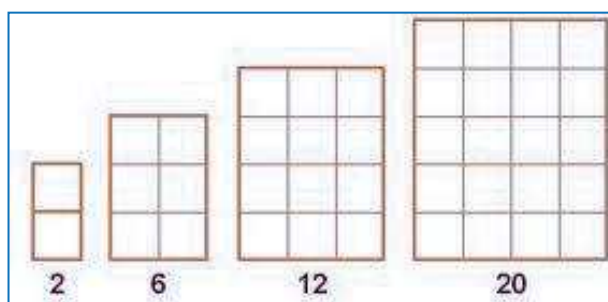


Fig. 12 – Numeri rettangolari

Andrea ha detto:

“Sono sempre numeri pari”.

Abbiamo chiesto allora:

“Perché sarà sempre così?”.

Marina ha risposto:

“Perché uno dei due fattori sarà sempre un numero pari”.

Abbiamo poi domandato:

“Quale relazione trovate tra i numeri rettangolari e quelli triangolari?”.

Matteo ha detto:

“Quelli rettangolari si ottengono sommandone due triangolari uguali”.

Paolo ha aggiunto:

“Allora possiamo dire che sono il doppio dei numeri triangolari, infatti i primi numeri triangolari sono 1 – 3 – 6 – 10”.

Mohamed ha detto:

“Le basi sono i numeri naturali che crescono”.

I numeri esagonali che sono i più difficili da realizzare li abbiamo costruiti insieme in laboratorio con GeoGebra (Fig. 13).

La domanda è stata la solita:

“Cosa osservate?”.

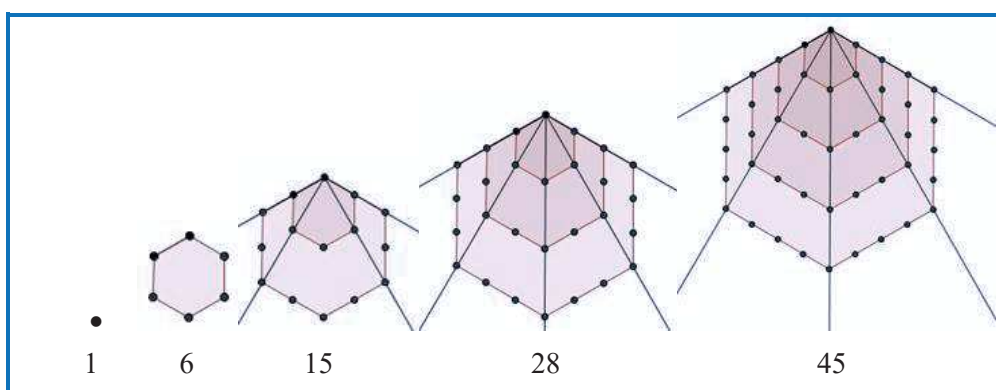


Fig. 13 – Numeri esagonali

Qui rispondere è stato più difficile. Hanno provato a vedere se ci fosse una regolarità nel passaggio tra un numero e il successivo. Dopo un po', Matteo ha detto: “*Si aumenta prima di 5 e poi si aggiunge sempre 4... infatti + 5, poi + 9, + 13, + 17 e dopo sarà + 21 e così via*”.

Ho quindi mostrato anche un numero esagonale centrato e la relativa sequenza (Fig. 14).

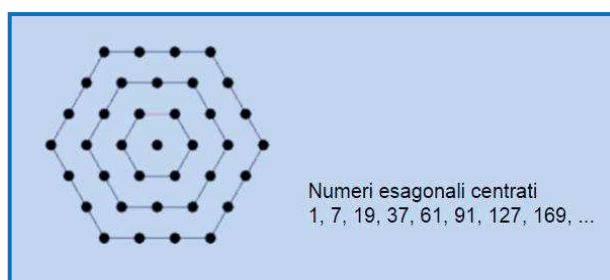


Fig. 14 – Numeri esagonali centrati

Marina ha detto subito:

“*Qui è più facile, perché si aumenta sempre di 6 e dei suoi multipli*”.

Nella classe terza abbiamo incontrato Pitagora in un'attività di approccio al linguaggio algebrico legata ai numeri figurati. L'abbiamo chiamata “Numeri figurati e inizio di algebra”.

L'attività è stata svolta con gruppi di 4-5 ragazzi, ai quali è stato consegnato un compito svolgibile anche con l'ausilio del computer.

Il compito consisteva nel trovare una formula per determinare l'*n*-esimo numero figurato (triangolare, quadrato, pentagonale, esagonale e rettangolare) in funzione della posizione occupata.

In questo caso abbiamo introdotto anche il numero pentagonale, che risulta un po' troppo complesso da realizzare per le classi inferiori.

I lavori più significativi sono venuti da due gruppi che nel tempo assegnato di due ore hanno trovato le formule di tutti i numeri richiesti. (Fig. 15a e Fig. 15b)

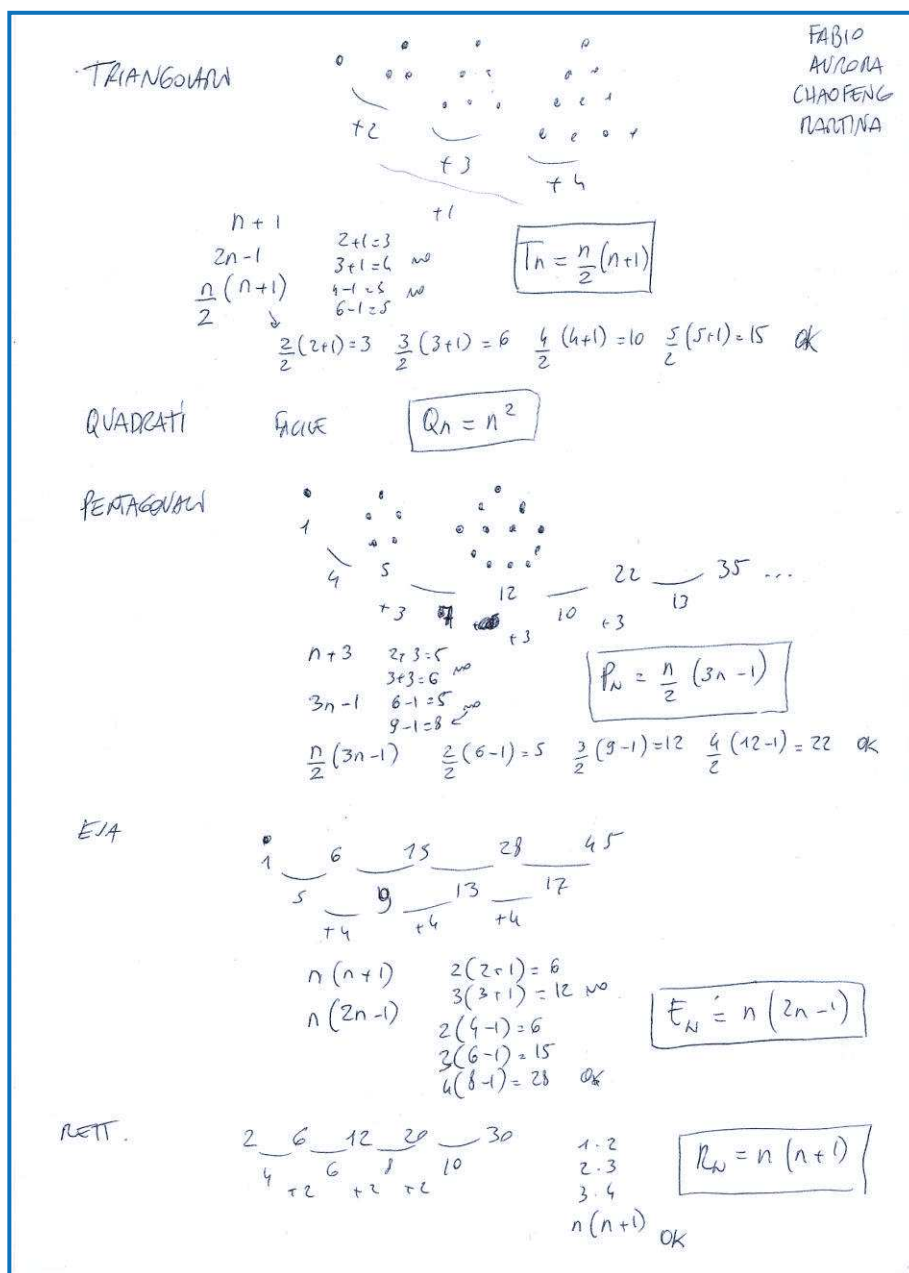


Fig. 15a – Numeri figurati e inizio di algebra – gruppo n. 1

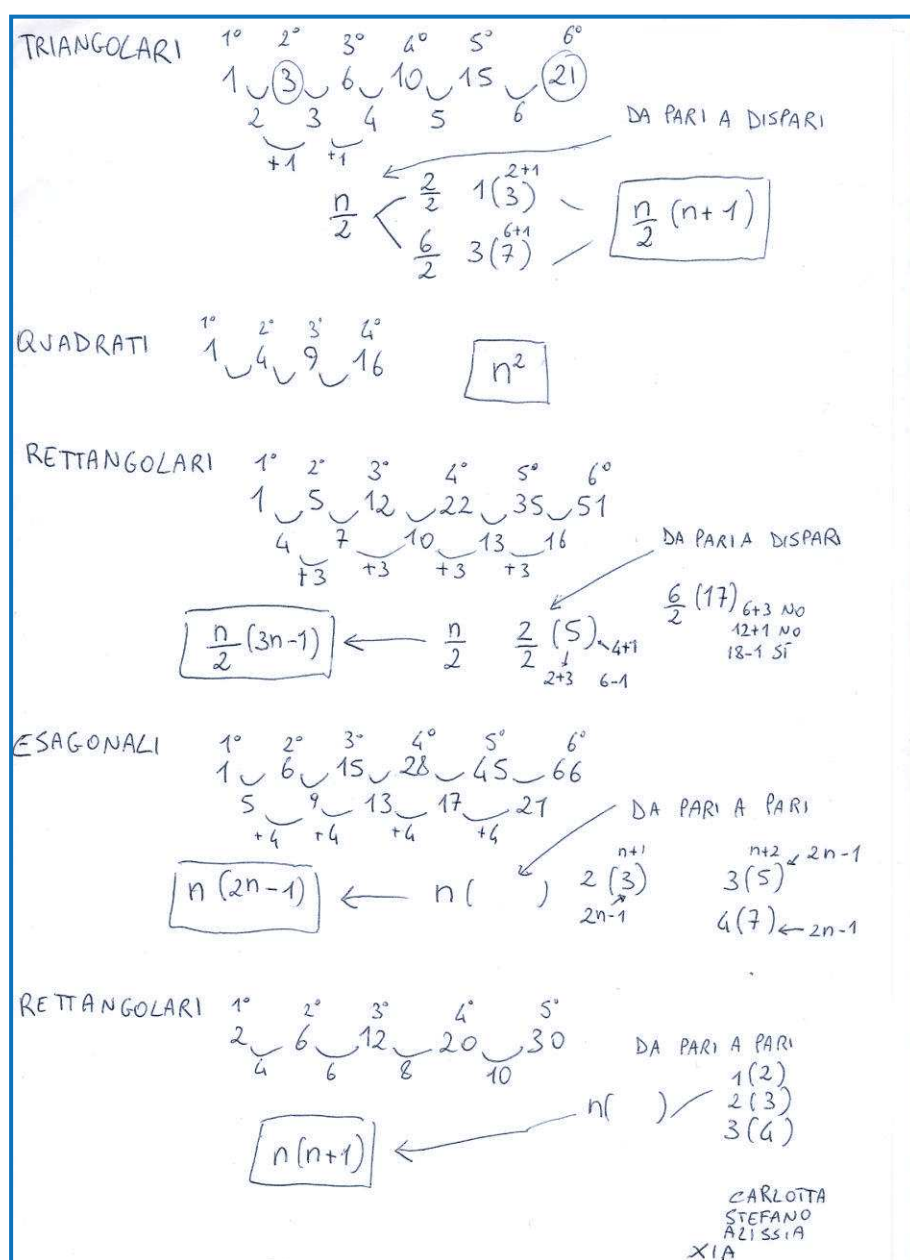


Fig. 15b – Numeri figurati e inizio di algebra – gruppo n. 2

Un gruppo ha anche esteso il compito effettuando con GeoGebra una rappresentazione grafica dei numeri figurati, verificando tra essi la presenza di due rami di parabola.

Nella classe seconda del liceo economico sociale di Imola, relativamente a Pitagora abbiamo toccato tre macro aree:

- Le funzioni
- La geometria Euclidea
- La geometria nel piano cartesiano

Nella prima parte, per quanto riguarda le funzioni, introdotte già nella classe prima, abbiamo considerato la sequenza rappresentata nella figura (Fig. 16a) di seguito riportata.

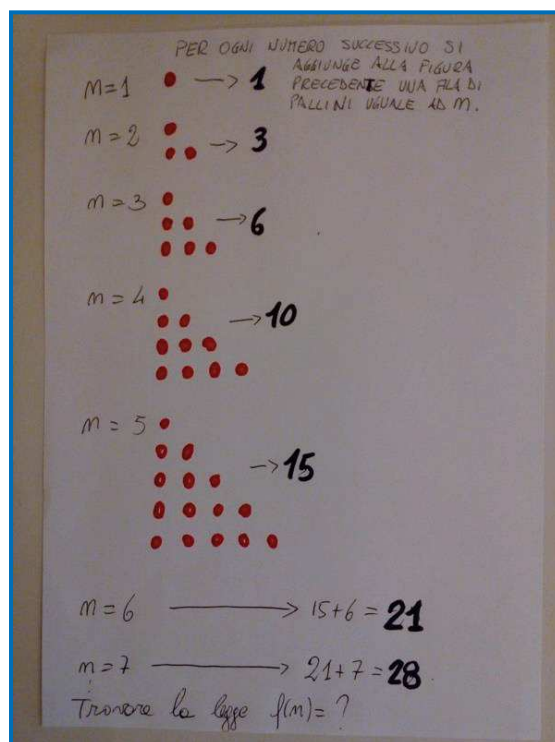


Fig. 16a – Introduzione alle funzioni

Abbiamo poi diviso la classe in 8 gruppi e assegnato loro il seguente compito:

“Trovate la legge che collega il numero n al totale dei ‘pallini’ nei vari casi”

(tempo assegnato 20 minuti).

Un gruppo al termine del tempo assegnato ha trovato la legge $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Abbiamo poi concluso che la sequenza individuata dal numero dei pallini (1; 3; 6; 10; 15; ...) rappresenta i numeri triangolari e la legge che ci permette di trovarli:

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Qualche studente ha anche ricordato di aver già incontrato i numeri triangolari nella scuola secondaria di primo grado.

Nella seconda parte abbiamo rappresentato la funzione precedente $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ che ha come *dominio* l'insieme dei numeri naturali nel piano cartesiano e abbiamo ottenuto un grafico (Fig.16b).

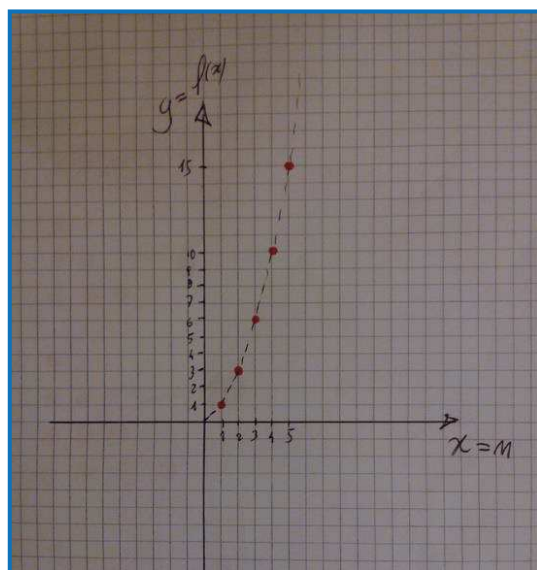


Fig. 16a – Introduzione alle funzioni

I ragazzi hanno osservato che si potevano unire i punti del grafico con una curva ottenendo così una parte di parabola.

II Teorema

Del Teorema di Pitagora, con differenti approcci, abbiamo iniziato a parlare dalla seconda classe della scuola Primaria.

Abbiamo consegnato ad ogni bambino 8 triangolini rettangoli quadrettati con dimensioni 3, 4 e 5 e tre quadrati quadrettati con lati di 3, 4 e 5.



Fig. 17a



Fig. 17b

Abbiamo poi chiesto ai bambini di provare a costruire con quei pezzetti, suddivisi in due gruppi (uno con i 2 quadrati di lato 3 e 4 e quattro dei triangolini e l'altro con il quadrato di lato 5 e i restanti quattro triangolini), due quadrati "grandi" uguali.

Andrea e Irene sono stati molto veloci e in meno di 3 minuti hanno composto i due quadrati (Fig. 17a e Fig. 17b).

Con qualche minuto in più, anche tutti gli altri bambini sono riusciti a costruire le due figure richieste (Fig. 18).

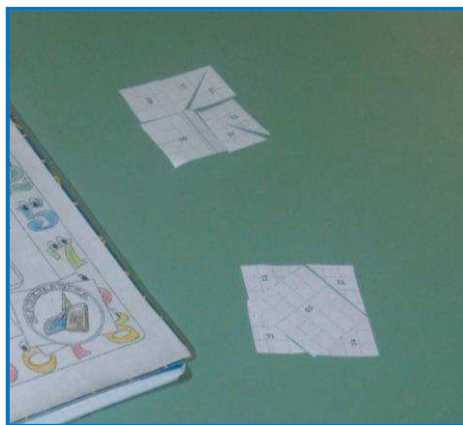


Fig. 18 – Costruzione del quadrato

Abbiamo quindi chiesto; *“Notate qualcosa di particolare in comune tra le due figure appena costruite?”*.

Tutti i bambini hanno osservato che entrambi i quadrati avevano al loro interno 4 triangoli.

Poi Irene ha detto che *“i due quadrati più piccoli sono grandi quanto quello più grande”*.

Riccardo, invece, ha detto: *“Occupano lo stesso spazio”*. E questo, non avendo loro fatto ancora le aree, ci basta sicuramente!

Anche nella classe terza, siamo partiti alla costruzione dei quadrati con gli 8 triangolini rettangoli e i 3 quadrati coi lati di 3, 4 e 5 unità.

La più veloce è stata Martina che ha impiegato circa 3 minuti a costruire entrambi i quadrati.

Abbiamo posto la stessa domanda fatta alla classe seconda e Matteo ha notato subito che i due quadrati erano uguali.

Sofia ha detto:

“se tolgo i 4 triangoli per parte mi rimangono 1 quadratone e due quadratini che sono uguali”.

Francesco ha detto che *“è come la proprietà invariante ...”*.

Tutti hanno detto che si sono divertiti e Francesca ha aggiunto che *“le è piaciuto Pitagora, bellissima la sua storia che è vissuto 2600 anni fa ...”*.

Con le classi quarta e quinta abbiamo osato un po' di più con le domande, considerato che i bambini conoscevano già le aree e le potenze.

Anche dalla ricostruzione dei due quadrati uguali con i triangoli rettangoli e i tre quadrati, sono

emerse delle osservazioni interessanti e Letizia ha osservato che *“Il triangolo ha i tre lati che coincidono con i lati dei tre quadrati”*.

A quel punto abbiamo “estratto dal cilindro” altri triangoli rettangoli con lati differenti e diversi quadrati chiedendo ai bambini di associare ai triangoli i quadrati corrispondenti.

Abbiamo poi chiesto di osservare i numeri dei quadratini all’interno delle diverse figure e di dirci cosa ci fosse di particolare.

Alessia e Enrico hanno scritto *“I numeri dei quadratini sulle terne di quadrati sono corrispondenti ai lati dei triangoli rettangoli”* (Fig. 19a e Fig. 19b).

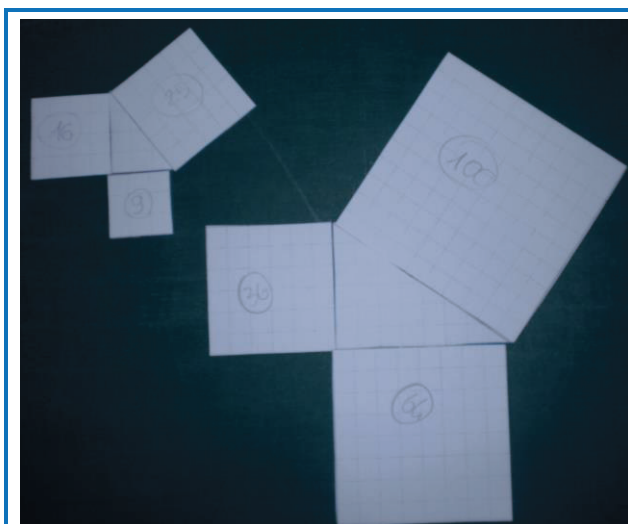


Fig. 19a

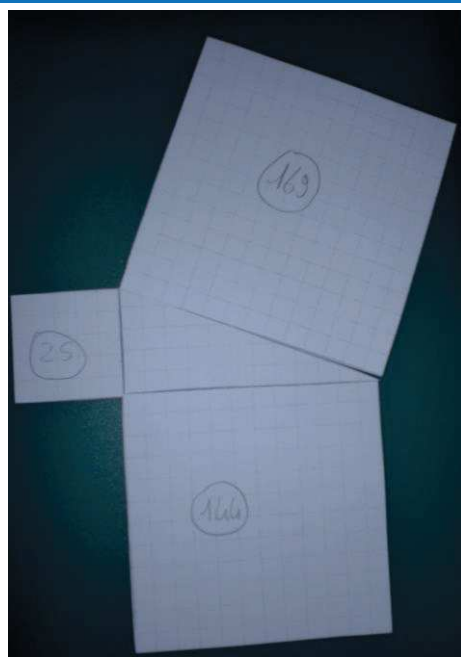


Fig. 19b

Arturo, Federico e Luca hanno poi constatato che *“la somma dei due numeri che corrispondono ai quadrati più piccoli”* di ogni terna *“dà come risultato il numero del quadrato più grande”*.

Letizia ha notato che *“le aree dei due quadrati più piccoli sono uguali al quadrato più grande”*.

Pitagora potrebbe anche essere moderatamente soddisfatto e anche i bambini lo erano.

Nella classe prima della scuola Secondaria abbiamo ripetuto l’attività svolta nelle classi terminali della primaria, soffermandoci maggiormente sulle abilità di argomentare (D’Amore, 2001; Salciccia, 2003) e quindi, dopo che avevano fatto la consueta attività con i tre quadrati e gli otto triangolini, abbiamo chiesto ai ragazzi: *“Provate a spiegare a un vostro compagno cosa c’è di particolare in questi due quadrati uguali.”*

Nicole ha detto: *“Nei due quadrati realizzati si nota che nel primo ci sono 4 triangoli e un quadrato e nel secondo ci sono ancora quattro triangoli, ma due quadrati diversi tra loro e più piccoli dell’altro. Questo vuol dire che il quadrato più grande è uguale agli altri due insieme”*.

Francesco ha detto: *“Questi due quadrati sono formati ciascuno da quattro triangolini uguali tra loro, mentre la restante parte è data in un quadrato dal quadrato più grande mentre nell’altro dai due quadrati più piccoli. Questo vuol dire che l’area del quadrato più grande*

corrisponde alla somma delle aree degli altri due". Il concetto di area era stato appreso nella scuola primaria, ma questa argomentazione ci è sembrata la più corretta.

Anche per la seconda attività, quella con triangoli e quadrati diversi da abbinare tra loro (Fig. 19a e Fig. 19b), abbiamo chiesto di argomentare: *"Spiegate, aiutandovi anche con la carta quadrettata, cosa lega tra loro i tre quadrati che avete abbinato ai triangoli"*.

Mattia ha affermato: *"Se confronto le aree dei tre quadrati noto che in tutti i casi la somma delle aree dei due quadrati più piccoli dà come risultato l'area del quadrato più grande: come 9 più 16 fa 25 e anche 25 più 144 fa 169"*. Il nostro piccolo pitagorico ha già posto le basi per il noto Teorema.

Nella classe prima della secondaria di primo grado, parlando di angoli, e in particolare di angoli retti, abbiamo chiesto ai ragazzi di costruire un triangolo rettangolo utilizzando il *Geomag* e, dopo alcuni tentativi, il risultato delle loro fatiche ha portato a costruire un triangolo con i lati dati da tre, quattro e cinque pezzetti (Fig. 20).

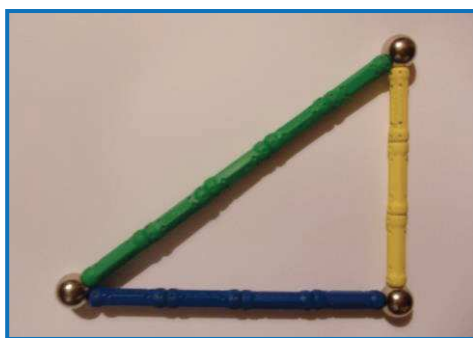


Fig. 20 – Costruzione con Geomag

Nella classe seconda della scuola secondaria siamo partiti, come sempre, da un po' di storia di Pitagora e dei pitagorici e, in particolare abbiamo mostrato un francobollo commemorativo della Grecia (Fig. 21).



Fig. 21 – Francobollo commemorativo

Dal semplice conteggio del numero degli scacchi delle tre scacchiere del francobollo, abbiamo chiesto ai ragazzi cosa notassero.

Marco e Nicolò hanno notato che il triangolo rettangolo non era “disegnato correttamente” (abitudinari!).

È stato spiegato il significato della parola ipotenusa e che il “consueto” disegno è fatto in quel modo solo perché è più semplice rappresentare e costruire l’angolo retto.

Comunque tutti hanno trovato, chi prima chi dopo, la relazione di somma tra i due quadrati più piccoli e quello più grande.

Da qui siamo passati al disegno con carta millimetrata e matita, utilizzando anche, per facilitare il lavoro, la posizione “consueta” del triangolo rettangolo (Fig. 22).

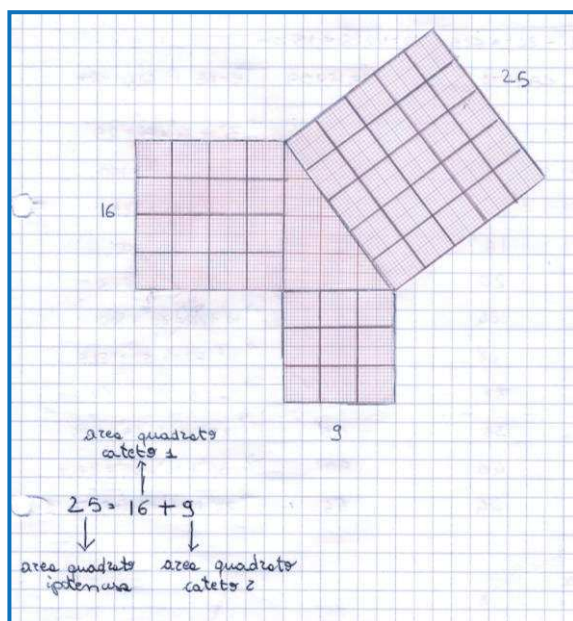


Fig. 22 – Teorema di Pitagora

Per generalizzare la relazione siamo andati al computer e abbiamo cercato di verificare il teorema con GeoGebra (www.geogebra.org). Con questo software di geometria dinamica è infatti possibile modificare le dimensioni dei lati del triangolo, verificando visivamente che la somma delle aree dei due quadrati costruiti sui cateti è sempre equivalente al quadrato maggiore.

Sempre con l’utilizzo del software, abbiamo anche provato a “generalizzarlo” con altri poligoni regolari e anche con il semicerchio. I ragazzi hanno potuto constatare che anche con queste figure la somma delle aree delle due minori è uguale all’area di quella maggiore. Riccardo ha provato anche con poligoni di 100 lati (con GeoGebra si può).

Siamo poi passati alle diverse dimostrazioni su carta e con modelli (Fig. 23a, Fig. 23b e Fig. 23c).

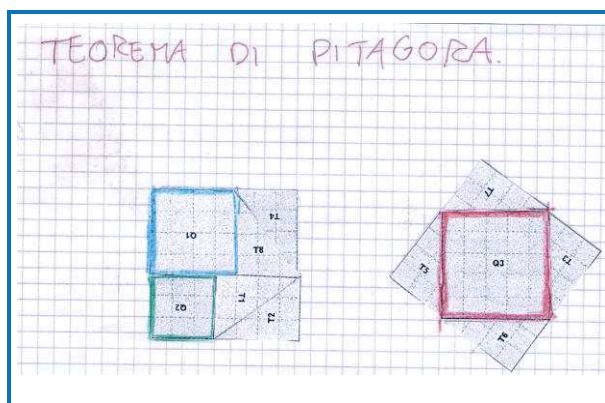


Fig. 23a – Dimostrazione Teorema Pitagora

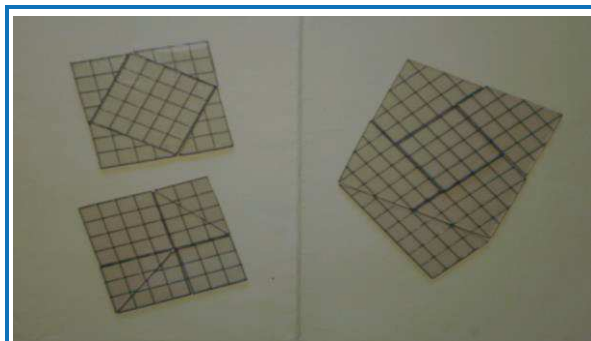
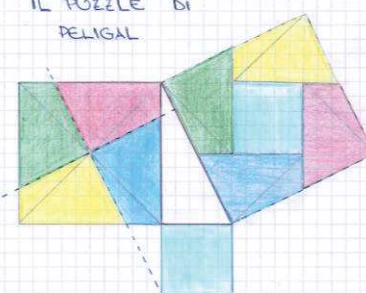


Fig. 23b – Dimostrazione Teorema Pitagora

DIMOSTRAZIONE PITAGORA

IL POZZLE DI
PELIGAL



IL POZZLE DI
BHASKARA

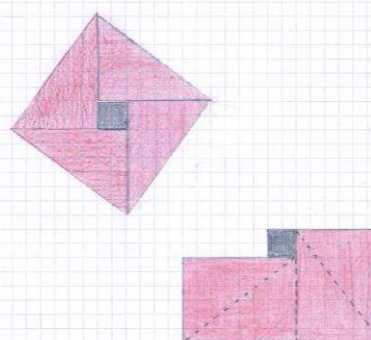


Fig. 23c – Dimostrazione Teorema Pitagora

Abbiamo poi chiesto “Possiamo utilizzare il Tangram per dimostrare il Teorema di Pitagora?” Siamo partiti dal Tangram (Fig. 24).

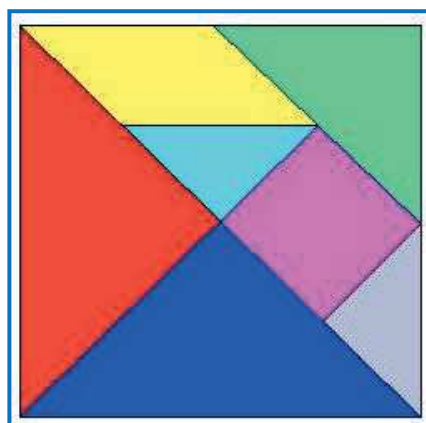


Fig. 24 – Teorema di Pitagora e Tangram

Il gruppo che ha risposto meglio è stato quello di Elena, Martina, Luca e Francesco. Che ha scritto così: “Abbiamo preso uno dei due triangoli rettangoli isosceli (corrispondenti a un quarto, cioè il rosso o il blu). L’ipotenusa di questo triangolo corrisponde al lato del Tangram, per cui il quadrato costruito sopra di esso è proprio il Tangram stesso. Il quadrato sopra uno dei

cateti si può costruire con l'altro triangolo da un quarto insieme al parallelogramma giallo (un ottavo) e ai due triangolini rettangoli TAN. azzurro e grigio (un sedicesimo). La somma delle quattro parti è quindi data dalle frazioni:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \quad (\text{cioè metà Tangram}).$$

Per tale motivo si dimostra che la somma dei quadrati costruiti sui cateti (ciascuno un mezzo o mezzo tangram) equivale al quadrato costruito sull'ipotenusa (Tangram intero)".

Sempre lavorando per gruppi, abbiamo chiesto anche ai ragazzi della classe terza di realizzare un triangolo rettangolo utilizzando dei pezzi di Geomag. Dopo pochi minuti anche loro sono giunti alla stessa costruzione realizzata dagli alunni della prima (Fig. 20).

Partendo dall'analisi di questo manufatto, ci siamo soffermati sulla terna 3-4-5, dicendo anche ai ragazzi che tale terna era già conosciuta tempo prima dell'avvento dei pitagorici.

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 196 225
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29

$25 + 144 = 169$
 $5^2 + 12^2 = 13^2$
 partendo da 5:
 $\frac{5^2-1}{2} = 12 \quad \frac{5^2+1}{2} = 13$
 proviamo con altri numeri
 $\frac{4^2-1}{2} = 7,5 \quad \frac{4^2+1}{2} = 8,5$
 $16 + 56,25 = 72,25$
 funziona ma numeri decimali!
 con altri dispari?
 $\frac{7^2-1}{2} = 24 \quad \frac{7^2+1}{2} = 25 \quad \frac{9^2-1}{2} = 40 \quad \frac{9^2+1}{2} = 41$
 $49 + 576 = 625 \text{ OK} \quad 81 + 1600 = 1681 \text{ OK}$
 $\frac{11^2-1}{2} = 60 \quad \frac{11^2+1}{2} = 61 \quad \frac{13^2-1}{2} = 84 \quad \frac{13^2+1}{2} = 85$
 $121 + 3600 = 3721 \text{ OK} \quad 169 + 7056 = 7225 \text{ OK}$
 con n dispari:
 $n; \frac{n^2-1}{2}; \frac{n^2+1}{2}$
 e con n pari?
 Per togliere il problema del denominatore
 abbiamo moltiplicato tutto per 2
 $2n; n^2-1; n^2+1$
 $n=4 \quad 8; 15; 17 \quad n=8 \quad 16; 63; 65$
 $64 + 225 = 289 \text{ OK} \quad 256 + 3969 = 4225 \text{ OK}$
FUNZIONA!!!

Fig. 25 – Attività sulle terne pitagoriche

Utilizzando GeoGebra nella LIM in classe, abbiamo provato a vedere se le terne potevano “funzionare” anche con i multipli della terna 3-4-5.

Dopo aver confermato che anche i multipli di 3-4-5 costituiscono terne valide per costruire triangoli rettangoli, abbiamo chiesto loro:

“Provate a vedere se riuscite a trovare altre terne che non siano generate dalla terna 3-4-5”.

Un gruppo ha provato, con un approccio particolare, a scrivere i quadrati dei primi 15 numeri naturali cercando di trovare delle regolarità nella sequenza, ricordando quella emersa con i numeri quadrati.

I ragazzi hanno notato che tra 144 e 169 la differenza è 25, per cui questa poteva essere una terna ottenuta dai numeri 5-12-13.

La domanda che si sono posti era come si potevano ottenere quei tre numeri partendo dal più piccolo.

Nella scheda del gruppo si nota la soluzione esatta, ottenuta però dopo vari tentativi e tutta la procedura successiva per provare a generalizzare (Fig. 25).

Questa attività è stata particolarmente utile per il processo, sempre troppo poco utilizzato a scuola, dell'argomentare e i ragazzi hanno potuto discutere tra loro e successivamente con il resto della classe.

Nella terza classe della scuola secondaria di primo grado abbiamo anche messo in scena uno spettacolo di teatro matematico dal titolo “Un processo matematico”, nel quale, partendo dall'omicidio di Ippaso da Metaponto e dal problema della radice di due, si ripercorre la storia di Pitagora, dei pitagorici e di altri grandi matematici di quel periodo storico, come Talete.

Con un Giudice e un pubblico ministero vengono interrogati i vari personaggi, che, narrando le proprie vicende, tentano con successo di scagionare Pitagora, che viene assolto, come spesso accade anche nella realtà, per insufficienza di prove.

Nella classe seconda della scuola secondaria di secondo grado, abbiamo parlato di Pitagora in geometria Euclidea.

Inizialmente abbiamo ripreso l'enunciato del teorema di Pitagora e la dimostrazione (sfruttando l'area di un quadrato di lato uguale alla somma dei cateti del triangolo rettangolo considerato nell'enunciato del teorema), che tutti ricordavano di aver già visto alla secondaria di primo grado.

Lo abbiamo utilizzato per trovare i legami fra i lati dei triangoli rettangoli con angoli notevoli 30° , 60° , 45° .

Il compito di trovare i legami fra i lati dei triangoli rettangoli con angoli notevoli 30° , 60° , 45° è stato assegnato agli studenti suddivisi in 8 gruppi nella seconda ora di lezione (tempo a disposizione 30 minuti).

Sei gruppi sono riusciti a trovare le relazioni cercate. Il risultato ottenuto viene riportato in figura (Fig. 26).

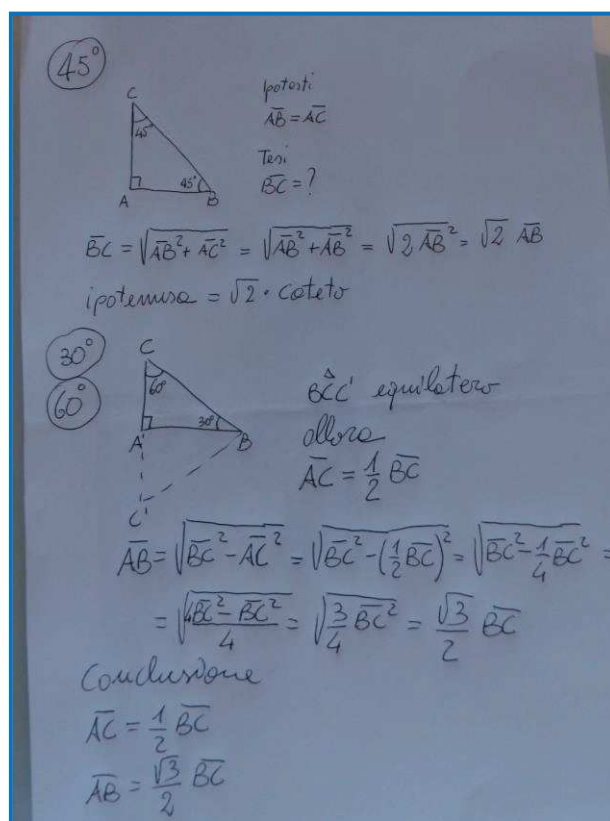


Fig. 26 – Relazioni dei triangoli rettangoli con angoli notevoli

Tale risultato lo abbiamo utilizzato per risolvere problemi con triangoli rettangoli con angoli notevoli.

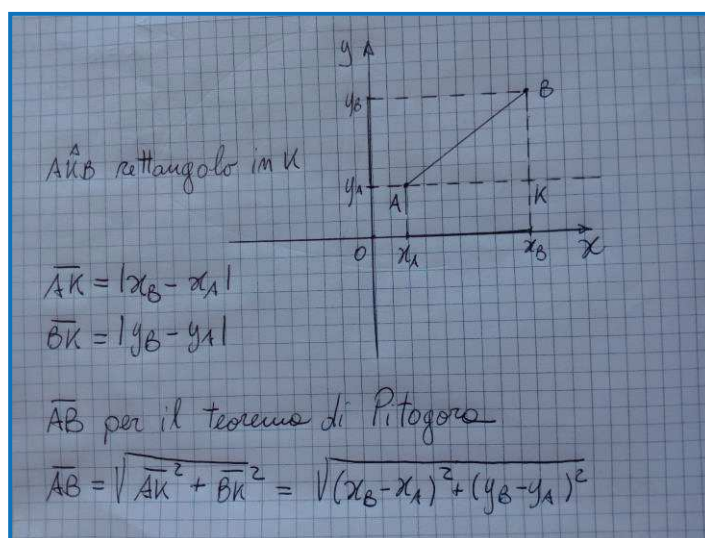


Fig. 27 – Teorema di Pitagora e piano cartesiano

Abbiamo poi parlato nuovamente di Pitagora quando abbiamo affrontato il piano cartesiano.

Durante la prima ora di lezione abbiamo lavorato, con una breve introduzione, sul piano cartesiano con alcune considerazioni sulla nomenclatura. Dopo aver ripreso il collegamento fra coordinate di un punto e collocazione nel piano cartesiano, nella seconda ora abbiamo posto il seguente problema: “*Come si può fare per trovare la lunghezza di un segmento?*”.

Abbiamo assegnato questo nuovo compito sempre suddividendo la classe in 8 gruppi (con 30 minuti a disposizione) dopo aver fatto osservare ai ragazzi che si poteva ottenere molto facilmente un triangolo rettangolo. Cinque gruppi hanno trovato la formula corretta utilizzando il teorema di Pitagora (Fig. 27).

Conclusione

Un antico motto latino recitava “*ludendo docere*” che significa “*insegnare divertendo*” e questo è lo scopo del nostro lavoro, già iniziato con Happy verticality in mathematics e proseguito con il gruppo di ricerca in didattica matematica Divertical-Math, da noi creato.

Lo scopo era duplice: il primo era quello di divertire con la matematica e il secondo era quello di “*sdoganare*” il povero Pitagora dal suo famoso Teorema.

Dall’entusiasmo e dalla curiosità che abbiamo trovato a tutti i livelli scolastici, possiamo dirci soddisfatti del risultato ottenuto.

Studiare Pitagora, ma anche tanti altri matematici, anche dal punto di vista storico, li rende sicuramente più “*umani*” e vicini ai bambini e ai ragazzi. Mostrare che anche i grandi matematici hanno commesso inizialmente degli errori, li rende in fondo più simpatici e fa comprendere agli studenti che anche dagli errori può nascere qualcosa di molto importante.

Contributo degli Autori

Entrambi gli autori hanno contribuito all’ideazione dello studio. I. Graziani ha raccolto e analizzato i dati della scuola dell’infanzia e della secondaria di primo grado. S. Babini ha raccolto e analizzato i dati della scuola primaria e della secondarie di secondo grado, e tutti e due gli autori hanno contribuito alla scrittura del manoscritto.

Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Deposito dei materiali dell’attività

Al seguente link sono depositati eventuali materiali inerenti questo l’articolo. Questi materiali nel tempo potranno essere modificati e arricchiti seguendo l’evoluzione delle idee sottostanti o/e future sperimentazioni svolte dall’autore dell’articolo.

<http://www.edimast.it/J/20150202/03150338GR/>

Bibliografia

Agostino A., (2002). *In viaggio con Pitagora*. Milano, Edizioni Ghisetti & Corvi.

- D'Amore B., (2001). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna, Pitagora Editrice.
- Guedj D., (2000). *Il teorema del pappagallo*. Milano, Longanesi.
- Lang S., (1991). *La bellezza della matematica, Terne pitagoriche*. Torino, Bollati Boringhieri.
- Lombardo Radice L., (2004). *La matematica da Pitagora a Newton*. Roma, Muzzio editore.
- Salciccia E., (2003). *Dietro il teorema – il fascino discreto della matematica nelle vite dei suoi protagonisti*. Roma, Armando editore.
- Simonetti V., (1995). *Ciao Pitagora*. Mantova, Corraini edizioni.

Gli Autori



Ivan Graziani

Istituto Comprensivo di Santa Sofia – Scuola Secondaria di I grado “Galileo Galilei”
Via Arcangeli, 1, 47018 Santa Sofia (FC)
graziani.ivan@tin.it
Italy

Professore a tempo indeterminato di matematica. Formatore in didattica della matematica. Appassionato di ICT, di problem solving e di comunicazione didattica. Si occupa inoltre di processi di apprendimento e di valutazione in vari contesti formativi e di sistema.

Fa parte del “Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica della Matematica – Pisa” (GRSDM). Fa parte del gruppo di ricerca in didattica “Divertical-Math”.

Collabora da diversi anni con l'Università di Bologna, con l'INDIRE (Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa), con l'INVALSI (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione) e con l'USR Emilia Romagna (Ufficio Scolastico Regionale).



Stefano Babini

Liceo “Rambaldi – Valeriani – A. Da Imola” di Imola (BO)
Via Guicciardini, 4, 40026 Imola (BO)
stefano0011@libero.it
Italy

Professore a tempo indeterminato di matematica e fisica. Appassionato di problem solving, di comunicazione didattica e delle nuove tecnologie applicate alla didattica (docente da diversi anni in classi 2.0).

Si occupa inoltre di processi di apprendimento e di valutazione in vari contesti formativi e di sistema.

Fa parte del gruppo di ricerca in didattica della matematica “Divertical-Math”.

Collabora da anni con l'INVALSI (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione).

Received August 17, 2016; revised August 22, 2016; accepted September 27, 2016; published online October 21, 2016

Open Access This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)



Experiential learning cycle in Mathematics

Elsa Malisani

Abstract. *What is a mathematical competence? What conditions support the “know how to act with competence”? How can we prepare educational activities to facilitate the “act with expertise in mathematics”? The aim of this paper is try to answer these questions. We show the experimentation of a situation-problem in mathematics, proposed for high school, able to start the experiential learning cycle.*

In particular, we want to describe the different phases of the experiential learning cycle, explaining the activities that teacher and students develop; identify difficulties and obstacles encountered by students to solve the problem and explain the methodology to overcome; evaluate the experience, indicating strengths and weaknesses.

Key words. *Experiential learning cycle, Mathematical competence, Mathematics education, Teaching and Learning.*

Sommario. *Cos'è una competenza matematica? Quali sono le condizioni che favoriscono il “saper agire con competenza”? Come predisporre attività didattiche che facilitino l’“agire con competenza in matematica”? L’obiettivo di questo articolo è cercare di rispondere a queste domande, presentando la sperimentazione di una situazione-problema in Matematica, progettata per la scuola secondaria di secondo grado, atta a far partire il ciclo di apprendimento esperienziale.*

In particolare, vogliamo: descrivere le diverse fasi del ciclo di apprendimento esperienziale, esplicitando cosa fa il docente e cosa fanno gli alunni; individuare le difficoltà e ostacoli che incontrano gli studenti per risolvere il problema ed esplicitare le metodologie per il superamento; valutare l’esperienza, indicando i punti di forza e i punti di debolezza.

Parole chiave. *Ciclo di apprendimento esperienziale, competenza matematica, didattica della matematica, insegnamento/apprendimento.*

Resumen. *¿Qué es una competencia matemática? ¿Cuáles son las condiciones que favorecen el “saber actuar con competencia”? ¿Cómo preparar actividades didácticas que faciliten el “actuar con competencia en matemática”? El objetivo de este artículo es tratar de responder a estas preguntas, presentando la experimentación de una situación-problema en Matemática, proyectada para la escuela secundaria, que permita el desarrollo del ciclo de aprendizaje experiencial.*

En particular, queremos: describir las distintas fases del ciclo de aprendizaje experiencial, explicando qué cosa hace el profesor y qué cosa hacen los alumnos; individuar las dificultades y los obstáculos que encuentran los estudiantes para resolver el problema y explicar la metodología utilizada para superarlos; evaluar la experiencia indicando los

puntos fuertes y los puntos débiles.

Palabras claves. *Ciclo de aprendizaje experiencial, competencia matemática, didáctica de la matemática, enseñanza/aprendizaje.*

Introduzione

L'indagine internazionale OCSE-PISA verifica l'acquisizione di competenze chiave in matematica, scienze e lettura da parte dei quindicenni scolarizzati. Nelle diverse rilevazioni triennali dei test PISA gli studenti italiani hanno ottenuto risultati medi in matematica inferiori alla media OCSE, tuttavia l'Italia è uno dei Paesi che ha registrato, tra il 2003 e il 2012, i maggiori progressi nei risultati di matematica. Gli studenti ottengono risultati particolarmente bassi quando la valutazione verte sulla loro capacità di formulare situazioni in modo matematico, ma raggiungono una performance migliore negli item in cui devono interpretare, applicare e valutare risultati matematici (OECD, 2013).

Il processo Formulare in forma matematica prevede l'identificazione delle opportunità di applicare e usare la matematica, o meglio rendersi conto del fatto che è possibile applicare la matematica per comprendere o risolvere un particolare problema o sfida (INVALSI, 2013). Questo processo comprende le seguenti attività: identificare gli aspetti matematici rilevanti del problema reale e formulare la situazione in forma matematica, basandosi sui concetti e sulle relazioni individuati e sulle ipotesi semplificatrici formulate, infine trasformare il "problema contestualizzato" in un "problema matematico", cioè gestibile in modo matematico. In questo modo si conferisce al problema una struttura, una rappresentazione e una specificità di tipo matematico.

Quindi i risultati dei test PISA evidenziano che gli studenti italiani incontrano delle difficoltà nel passaggio dalla situazione di problema reale al modello matematico (Bolondi, 2014). Gli alunni non sanno applicare le conoscenze e le abilità apprese a scuola a un contesto meno strutturato, in cui le istruzioni sono meno chiare e in cui devono decidere quali siano le conoscenze pertinenti e come esse si possano utilmente applicare per risolvere il problema. La formazione matematica offerta a scuola sembra fornire, e non a tutti, conoscenze e abilità, ma non appare idonea a produrre competenze per la vita.

Cos'è una competenza matematica?

Secondo il Quadro Europeo dei Titoli e delle Qualifiche (EQF) competenza è: «la comprovata capacità di usare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e/o personale; le competenze sono descritte in termine di responsabilità e autonomia».

La legislazione nazionale (D.M. 139/2007) richiama questa definizione sottolineando che «le competenze ... non riguardano una versione riduttiva del saper fare; costituiscono, invece, quel saper fare ad ampio spettro che conferisce senso autentico e motivante alle "cose apprese e utilizzate", perché siano riconducibili a sé e utilizzabili in più campi e con versatilità».

In particolare, nella descrizione degli assi culturali, il D.M. 139/2007 considera che la "finalità dell'asse matematico è l'acquisizione ... delle abilità necessarie per applicare i principi e i processi matematici di base nel contesto quotidiano della sfera domestica e sul lavoro, nonché per seguire e vagliare la coerenza logica delle argomentazioni proprie e altrui in molteplici

contesti di indagine conoscitiva e di decisione”. La competenza matematica comporta la capacità e la disponibilità ... di esplorare situazioni problematiche, di porsi e risolvere problemi, di progettare e costruire modelli di situazioni reali.

Da questo punto di vista, per essere competente in matematica non basta possedere un buon bagaglio di conoscenze, abilità e capacità, è necessario poter mobilitare efficacemente le proprie risorse per affrontare una situazione-problema in modo di interpretarla adeguatamente, scegliendo le strategie da mettere in atto con l’obiettivo di proporre risposte adeguate (Cfr. Trincherò, 2015).

Quadro teorico

Quali sono le condizioni che favoriscono il “saper agire con competenza”?

Trincherò (2015) presenta quattro componenti che caratterizzano la possibilità del soggetto di “agire con competenza”, che costituiscono il modello R-I-Z-A:

- *Risorse (R)*: possedute e suscettibili ad essere mobilitate in termini di conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche adeguate alla situazione-problema
- *Modelli (I)*: espliciti o impliciti, che guidano l’interpretazione della situazione-problema da parte del soggetto e la conseguente scelta delle strategie da mettere in atto. Il soggetto competente, prima ancora di cercare una strategia, cerca di ridefinire il problema in una forma ottimale per la sua soluzione. L’autore chiama questi modelli *strutture di interpretazione*
- *Strategie operative (Z)*: che il soggetto mette in atto per raggiungere gli scopi che si prefigge, in presenza di una data situazione-problema. Trincherò chiama queste *strategie strutture di azione*
- *Capacità autoriflessiva e autoregolativa (A)*: riguarda la capacità del soggetto di capire se le strategie adottate sono effettivamente le migliori possibili e di cambiarle opportunamente in caso contrario. L’autore chiama queste capacità *strutture di autoregolazione*.

Trincherò (2012) ritiene che le quattro componenti dell’“agire con competenze” possono emergere quando lo studente deve risolvere problemi aperti. I problemi aperti possono avere dati sovrabbondanti o dati mancanti; nel primo caso lo studente deve selezionare quelli utili per la soluzione del problema e nel secondo deve stimare alcuni dati o reperirli autonomamente. I problemi aperti sono suscettibili a numerose interpretazioni e risolvibili con diverse strategie, alcune migliori di altre. Quindi il soggetto dovrà riflettere sulle interpretazioni e le strategie adottate per individuare i punti di forza e i punti di debolezza. In questo modo lo studente potrà valutare l’adeguatezza, l’efficacia e l’efficienza dei modelli interpretativi utilizzati e delle strategie messe in atto.

Il ciclo di apprendimento esperienziale di Pfeiffer e Jones

Come predisporre attività didattiche che facilitino l’“agire con competenza”?

Trincherò (2012) presenta un modello di strutturazione di attività didattiche basato sul ciclo di apprendimento esperienziale enunciato da Pfeiffer e Jones (1985) e Pfeiffer e Ballew (1988), schematizzato in figura (Fig.1).

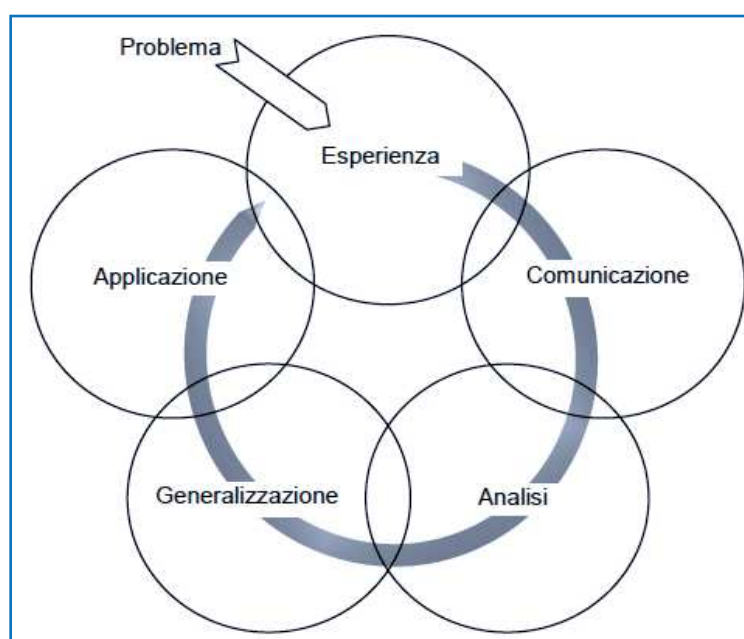


Fig. 1 - Il ciclo di apprendimento esperienziale di Pfeiffer e Jones

- *Problema*: il ciclo parte da un *problema aperto*, non affrontato prima in classe, significativo per lo studente (che rappresenti una sfida), né troppo facile, né troppo difficile, da risolvere a coppie o in piccoli gruppi, ma potendo contare sempre sull'interazione con i compagni o con l'insegnante e sulla consultazione di materiali didattici.
- *Esperienza*: per risolvere il problema l'alunno compie un'*esperienza* all'interno di un contesto sociale, il gruppo classe. Gli studenti formulano possibili soluzioni utilizzando le risorse di cui dispongono e facendo emergere le proprie misconcezioni⁽¹⁾ o misconcetti sull'argomento relativo al problema.
- *Comunicazione*: il portavoce di ogni coppia o di ogni gruppo espone alla classe il processo risolutivo eseguito e le soluzioni trovate, motivando le loro scelte.
- *Analisi*: il docente con il gruppo classe individua i punti di forza e i punti di debolezza delle soluzioni proposte, spiegando il perché. Suggerisce anche buone idee non emerse dalla discussione.
- *Generalizzazione*: il docente con il gruppo classe fa una sintesi dei punti di forza di tutte le soluzioni presentate per produrre una o più soluzioni ottimali. Il docente fornisce anche le risorse e i principi generali necessari per affrontare i problemi appartenenti alla stessa famiglia del problema iniziale.
- *Applicazione*: il docente propone alla classe un nuovo problema che gli studenti devono risolvere applicando le risorse ed i principi generali appena formulati nella fase di generalizzazione.

Il ciclo di apprendimento esperienziale in Matematica

L'obiettivo di questo articolo è presentare la sperimentazione di una situazione-problema in Matematica, progettata per la scuola secondaria di secondo grado, atta a far partire il ciclo di apprendimento esperienziale. In particolare, vogliamo:

- Descrivere le diverse fasi del ciclo di apprendimento esperienziale, esplicitando cosa fa il docente e cosa fanno gli alunni
- Individuare le difficoltà e gli ostacoli che incontrano gli studenti per risolvere il problema ed esplicitare le metodologie per il superamento
- Valutare l'esperienza, indicando i punti di forza e i punti di debolezza.

I destinatari sono gli studenti di due classi quarte del Liceo Scientifico dell'Istituto di Istruzione Secondaria Superiore "F. Crispi" di Ribera (AG), precisamente 13 alunni della classe 4A e 15 alunni della classe 4C. La sperimentazione è stata condotta nelle due classi dalla stessa docente (autore dell'articolo), durante il terzo trimestre dell'anno scolastico 2015/2016. Sono state previste per l'attività 5 ore curricolari in ogni classe: 3 ore per le fasi di *Esperienza*, *Comunicazione*, *Analisi e Generalizzazione* e 2 ore per la fase di Applicazione (che non verrà presentata in questo articolo).

L'attività proposta prevede lo sviluppo delle seguenti competenze:

- Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi;
- Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica.

I principali contenuti disciplinari coinvolti nella sperimentazione sono: i teoremi sui triangoli rettangoli, gli angoli tra rette parallele, la pendenza di una retta e la funzione tangente.

In seguito presentiamo la descrizione delle diverse fasi del ciclo esperienziale.

Problema: La rampa di accesso

Per accedere a un edificio pubblico ci sono 6 gradini alti 16 cm e profondi 30 cm; è necessario costruire una rampa di accesso per carrozzine.

Lo spazio libero di fronte alla base dell'edificio è di 16 m, di cui 4 m per la circolazione pedonale e 12 m per il verde pubblico.

Lungo la parete dell'edificio di fianco alla scala si potrebbe costruire uno scivolo di accesso a due o più rampe. A destra della scala lo spazio disponibile è di 7 m, a sinistra, invece, è di 5m.

La normativa prevede che la massima pendenza (ovvero il rapporto tra lo spostamento verticale e quello orizzontale) delle rampe sia dell'8%.

Quale sarebbe la soluzione ottimale dal punto di vista funzionale e /o estetico? (Vedasi Fig. 2)

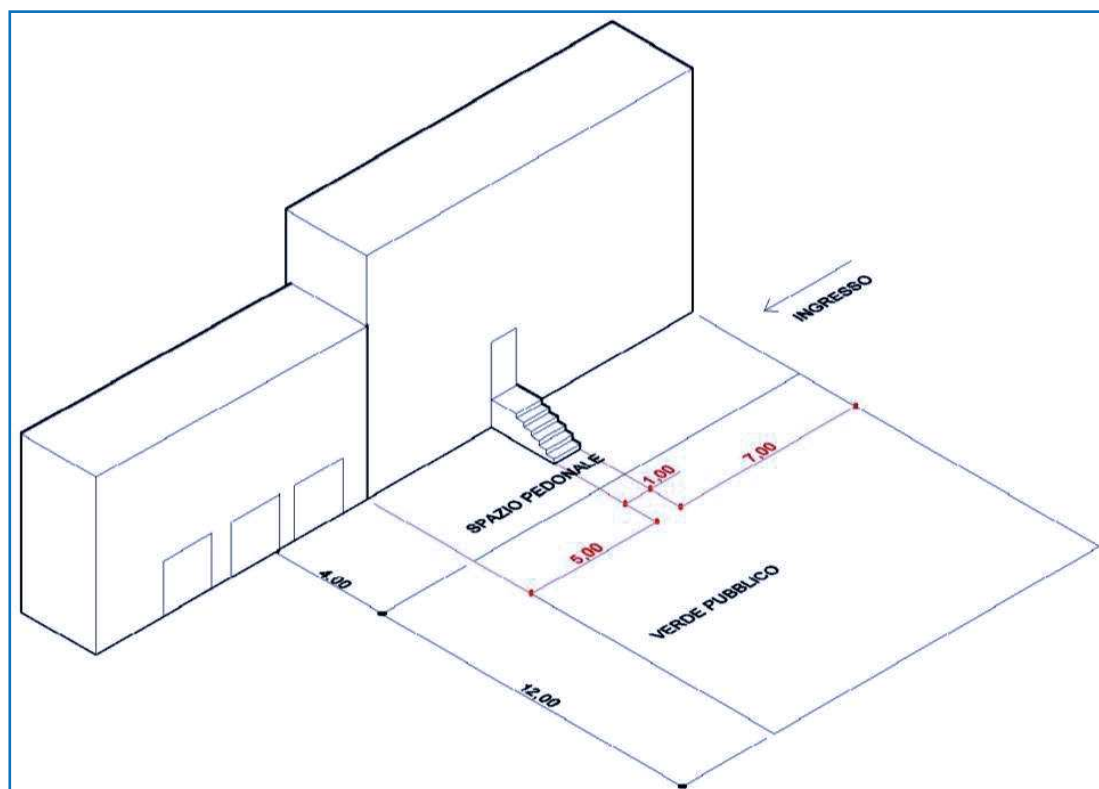


Fig. 2 - Rappresentazione grafica del problema

Esperienza

Inizialmente la docente ha diviso le classi in gruppi di tre alunni e ha scelto, come portavoce di ogni gruppo, l'alunno con il voto più basso in matematica.

In ogni classe i gruppi hanno elaborato possibili soluzioni discutendone animatamente. Le poche domande che hanno formulato all'insegnante erano relative alla presentazione del processo risolutivo:

“Dobbiamo fare anche il disegno?”; “È difficile disegnare in prospettiva, possiamo fare il disegno in pianta?”; “Possiamo presentare il foglio di consegna con il disegno e un foglio a parte con i calcoli?”, ecc.

La descrizione delle fasi successive (*Comunicazione, Analisi e Generalizzazione*) è realizzata separatamente per ogni classe, per poter effettuare un'analisi più esaustiva e situata del ciclo esperienziale nel contesto sociale di riferimento: la propria classe.

Classe 4C

Comunicazione

Il portavoce di ogni gruppo ha presentato il processo risolutivo e le soluzioni trovate.

- Il gruppo 5 ha calcolato l'altezza della scala: 0,96 m e ha analizzato due casi.

Il primo caso considerava la costruzione dello scivolo lungo la parete dell'edificio a destra della scala, utilizzando lo spazio disponibile di 7 m. La rampa proposta aveva 0,96 m di altezza e 7 m di lunghezza (spostamento orizzontale). Gli alunni hanno calcolato l'ampiezza dell'angolo acuto alla base dello scivolo che è inferiore a 8° ⁽²⁾ (Vedasi Fig. 3).

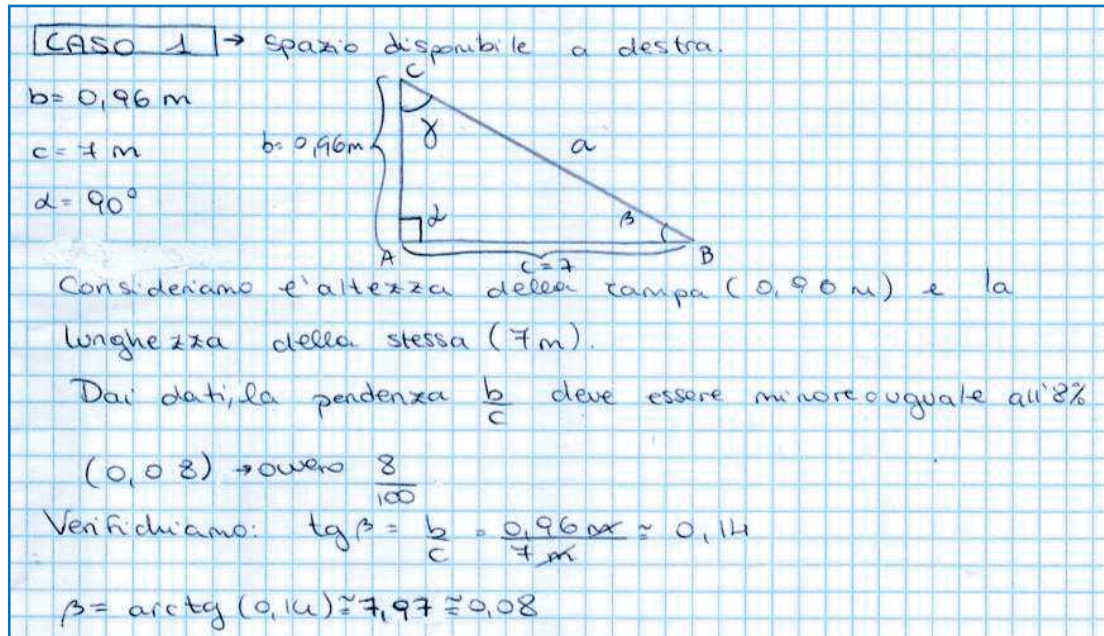


Fig. 3: Risoluzione del problema (1° caso) - Gruppo 5 – 4C

Il secondo caso prevedeva la costruzione della rampa lungo la parete dell'edificio a sinistra della scala, utilizzando lo spazio disponibile di 5 m. Lo scivolo aveva 0,96 m di altezza e 5 m di

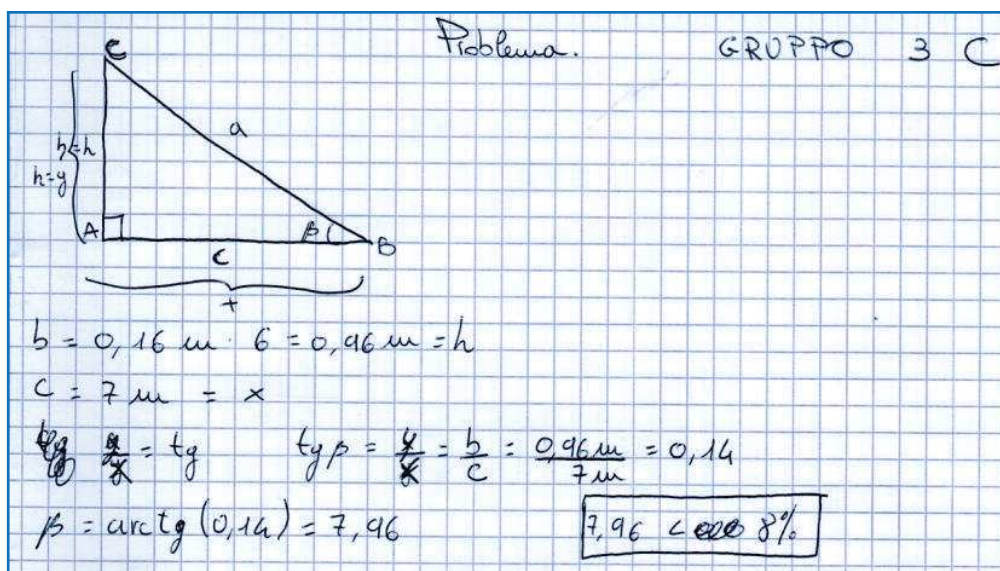


Fig. 4 - Risoluzione del problema (1° caso) - Gruppo 3 – 4C

lunghezza (spostamento orizzontale). I ragazzi hanno trovato l'ampiezza dell'angolo acuto alla base dello scivolo che risultava $10,76^\circ$. Siccome la normativa prevedeva una pendenza massima dell'8%, il relatore ha spiegato alla classe che la rampa per le carrozzine si poteva costruire solo a destra della scala.

- Il gruppo 3 ha analizzato i due casi descritti in precedenza, ma del secondo non ha presentato i calcoli⁽³⁾ (Vedasi Fig. 4).

Gli alunni hanno anche provato a costruire la rampa con alcune curve, ma l'hanno considerata funzionalmente scomoda per le carrozzine. Quindi il relatore ha concluso l'intervento, considerando che la soluzione più corretta era quella descritta in figura (Fig. 4).

- Il gruppo 4 ha calcolato l'altezza dello scivolo di 0,96 m e ha applicato la normativa, impostando una disequazione fratta, per determinare la lunghezza minima (spostamento orizzontale) di 12 m. (Vedasi Fig. 5)

Handwritten work on grid paper showing the derivation of a minimum horizontal displacement of 12m for a ramp with a maximum 8% slope.

Left side calculations:

$$\frac{h}{b} \leq 8\%$$

$$\frac{0,96}{b} \leq 0,08$$

$$\frac{0,96}{b} - 0,08 \leq 0$$

$$\frac{0,96 - 0,08b}{b} \leq 0$$

Right side calculations:

$$N) \quad 0,96 - 0,08b \geq 0$$

$$\quad -0,08b \geq -0,96$$

$$\quad 0,08b \leq 0,96$$

Final result:

$$\underline{\underline{b \geq 12}} \quad \boxed{b \leq 0} \text{ imp}$$

Diagram on the right shows a horizontal line with points marked 0, 12, and a vertical line at 12. Signs (+, -, +, -) are placed above and below the line segments.

Fig. 5 - Risoluzione della prima parte del problema - Gruppo 4 – 4C

Gli studenti hanno proposto uno scivolo a due rampe perpendicolari: una da 7 m, a destra della

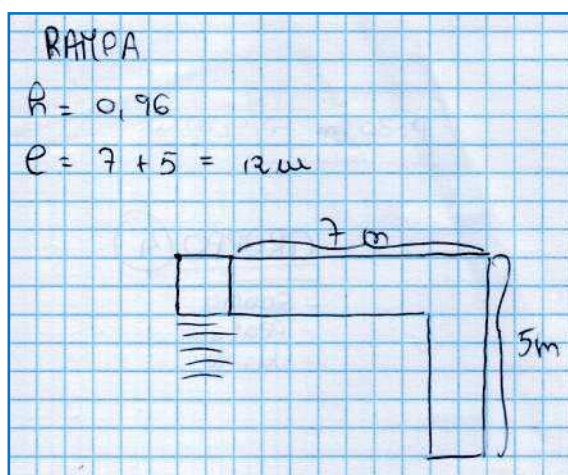


Fig. 6 - Grafico dello scivolo - Gruppo 4 – 4C

scala e lungo la parete, e l'altra da 5m (Vedasi Fig. 6).

- Il gruppo 2 ha proposto uno scivolo alto 0,96 m e lungo 13 m, a due rampe perpendicolari: una da 7 m, lungo la parete dell'edificio a destra della scala, e l'altra perpendicolare da 6 m. Gli alunni hanno verificato che la pendenza fosse inferiore all'8% (Vedasi Fig. 7)

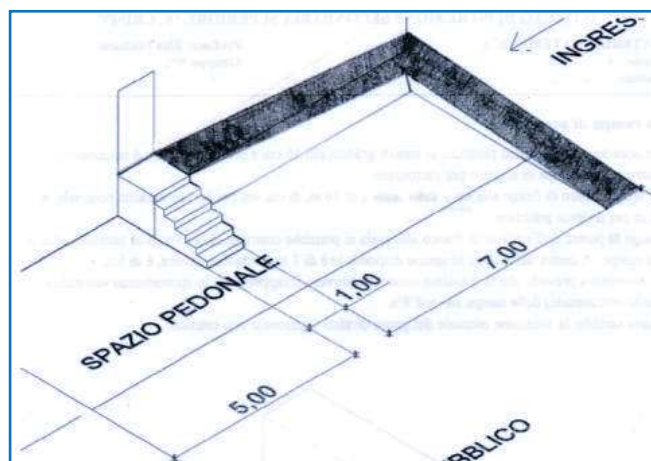


Fig. 7 - Grafico dello scivolo - Gruppo 2 - 4C

- Il gruppo 1 ha calcolato l'altezza dello scivolo: 0,96 m e, applicando la normativa, ha trovato la lunghezza minima (spostamento orizzontale) di 12 m. I ragazzi hanno proposto uno scivolo, lungo la parete a destra della scala, a due rampe parallele: ciascuna alta 0,48 m e lunga 6 m con un pianerottolo da 2 m x 1 m. (Vedasi Fig. 8)



Fig. 8 - Grafico dello scivolo - Gruppo 1 - 4C

Analisi

I disegni con le soluzioni proposte dai cinque gruppi sono rimasti sulla lavagna, seguendo l'ordine di presentazione. Per ogni soluzione la docente ha chiesto alla classe di trovare i punti di forza e i punti di debolezza.

Gli alunni dei gruppi 3 e 5, dopo aver ascoltato i gruppi successivi, si sono accorti di aver confuso il concetto di ampiezza dell'angolo di inclinazione della rampa con quello di pendenza espressa in percentuale. Quindi, le soluzioni proposte non erano corrette.

L'insegnante ha fatto notare la difficoltà, emersa nel processo risolutivo presentato dal gruppo 3, nel nominare le variabili del problema: c e x , h , b e y . Un integrante del gruppo ha evidenziato che, indipendentemente dal nome delle variabili, per la risoluzione del problema era importante la relazione fra b e c (h e c), cateti del triangolo rettangolo che rappresentava la rampa, o fra x e y , coordinate dei punti della retta che riportava l'inclinazione dello scivolo. In tutti due i casi la relazione è la tangente trigonometrica dell'angolo che forma la rampa con un piano orizzontale.

Alcuni studenti hanno segnalato che i gruppi 2 e 4 non avevano affrontato il problema dell'unione delle due rampe perpendicolari e hanno suggerito di creare un pianerottolo di un metro quadrato.

La docente ha chiesto alla classe di analizzare questa possibile soluzione nello scivolo proposto dal gruppo 4. Un alunno del gruppo 1 ha fatto notare che il pianerottolo sottraeva 1 m ad ogni rampa, quindi le rampe da 7 m e 5 m diventavano così da 6 m e 4 m rispettivamente. Di conseguenza dovevano essere aggiunti altri due metri di scivolo. La rampa perpendicolare alla parete diventava lunga 6 m, più 1 m di pianerottolo occupava 7 m, ostacolando completamente l'ingresso. Si rendeva necessario spostare l'ingresso nella zona del verde pubblico.

Gli alunni del gruppo 2, dopo aver ascoltato le riflessioni precedenti, si sono accorti dei propri errori e hanno suggerito di creare un pianerottolo di un metro quadrato e di allungare la seconda rampa di un metro. In questo modo la loro soluzione diventava uguale a quella del gruppo 4, con le stesse problematiche.

L'insegnante ha chiesto alla classe di analizzare la soluzione proposta dal gruppo 1. Ha fatto inoltre notare che la seconda rampa finiva contro la scala e quindi i gradini ostacolavano l'ingresso delle carrozzine. Un alunno del gruppo 1 ha suggerito di creare un secondo pianerottolo di un metro quadrato e di aggiungere una terza rampa di un metro di lunghezza, perpendicolare alle altre due. (Vedasi Fig. 9)

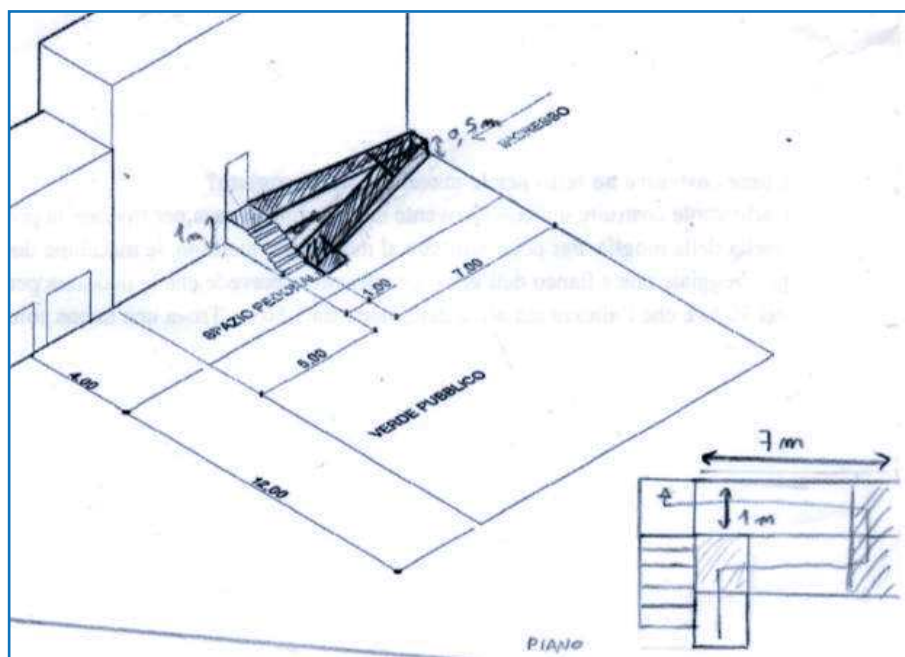


Fig. 9 - Grafico dello scivolo - Gruppo 1 – 4C

Generalizzazione

La docente ha chiesto agli alunni:

“Secondo voi, quale soluzione risulta ottimale dal punto di vista funzionale e/o estetico?”

Tutti gli studenti hanno considerato che la soluzione ottimale era quella proposta dal gruppo 1, perché non ostacolava l'ingresso, anche se ridotto da 4 m a 2 m, e perché risparmiava il verde

pubblico.

L'insegnante ha ripreso i concetti di tangente di un angolo, pendenza di una retta e pendenza espressa in percentuale, per offrire ulteriori chiarimenti agli alunni che hanno avuto qualche difficoltà nella fase di risoluzione.

La docente ha domandato agli alunni:

“Se doveste spiegare ad un muratore che la pendenza massima dello scivolo deve essere del 8%, come fareste? Possiamo parlare con il muratore della tangente dell'angolo?”. In questo modo l'insegnante ha spiegato alla classe che: *“La pendenza dell'8% significa che lo scivolo si alza 8 cm ogni 100 cm (ogni metro). Quindi un muratore farà il seguente calcolo: per una altezza di 96 cm, 96 diviso 8 è 12 ($96 \div 8 = 12$), quindi lo scivolo sarà lungo 12 m”*.

Successivamente i ragazzi hanno ricavato la regola generale per risolvere problemi di questo tipo, considerando che la pendenza di una retta (o semiretta), anche espressa in percentuale, rappresenta la tangente goniometrica dell'angolo che forma la retta (o semiretta) con il semiasse positivo delle ascisse.

Classe 4A

Comunicazione

Il relatore di ogni gruppo ha presentato il processo risolutivo e le soluzioni trovate.

- Il gruppo 4 ha calcolato l'altezza e la lunghezza dello scivolo: 0,96 m e 12 m rispettivamente, impostando un sistema di equazioni (Vedasi Fig. 10).

$$\begin{array}{l}
 h = 0,96 \text{ m} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{x} = 0,08 \\ y = 0,96 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{0,96}{x} = 0,08 \\ y = 0,96 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \cdot 0,08 = y \\ y = 0,96 \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{0,96}{0,08} \\ y = 0,96 \end{array} \right. \quad x = 12 \text{ m}
 \end{array}$$

Fig. 10 - Risoluzione prima parte del problema - Gruppo 4 – 4°

Il portavoce ha presentato alcuni calcoli superflui per trovare gli angoli acuti del triangolo rettangolo che rappresenta lo scivolo. Successivamente ha proposto di costruire uno scivolo lungo la parete dell'edificio a destra della scala, a tre rampe parallele lunghe 6 m, 5 m e 1 m, con due pianerottoli da 2 m x 1 m. (Vedasi Fig. 11)

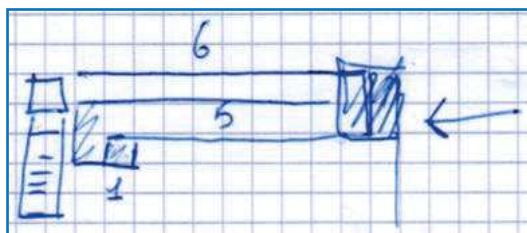


Fig. 11 - Grafico dello scivolo - Gruppo 4 – 4A

- Il gruppo 1 ha calcolato l'altezza della scala di 0,96 m. Il relatore ha proposto uno scivolo, lungo la parete dell'edificio, a destra della scala, a tre rampe con due pianerottoli da 2 m x 1 m. La prima rampa era alta 48 cm (pari a 3 gradini) e lunga 6 m, con una pendenza dell'8 %; la seconda aveva un'altezza di 32 cm (pari a 2 gradini) e una lunghezza di 5 m, con una pendenza del 6,4 %, e la terza era alta 16 cm (pari a 1 gradino) e lunga 2 m, con una pendenza dell'8 %. (Vedasi Fig. 12)

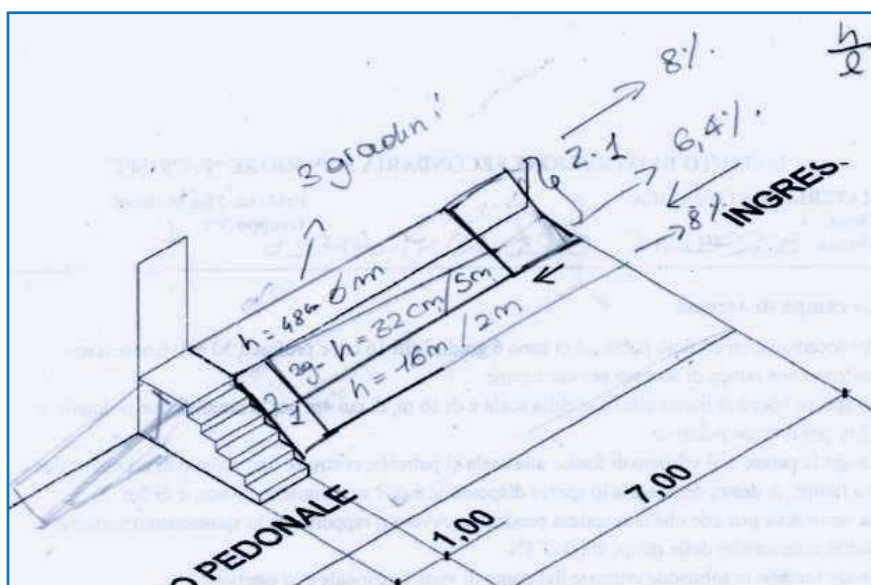


Fig. 12 - Grafico dello scivolo - Gruppo 1 – 4A

- Il gruppo 3 ha trovato l'altezza e la lunghezza dello scivolo e ha proposto la costruzione, sulla parte destra dell'edificio, di cinque rampe perpendicolari fra loro e di cinque pianerottoli. Le rampe avevano: una lunghezza pari a 3 m, 2,50 m, 1 m, 3,50 m e 2 m rispettivamente e una larghezza pari a 1 m in alcuni tratti e 0,50 m in altri. (Vedasi Fig. 13)

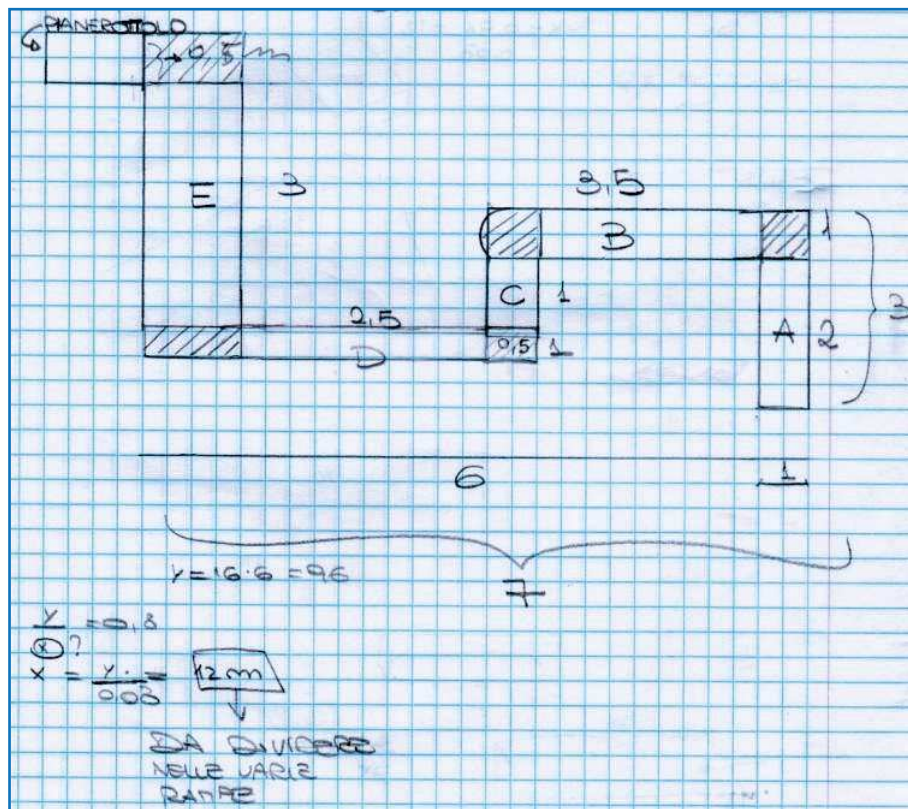


Fig. 13 - Grafico dello scivolo - Gruppo 3 – 4A

- Il gruppo 2 ha calcolato l'altezza e la lunghezza dello scivolo: 0,96 m e 12 m rispettivamente. Il portavoce ha proposto uno scivolo, lungo la parete dell'edificio a destra della scala, composto da tre rampe da 32 cm di altezza (pari a due gradini) e 4 m di lunghezza, con una pendenza dell'8%. Rispetto all'ingresso dello scivolo, i primi due pianerottoli erano da 2 m x 1 m e l'ultimo pianerottolo, quello adiacente alla scala, era da 1 m x 1 m. (Vedasi Fig. 14)

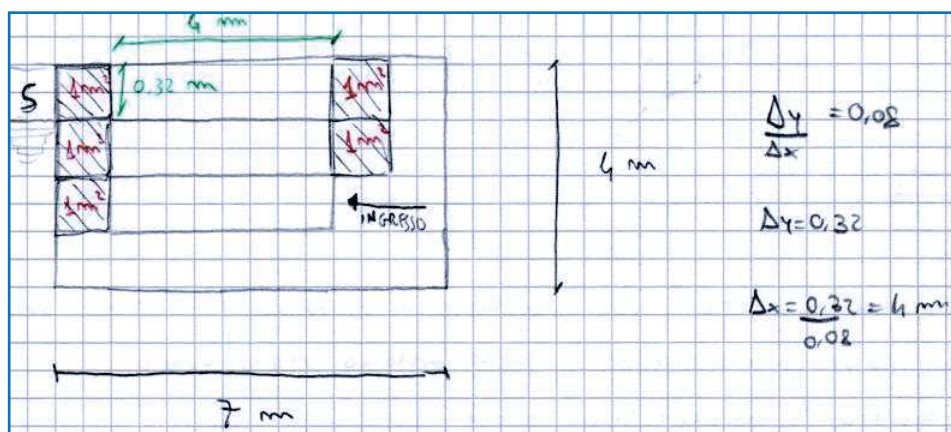


Fig. 14 - Grafico dello scivolo - Gruppo 2 – 4A

Analisi

I disegni con le soluzioni proposte dai quattro gruppi sono rimasti sulla LIM, seguendo l'ordine di presentazione. L'insegnante ha chiesto alla classe di trovare i punti di forza e i punti di debolezza delle soluzioni da loro proposte.

Gli alunni hanno segnalato che tutte le soluzioni rispettavano la normativa sulla pendenza massima; tuttavia la proposta del gruppo 3 presentava qualche problema, perché alcuni pianerottoli, da 50 cm di larghezza, erano troppo stretti per permettere il passaggio di una carrozzina. Qualche alunno ha fatto notare che il pianerottolo e la rampa dovevano avere la stessa larghezza pari a 1 m. Con questa modifica le rampe parallele alla parete dell'edificio da 2,50 m e da 3,50 m diventavano rispettivamente lunghe 3 m e 4 m, e se a queste misure si aggiungeva ancora la larghezza dell'ingresso di 1 m si arrivava ad una lunghezza complessiva di 8 m. Le rampe perpendicolari all'edificio avevano una dimensione di 5 m. In questo modo, parte dello scivolo (1 m) arrivava sul marciapiede o sulla strada, ostacolando completamente l'ingresso. Quindi la proposta del gruppo 3 non era una buona soluzione.

Gli studenti hanno constatato che le tre soluzioni presentate dai gruppi 1, 2 e 4 avevano caratteristiche simili, in quanto risparmiavano il verde pubblico e non intralciavano completamente l'ingresso.

Generalizzazione

L'insegnante ha chiesto alla classe:

“Secondo voi, quale soluzione risulta ottimale dal punto di vista funzionale e/o estetico?”

Gli studenti hanno rilevato che, nelle soluzioni proposte dai gruppi 1 e 4, l'ingresso veniva ridotto da 4 m a 2 m e il corridoio laterale per arrivare alla scala veniva ristretto a 2 m, nella prima parte, e a 1 metro, nella seconda. Nella proposta del gruppo 2, l'ingresso rimaneva invariato, ma il corridoio veniva ridotto a 1 m.

La maggior parte della classe riteneva che la soluzione ottimale era quella proposta dal gruppo 2, perché non modificava l'ingresso.

Allo stesso modo che nella classe 4 C la docente ha domandato agli alunni:

“Se doveste spiegare ad un muratore che la pendenza massima dello scivolo deve essere del 8%, come fareste? Possiamo parlare con il muratore della tangente dell'angolo?”.

La parte finale della fase di Generalizzazione corrisponde esattamente a quella descritta per la classe 4C.

Applicazione

In questa fase gli alunni delle due classi 4A e 4C dovevano applicare il concetto di pendenza e/o tangente di un angolo ad un nuovo problema reale.

La docente ha proposto la seguente consegna:

Come costruire un tetto per le macchine parcheggiate?

Carlo vuole costruire un tetto spiovente nel giardino di casa per riparare la propria macchina e quella della moglie. Per poter sfruttare al massimo il giardino, le macchine dovrebbero essere parcheggiate una a fianco all'altra. La normativa prevede che la massima pendenza della tettoia sia del 30 % e che l'altezza massima della falda sia di 1,50 m. Trova una buona soluzione per Carlo.

Questo problema ha dato inizio ad un nuovo ciclo esperienziale. La descrizione delle sue diverse fasi potrebbe essere l'obiettivo di un prossimo articolo.

Punti di forza dell'esperienza

- Ogni gruppo ha lavorato con grande entusiasmo, cercando la propria soluzione. Gli alunni con più difficoltà in Matematica sono stati fortemente coinvolti perché erano i relatori dei gruppi. Gli alunni più bravi di ogni gruppo cercavano di dare tutte le spiegazioni possibili al portavoce sulla soluzione trovata, in modo che egli potesse presentare adeguatamente il processo risolutivo durante la fase di *Comunicazione*.
- Le reazioni dei ragazzi nei confronti di questa modalità di lavoro sono state molto positive. Gli studenti hanno chiesto espressamente di poter utilizzare questa metodologia con maggior frequenza.
- Questa esperienza ha permesso agli studenti:
 - Di esprimere la loro creatività nel lavoro di gruppo
 - Di difendere il proprio punto di vista, motivando le scelte effettuate ed elaborando argomentazioni coerenti
 - Di capire e di accettare il punto di vista degli altri
 - Di lavorare in gruppo in modo collaborativo.

Punti di debolezza dell'esperienza

Il portavoce di qualche gruppo non è riuscito a spiegare dettagliatamente il procedimento eseguito e/o la soluzione trovata, quindi i compagni volevano intervenire.

La docente ha fatto notare che solo il relatore del gruppo poteva parlare e ha posto qualche domanda allo studente in difficoltà perché potesse spiegare meglio il processo risolutivo svolto.

Conclusione

Nella classe 4C, durante la fase di *Esperienza*, sono emerse delle difficoltà nel processo di nominalizzazione delle variabili del problema e qualche preconcetta o misconcezione. Ad esempio, alcuni studenti hanno confuso la nozione di ampiezza di un angolo (inclinazione della rampa) con quella di pendenza espressa in percentuale. Abbiamo anche osservato nelle due classi una certa rappresentazione ingenua sulle “cose del mondo”, quello che la Zan (2010) chiama *conoscenza enciclopedica*. Alcuni esempi di idee ingenuie: collegare due rampe successive di uno scivolo senza prevedere un pianerottolo; progettare le rampe o i pianerottoli per il passaggio di carrozzine, senza considerare la larghezza standard di una carrozzina (sicuramente maggiore di 50 cm), ecc.

Nella classe 4A non sono emerse misconcezioni e tutte le soluzioni proposte, alcune migliori di altre, rispettavano la normativa.

In questa sperimentazione gli studenti hanno avuto la possibilità di confrontare i diversi processi risolutivi di un problema aperto, di trovare i punti di forza e i punti di debolezza di ogni soluzione e di individuare le “buone soluzioni”. Per poter compiere queste attività gli alunni hanno dovuto riflettere sui propri modelli interpretativi e sulle proprie strategie operative adottate per risolvere il problema; in questo modo essi hanno dovuto esercitare le capacità

autoriflessive e autoregulative (Cfr. Trincherò 2012, 2015).

È interessante mettere in evidenza che con questa modalità di lavoro l'apprendimento diventa un processo costruttivo e sociale, perché lo studente costruisce, ricostruisce e/o modifica le proprie rappresentazioni mentali anche attraverso gli scambi e il confronto con gli altri.

I ragazzi hanno focalizzato l'attenzione non tanto sulla soluzione del problema, ma soprattutto sul processo risolutivo, in quanto dovevano: saper spiegare perché avevano risolto il problema proprio in quel modo (fase di *Comunicazione*), ricavare la regola con la quale è possibile affrontare problemi dello stesso tipo (fase di *Generalizzazione*) e applicare quanto appreso ad una nuova situazione (fase di *Applicazione*) (Cfr. Trincherò 2012, 2015).

Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Deposito dei materiali dell'attività

Al seguente link sono depositati eventuali materiali inerenti questo l'articolo. Questi materiali nel tempo potranno essere modificati e arricchiti seguendo l'evoluzione delle idee sottostanti o/e future sperimentazioni svolte dall'autore dell'articolo.

<http://www.edimast.it/J/20160202/03390356MA/>

Note

1. Una misconcezione è un concetto errato, ma chiamarle errori è troppo semplicistico e banale. Lo studente rivela le proprie misconcezioni quando applica correttamente regole scorrette. Spesso, all'origine di questo fatto c'è una mancata comprensione od un'errata interpretazione. Dunque, le misconcezioni si possono interpretare come concezioni momentanee non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica (D'Amore, 2014).
2. Nell'ultimo passaggio della risoluzione mostrata in Fig. 3 si osserva un errore nell'approssimazione $7,97 \approx 0,08$. Dal ragionamento seguito dagli studenti si evince che essi volessero scrivere $7,97 \approx 8\%$. Questa scrittura rappresenta un nuovo errore che verrà affrontato nella fase di Analisi.
3. Nella risoluzione presentata in Fig. 4 gli studenti evidenziano certe difficoltà nel nominare le variabili del problema: la base del triangolo viene chiamata c e x , l'altezza h , b e y . Le lettere b , c e h si utilizzano generalmente nell'ambito della risoluzione di problemi sui triangoli rettangoli o sui triangoli qualsiasi; le variabili x e y si usano soprattutto nel contesto della geometria analitica, per esprimere, ad esempio, l'equazione della retta. Si rileva in questa risoluzione quello che Arzarello et al. (1994), chiamano difficoltà nel processo di nominalizzazione (Cfr. anche Malisani & Spagnolo, 2009).

Bibliografia

- Arzarello F., Bazzini L. & Chiappini G., (1994). *L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*. Progetto Strategico CNR – Tecnologie e Innovazioni Didattiche, Quaderno n. 6.
- Bolondi G., (2014). Le valutazioni esterne in matematica (prove Invalsi, TIMSS, OCSE-Pisa): utilità, limiti, ricadute. *Atti del Convegno Nazionale "La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire"*. Associazione Asfodelo - Nucleo di Ricerca in Didattica dell'Università di Bologna. Tricase (Lecce), pp. 10-13. Testo disponibile online su Internet

- <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/818%20Atti%20Tricase%20e%20Prefazione.pdf> (verificato accesso in data 31/08/3016).
- Comunità europee, (2009). Quadro Europeo dei Titoli e delle Qualifiche (EQF). Brochure italiana, pag. 11. https://ec.europa.eu/ploteus/sites/eac-eqf/files/broch_it.pdf (verificato accesso in data 12/08/2016).
- D'Amore B., (2014). La ricerca in didattica della matematica e la sua applicazione concreta in aula. *Atti del Convegno Nazionale "La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire"*. Associazione Asfodelo - Nucleo di Ricerca in Didattica dell'Università di Bologna. Tricase (Lecce), pp. 14-17. Testo disponibile online su Internet <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/818%20Atti%20Tricase%20e%20Prefazione.pdf>, (verificato accesso in data 31/08/3016).
- INVALSI, (2013). OCSE PISA 2012. Sintesi dei risultati per l'Italia. http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012/rappnaz/Sintesi_OCSE_PISA_2012.pdf, (Verificato accesso in data 09/09/2016).
- Malisani E. & Spagnolo F., (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: the role of the "variable". *Educational Studies in Mathematics*, 71(1), 19-41. Testo disponibile online su SpringerLink web site: <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-008-9157-x>. DOI 10.1007/s10649-008-9157-x. ISBN 0013-1954 (Print) 1573-0816 (Online).
- MIUR, (2007). Decreto Ministeriale 139 del 22/08/2007. Regolamento recante norme in materia di adempimento dell'obbligo di istruzione, pag. 4, 18. http://archivio.pubblica.istruzione.it/news/2007/allegati/obbligo_istruzione07.pdf, (Verificato accesso in data 09/09/2016).
- OECD, (2013). PISA. Risultati PISA 2012. <https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-italy-ITA.pdf>, (verificato accesso in data 09/09/2016).
- Pfeiffer J. W., Ballew A., (1988). *Using Structured Experiences in Human Resource Development*. San Diego, University Associates.
- Pfeiffer J. W., Jones, J. E., (1985) (eds.). *A Handbook of structured experiences for human relations training*, Vols. 1-10. San Diego, University Associates.
- Trincherò R., (2006). *Valutare l'apprendimento nell'e-learning. Dalle abilità alle competenze*. Trento, Erickson, pp. 195-229.
- Trincherò R., (2012). *Costruire, valutare, certificare competenze. Proposte di attività per la scuola*. Milano, Franco Angeli.
- Trincherò R., (2015). *Apprendere dall'esperienza per costruire competenza*. Un approccio evidence-based. <http://www.edurete.org/ps/sp.asp?id=3>, (Verificato accesso in data 13/08/2016).
- Zan, R., (2010). *L'errore in matematica: alcune riflessioni. Materiale del Piano Nazionale Qualità e merito (PQM)*. Firenze, INDIRE.

L' Autrice

**Elsa Malisani (PhD)**

Istituto di Istruzione Secondaria Superiore “F. Crispi”

Via Presti, 2 – 92016 Ribera (AG)

e.malisani@alice.it

Italia

Laureata in Matematica, ha conseguito nel marzo 2006 il Dottorato di Ricerca in *Didattica della Matematica*. Docente a tempo indeterminato di Matematica e Fisica. Professoressa a contratto nei corsi S.I.S.S.I.S. di Palermo dal 2006 e nei corsi T.F.A. di Palermo ed Enna dal 2013.

Collabora da anni con l'INDIRE (Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa) e con l'INVALSI (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione).

Formatrice accreditata in “Valutazione degli apprendimenti e di sistema” – SNV. Si occupa da anni della formazione dei docenti di livello primario, medio e superiore.

Ha svolto attività di ricerca in Didattica della Matematica presso l’“Istituto Rosario de Investigación en Ciencias de la Educación” (IRICE) di Rosario (Argentina) e il “Gruppo di Ricerca in Didattica della Matematiche” (G.R.I.M.) di Palermo

È autore di numerosi articoli su Didattica della Matematica e ha partecipato a numerosi convegni nazionali e internazionali come relatrice.

Received July 18, 2016; *revised* September 16, 2016; *accepted* October 21, 2016; *published online* November 4, 2016

Open Access This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)



Who is afraid of active teaching?

Flavia Giannoli

Abstract. *The educational demands of nowadays global society, described as “liquid society” (Bauman, 2011), are extremely complex. Traditional teaching methods used in schools are not sufficient for a complete formation, therefore is necessary to switch from a society based on knowledge to a society based on competencies. The methodological aspect in school plays a central role within the society. An accurate didactic planning based on active and cooperative teaching methods is, therefore, essential. The “Innovative Design” method propose useful tools and teaching techniques for developing effective learning paths and guarantee a successful formation in the 21th-century school.*

Key words. *Formation, 21st-century Competencies, Active Didactic, Cooperative Learning, Augmented Didactic.*

Sommario. *(Chi ha paura della didattica attiva?). Le richieste formative della moderna società globalizzata, tecnologica e liquida (Bauman, 2011) sono molto complesse. Andare a scuola non basta più alla formazione: è necessario passare dalla società delle conoscenze a quella delle competenze. L’aspetto metodologico a scuola diventa centrale e pone i contenuti in diversa posizione all’interno del sistema: diventa necessaria un’accurata progettazione didattica per competenze, basata sulle metodologie didattiche attive e cooperative. Il Metodo Innovative Design dei processi educativi propone strumenti e modalità progettuali sinergici per creare percorsi didattici efficaci e realizzare il successo formativo nella scuola del XXI secolo.*

Parole chiave. *Formazione, Competenze del XXI secolo, Didattica attiva, Apprendimento cooperativo, Didattica aumentata.*

Introduzione

Le richieste formative della moderna società globalizzata, tecnologica e liquida sono decisamente complesse. Andare a scuola non basta più alla formazione e di per sé non garantisce l’acquisizione delle necessarie competenze per affrontare la società del XXI secolo: è necessario passare dalla società delle conoscenze a quella delle competenze.

La competenza è orientata alla soluzione concreta delle situazioni da parte dello studente, pertanto non può essere “insegnata”, ma richiede una specifica strategia metodologica nella didattica per essere sviluppata dai ragazzi stessi. L’aspetto metodologico a scuola diventa centrale e pone i contenuti in diversa posizione all’interno del sistema. Si devono attuare

efficaci modelli di lavoro e percorsi didattici che consentano di realizzare apprendimenti significativi, cooperativi e flessibili, potenziando le competenze-chiave, previste anche dalla normativa dell'ultimo decennio sia in Europa che in Italia.

Quadro e contesto

Le competenze di cittadinanza (Italia, 2006) si possono aggregare in tre gruppi significativi mostrati in tabella (Tab.1):

Tabella 1: Competenze di cittadinanza

Costruzione del sé	- Imparare ad imparare - Progettare
Relazione con gli altri	- Comunicare - Collaborare e partecipare - Agire in modo autonomo e responsabile
Rapporto con la realtà	- Risolvere problemi - Individuare collegamenti e relazioni - Acquisire ed interpretare l'informazione

Molto spesso si sente affermare che per sviluppare queste competenze basti fare lavorare i ragazzi insieme ed i docenti si adoperano per assegnare agli studenti una ricerca o qualche esercizio da portare a termine in coppia o piccoli gruppi. Nulla di più riduttivo: un conto è il lavoro in gruppo ed un altro il lavoro di gruppo! Il primo si risolve in una giustapposizione di contributi singoli, elaborati ciascuno per conto proprio, senza quasi interazione tra i membri del gruppo. Il secondo, invece, si basa sui principi dell'apprendimento cooperativo e ciascun componente del gruppo dà il proprio contributo interagendo e relazionandosi con gli altri membri.

Cooperative learning.

L'apprendimento cooperativo è apprendimento sociale: ciascuno contribuisce alla costruzione dei concetti all'interno del gruppo. L'insegnante assume il ruolo di facilitatore ed organizzatore delle attività allo scopo di rendere efficace la cooperazione strutturando ambienti di apprendimento in cui gli studenti, favoriti da un clima relazionale positivo, trasformano ogni attività di apprendimento in un processo di "*problem solving di gruppo*". Vengono così conseguiti obiettivi di apprendimento la cui realizzazione richiede il contributo personale di tutti (Pavan, 2013).

Didattica attiva

La metodologia didattica attiva è basata sul "*learning by doing*": è di tipo laboratoriale e parte dalla sperimentazione di situazioni o attività che stimolano la riflessione personale e di gruppo sull'esperienza di apprendimento e favoriscono la crescita personale e la consapevolezza di sé tramite l'interazione tra pari e con il docente facilitatore. Le attività proposte spaziano dalle simulazioni alle attività ludiche, dal role playing ai giochi di conoscenza, case study etc.

L'importanza dei gruppi

L'insegnante cura in modo particolare la formazione dei gruppi perché tutti abbiano le stesse funzionalità e risorse educative:

- Il *Cooperative learning* predilige il gruppo eterogeneo e in particolare quello per differenze di capacità perché offre maggiori possibilità di tutoring, di aiuto reciproco e di integrazione di diversità socio-culturali.
- È bene che i gruppi siano piccoli: il numero ristretto facilita l'interazione, l'assunzione di responsabilità, la collaborazione, la soluzione di problemi che possono insorgere.

Lifelong learning

Le competenze in tabella (Tab.1) non sono da ritenere acquisibili una volta per tutte, ma invece sono oggetto di continua evoluzione nel corso della vita. Si inizia a lavorare in gruppo fin da piccoli e non si finisce mai, nel campo dello studio e del lavoro (Fig.1). Anche nella scuola non esiste più il docente “monade” e la capacità di interagire con gli altri produce risultati professionali preziosi: “Insieme è meglio, insieme è più facile” (A. Ardizzone, 2016). La competenza “imparare ad imparare” e quella del “progettare” sono le chiavi della costruzione del sé, della capacità di informarsi e dirigersi con successo per la vita, aggiornandosi in continuo per restare all'altezza delle richieste sociali e lavorative.



Fig.1 – Lavorare in gruppo

Migliorare I Processi Educativi

È urgente che la programmazione scolastica si adegui alle nuove necessità formative ed affronti la sfida di mettere la richiesta di competenze trasversali alla prova della didattica: anche se la didattica per competenze è già nella normativa della scuola, essa in realtà non dimostra ancora il suo dinamismo formativo nel vissuto delle aule.

Percorsi di apprendimento

Per migliorare i processi educativi è oggi indispensabile un'accurata e lungimirante progettazione dell'azione didattica: la Scuola del XXI secolo diviene la via per l'acquisizione di competenze complesse, non più di soli saperi disciplinari specifici e suddivisi in comparti stagni. Non basta più "svolgere il programma": si richiedono progetti di ampio respiro, dilatati nel tempo durante tutti gli anni della formazione scolastica, che coinvolgano anche emotivamente tutti i partecipanti al processo di apprendimento/insegnamento, per lo sviluppo responsabile delle competenze di cittadinanza e dell'autonomia personale. I percorsi di apprendimento si sviluppano in progettazioni didattiche specifiche, aderenti al contesto reale della scuola di appartenenza, che tengano conto del vissuto pregresso delle classi e, possibilmente, delle persone, e che puntino ad obiettivi finali SMART (*Specifici, Misurabili, Accessibili, Realistici, Temporizzati*). I percorsi di apprendimento partono dalle Indicazioni nazionali per le discipline, tengono conto delle competenze trasversali, che vanno certificate, e puntano alla formazione della persona e del cittadino del XXI secolo.

Progettazione didattica

Ogni progettazione didattica inizia con la scelta di uno specifico obiettivo didattico da affrontare: lo sviluppo di un'unità di apprendimento interdisciplinare o di un approfondimento disciplinare, come lo sviluppo di un segmento di programmazione annuale o quello di un'attività integrativa. Tuttavia, una volta effettuata la scelta dell'obiettivo didattico, molti docenti si trovano in difficoltà a realizzare il percorso con le metodologie didattiche attive necessarie per la realizzazione degli obiettivi di apprendimento fissati, soprattutto se trasversali. Le scarse disponibilità di spazi e tempi adeguati a scuola spesso mettono a dura prova l'entusiasmo iniziale dei docenti innovatori. Lo scetticismo di molti intorno fa il resto... e si torna alla scuola del programma: in sala professori si sente ancora dire "dove sei arrivato col programma?"

Il Progetto Innovative Design dei processi educativi

Il Progetto Innovative Design dei processi educativi è nato proprio per rispondere alle attuali esigenze formative da parte dei docenti di ogni ordine e grado, pressati dalle richieste europee di Lisbona 2020 e dall'introduzione delle nuove tecnologie.

Il progetto, finanziato da Fondazione TIM e gestito da ANP (Associazione Nazionale Presidi), è partito nel 2012 ed ha visto collaborare per due anni cento *docenti innovatori*, selezionati da tutta Italia e di ogni ordine e grado. Essi hanno studiato strumenti e modalità innovative da mettere in atto per una didattica quotidiana incentrata sulle competenze trasversali oltre che su quelle disciplinari, nella quale si faccia uso delle tecnologie, esse stesse oggetto di specifica acquisizione di competenza. Ne è nata una guida flessibile per innovare la didattica in classe: il *Service Design Thinking* per insegnanti, nella quale viene proposta una metodologia didattica centrata sulla persona, co-creativa, olistica, sequenziale ed evidente, progettata per favorire lo sviluppo della creatività, dello spirito di iniziativa e della fiducia in se stessi nei ragazzi.

Il Metodo è stato prima sperimentato nelle proprie classi dai cento docenti innovatori ed ulteriormente affinato, poi da altrettanti sperimentatori che, durante il terzo anno di durata del progetto, si sono cimentati in un contesto nazionale per il miglior progetto didattico realizzato. (Sito, 2012-16); (Giannoli, 2015).

Una strategia didattica per il successo formativo

L'*Innovative Design Thinking* è una modalità strutturata per sviluppare il processo di apprendimento-insegnamento, volta a generare ed a portare a maturazione le idee per conseguire gli obiettivi di apprendimento.

Le parole d'ordine sono: competenza, flessibilità, autonomia, responsabilità, acquisizione della capacità di "resilienza" (tecnicamente: resistenza agli urti dei materiali) per affrontare le prove e portare a successo le iniziative.

“Ogni conoscenza è il risultato di una costruzione personale,
che implica un momento esplorativo e uno critico”

M. Pellerey

Sviluppando le quattro Fasi di progettazione (Fig.2) ed utilizzando gli strumenti specifici per la didattica attiva proposti, l'*Innovative Design Thinking* guida l'evolversi della progettazione.

Si parte dall'identificazione del tema (Esplorazione), attraverso l'Ideazione e lo Sviluppo nella pratica didattica fino alla sua Sperimentazione in classe ed alla riflessione metacognitiva sul processo di apprendimento da parte dei protagonisti.



Fig.2 – Le quattro Fasi di progettazione

Durante le Fasi, l'insegnante innovatore rompe gli schemi scolastici tradizionali facendo ricorso a metodi e strumenti didattici (Fig.3) inusuali rispetto alle normali procedure di insegnamento-apprendimento: si tratta di strumenti cooperativi mutuati dall'esperienza di formazione e/o procedure del mondo del lavoro adattate al contesto scolastico. L'utilizzo delle schede a disposizione favorisce il corretto svolgersi del lavoro in classe nel modo più consono alle necessità di una formazione per l'acquisizione di competenze complesse. (Giannoli, 2014)



Fig. 3 – Gli strumenti per la didattica attiva

Articolazione del Metodo Innovative Design

L'*Innovative Design* è profondamente legato alle capacità delle persone di essere intuitive, di saper interpretare ciò che si osserva e, di conseguenza, di sviluppare idee e soluzioni significative anche dal punto di vista emozionale e partecipativo (Cianfriglia et al., 2015).

Il ritmo delle Fasi

Ognuna delle 4 fasi del metodo segue un ben preciso ritmo (Fig.4) per favorire la creatività e la progettualità.

All'inizio ci si apre a tutte le idee possibili (fase divergente); segue poi una fase in cui esse vengono esaminate e raggruppate (cluster = grappolo). Infine, l'ultima, importantissima, fase

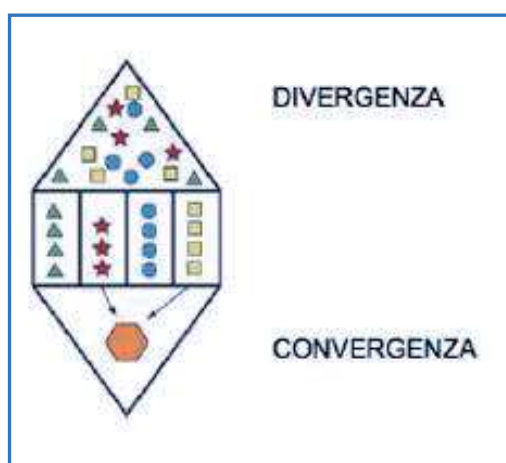


Fig. 4 – Il ritmo nelle fasi del processo di design

convergente, nella quale si sceglie e si seleziona la via per proseguire. Questa modalità ritmica caratterizza l'*Innovative Design* e permette di innovare profondamente le attività didattiche,

lasciando spazio di espressione e di scelta agli alunni, che vengono così più coinvolti e responsabilizzati nel processo di apprendimento.

Come su una comoda scala

L’Innovative Design suggerisce una sequenza di passi chiave (24 “gradini”) per sviluppare efficacemente il processo di apprendimento durante le 4 fasi in modo da raggiungere con successo gli obiettivi didattici. (Giannoli, 2015)

È importante seguire questi passi con grande elasticità e flessibilità: alcuni potranno essere oggetto di dilatazione ed approfondimenti inizialmente non previsti, mentre altri potrebbero essere ridotti al minimo o anche saltati, a seconda dei bisogni e delle opportunità che emergono di volta in volta. Nessun processo di apprendimento può essere rigidamente prefissato, pena lo snaturarsi del processo stesso.

1) *Esplorare*

1. Identificazione della sfida/problema
2. Ricerca e analisi delle informazioni e delle opportunità
3. Analisi strutturata del contesto
4. Identificazione dei bisogni
5. Creazione di ipotetici scenari

Durante questa fase si rompe il tradizionale binomio trasmissivo docente – allievo perché gli allievi stessi vengono interpellati e coinvolti direttamente nell’analisi e/o ricerca critica delle fonti, nella definizione del problema e nella ricerca di soluzioni alternative.

L’insegnante funge da organizzatore delle tempistiche e delle attività e poi da facilitatore, proponendo le fonti e moderando la discussione in classe.

L’utilizzo degli strumenti innovativi facilita l’ascolto e l’espressione dei bisogni degli allievi ed incoraggia l’espressione delle esigenze, manifeste o latenti, nella ricerca di una soluzione.

Gli strumenti divergenti e di esplorazione consigliati per questa fase sono:

Il Cerchio delle Opportunità, la Catastrofe strategica, il metodo delle “5 W + H” (*Chi, Cosa, Dove, Quando, Perché, Come*).

I metodi per la definizione e la risoluzione del problema sono poi le *Checklist*, la Tecnica della Ridefinizione.

Dal punto di vista tecnologico in questa fase è possibile realizzare l’ampliamento degli orizzonti fisici della classe mediante l’utilizzo della Rete per la ricerca delle informazioni e lo sfruttamento delle potenzialità del Web 2.0 con l’utilizzo di Software ed App gratuite per la costruzione delle mappe mentali (Mindmeister, Lucidchart, Mindomo...) o l’utilizzo di lavagne elettroniche virtuali (Padlet, Lino) per i Brainstorming o le clusterizzazioni.

2) *Ideare*

6. Generazione di idee (in modo spontaneo)
7. Definizione di un ventaglio possibile di idee
8. Organizzazione e analisi delle idee raccolte
9. Valutazione delle idee raccolte
10. Selezione delle idee considerate più efficaci

11. Maggiore definizione delle idee selezionate
12. Individuazione della/e idea/e che si vuole sviluppare

Durante questa fase sono favoriti l'esperienza diretta, l'utilizzo della multimedialità, la messa in atto dei metodi della didattica attiva nel favorire la partecipazione dello studente al processo di apprendimento ed il suo divenire protagonista. Infatti, sono i ragazzi a dover effettuare la scelta di cosa privilegiare e selezionare per la fase successiva.

Gli strumenti innovativi a disposizione dell'insegnante in questa fase sono il Brainstorming, le Connessioni visive forzate, l'analisi SWOT, la Scheda delle idee, gli Sticking Dots.

Uno degli aspetti metodologici più innovativi di questa fase è lo sviluppo del pensiero laterale, solitamente non molto incentivato dalle tradizionali procedure d'insegnamento.

3) *Sviluppare*

13. Definizione dei destinatari
14. Definizione degli strumenti, risorse e mezzi più convenienti per la realizzazione dell'idea
15. Identificazione di ulteriori azioni di miglioramento
16. Perfezionamento dell'idea
17. Sviluppo pratico dell'idea
18. Creazione di un protocollo e di un modello

Durante questa fase si realizza la costruzione collaborativa dei saperi attraverso l'interazione, la laboratorialità e la simulazione: vengono messe in atto le metodologie tipiche del Cooperative learning per portare a sintesi l'apprendimento dei concetti in maniera significativa.

Nella progettazione e realizzazione del prodotto si passa dall'idea astratta emersa nella fase precedente a qualcosa di tangibile e concreto, realizzato nel contesto scolastico reale: il prodotto dell'Unità di Apprendimento, il compito autentico da portare a termine.

Gli strumenti suggeriti sono la Matrice di valutazione, la Verifica di Fattibilità, la Matrice RACI (Matrice di responsabilità), il Reality Check, la Pianificazione dei test (per la verifica durante la sperimentazione).

In questa fase si privilegia lo sviluppo della creatività, ma anche dello spirito critico e della capacità di autovalutazione perché in realtà il prodotto portato a termine non è altro che una sorta di "prototipo", che dovrà essere sperimentato e validato prima di diventare definitivo.

4) *Sperimentare*

19. Applicazione della soluzione a diversi contesti reali
20. Verifica del corretto funzionamento in base alle esigenze iniziali
21. Raccolta dei feedback
22. Valutazione dei feedback
23. Analisi dei punti di forza ed individuazione delle aree di miglioramento
24. Implementazione del modello finale

Questa fase rappresenta una notevole innovazione nel contesto usuale di apprendimento/insegnamento, nel quale la valutazione è peculiarità del docente ed al più si prevedono presentazioni nella classe o presentazioni/recite per i genitori. Invece qui si tratta di chiedere un

feedback di ritorno ad un contesto reale esterno alla singola classe e recepirlo come verifica significativa che il prodotto risponda ai requisiti richiesti ed raggiunga gli obiettivi desiderati. In relazione al risultato emerso dalla verifica occorrerà procedere al miglioramento del prodotto stesso ed alla soluzione delle criticità, con l'apporto delle necessarie modifiche. Solo alla fine si potrà implementare il progetto ed il prodotto in forma definitiva.

Gli strumenti proposti per questa fase sono il Test di usabilità, l'Analisi integrativa dei feedback, la Valutazione per definire il successo.

In questa ultima fase si realizza un apprendimento responsabile, sviluppato tramite una didattica partecipativa nella quale sono valorizzati il confronto ed feedback anche esterno in tempo reale per la valutazione e l'autovalutazione critica allo scopo di validare un prodotto, non solo di "ottenere un voto". La valutazione degli apprendimenti non può ridursi alla media dei risultati di interrogazioni e compiti in classe su una parte limitata degli argomenti di una sola disciplina, ma è opportuno che si dispieghi lungo le fasi di un processo di apprendimento armonico e sistematico per l'acquisizione delle competenze europee e di cittadinanza. Con l'approccio dell'Innovative Design cambia la modalità di valutazione, terrore dei ragazzi ed incubo dei professori (che "devono" avere il "congruo" numero di voti a fine anno) in modo che essa non risulti più un momento isolato (e mal vissuto dai ragazzi), ma divenga l'espressione di una didattica inclusiva e di una autovalutazione responsabile, in cui tutti si esprimano, tutti i giorni, ed abbiano un ruolo da protagonisti nel proprio processo di apprendimento.

Innovare è possibile!

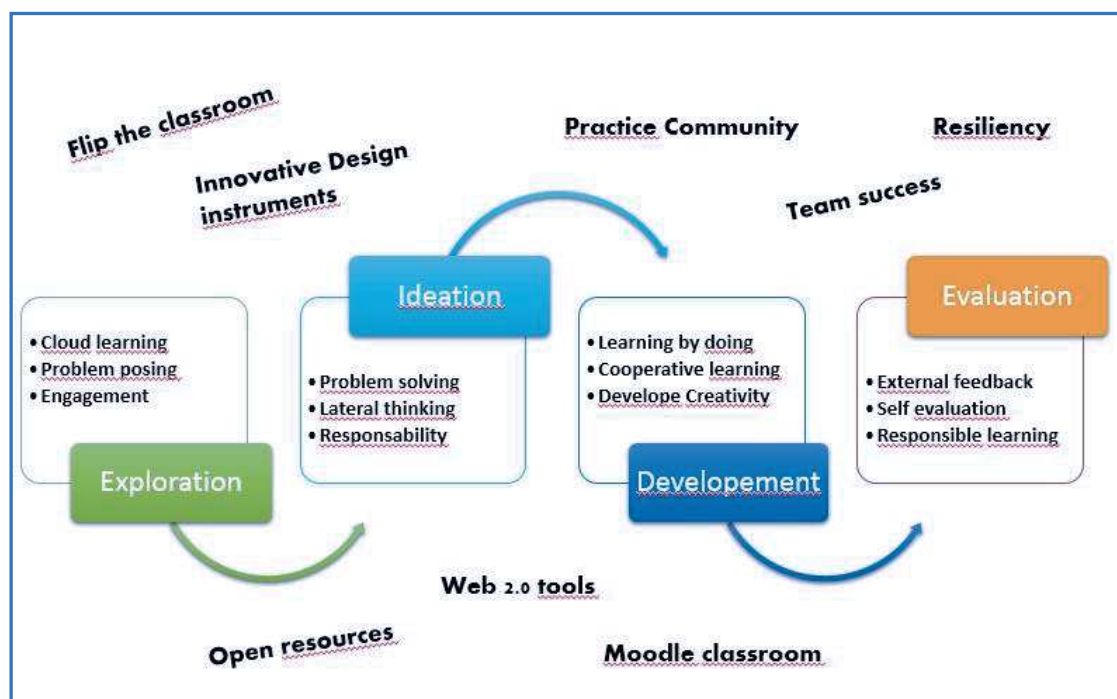


Fig. 5 – L'approccio Innovative Design

L'approccio metodologico dell'Innovative Design (Fig.5) apre, come raccomandato da Salman Khan, fondatore della Khan Academy (Khan, 2012), alla realizzazione di una didattica partecipata ed attiva, che permetta di:

- Concentrarsi sul contenuto
- Sviluppare una pedagogia della padronanza
- Cambiare le abitudini
- Utilizzare il problem solving in aula
- Praticare il gioco e sviluppare la creatività.

Inoltre, il percorso di istruzione diventa un progetto per lo sviluppo di competenze personali, realizzato in autonomia e responsabilità (Fig.6).

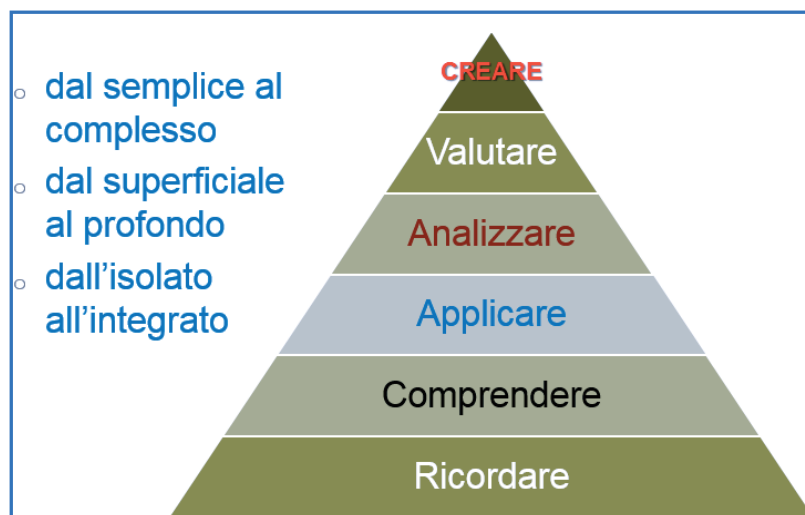


Fig.6 – Didattica per competenze (tassonomia di Bloom rivisitata)

Conclusione

È evidente che il rinnovamento della didattica non consiste solo nell'utilizzo delle tecnologie, ma soprattutto nell'aprirsi alle necessità di un'educazione moderna, che formi i ragazzi a vivere da protagonisti in una società complessa. Non si tratta solo di mode “Flipped classroom”, “Role playing”, “Storytelling” o di utilizzo di questa o quella tecnologia, ma soprattutto di cambiare l'approccio degli studenti nello stare a scuola: non più come spettatori “zitti ed attenti”, ma da attori principali.

La scuola è chiamata sempre più a divenire una comunità vivibile, sostenibile, accogliente, inclusiva, nella quale le persone generino nuove forme di quotidianità attraverso la collaborazione tra pari e la cooperazione costruttiva tra studenti e studenti, tra docenti e tra docenti e studenti. È necessario che a Scuola si formino reti sociali e che i ragazzi imparino a divenire cittadini responsabili e consapevoli, capaci di informarsi e di comunicare, capaci di lavorare insieme agli altri in modo etico.

L'Innovative Design aiuta la progettazione di una didattica per competenze seria, che parta, sì, dai programmi disciplinari per sviluppare abilità e conoscenze disciplinari, ma si apra all'utilizzo interdisciplinare di queste per risolvere problemi complessi e mettere i ragazzi in grado di affrontare prove autentiche. Il metodo Innovative Design potenzia l'acquisizione della

competenza chiave “Imparare ad imparare”, per un corretto informarsi e formarsi durante tutta la vita.

Le slide di questo intervento al Meeting 2016 Docenti Virtuali & Insegnanti 2.0 sono a disposizione su Slideshare (Giannoli, 2016).

Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Deposito dei materiali dell'attività

Al seguente link sono depositati eventuali materiali inerenti questo l'articolo. Questi materiali nel tempo potranno essere modificati e arricchiti seguendo l'evoluzione delle idee sottostanti o/e future sperimentazioni svolte dall'autore dell'articolo.

<http://www.edimast.it/J/20160202/03570368GI/>

Acknowledgements

My thanks to the anonymous reviewers for reading and commenting on the early drafts of this article.

Bibliografia e Linkografia

- Ardizzone A., (2016). *Porte aperte sul web*, <http://www.porteapertesulweb.it/> (verificato in data 11/07/2016)
- Bauman Z., (2012). *Modernità Liquida*, Laterza e figli, Bari-Roma, 2011.
- Cianfriglia L., Cigliano M. C., Rosti R., Di Lauro A., Canina M., Anselmi L., (2014). *Innovative Design dei processi educativi scolastici*, Ideactivity Center.
- Giannoli F., (2015). *Innovative Design, La storia di un successo*, <https://sway.com/PxrneJ4yNR2oSj0R> (verificato in data 10/07/2016)
- Giannoli F., (2014). e-book introduttivo, <http://www.epubeditor.it/ebook/?static=12817> (verificato in data 10/07/2016)
- Giannoli F., (2016). Slide dell'intervento al *Meeting Docenti Virtuali & Insegnanti 2.0*, <http://www.slideshare.net/almitra/chi-ha-paura-della-didattica-attiva> (verificato in data 08/08/2016)
- Indire, *Competenze chiave europee (Lisbona)* <http://www.indire.it/content/index.php?action=read&id=1507> (verificato in data 10/08/2016)
- Innovative Design, <http://www.innovazioneinclasse.it/> (verificato in data 16/07/2016)
- Italia, (2006). Legge 296 del 27 dicembre 2006, <http://www.parlamento.it/parlam/leggi/06296l.htm> (verificato in data 13/08/2016)
- Khan S., (2012). *La scuola in rete*, Corbaccio, Milano.
- Pavan D., Ellerani P.G., (2013). Cooperative learning, *Educazione&Scuola*,

http://www.edscuola.it/archivio/comprendivi/cooperative_learning.htm (verificato in data 11/08/2016)

L'Autrice



Flavia Giannoli

MIUR: Docente di Matematica e Fisica al Liceo Scientifico A. Volta di Milano; Tutor coordinatore TFA Matematica e fisica (A049) all'Università Bicocca di Milano; Formatrice Esperta dei docenti per USR, MIUR e diverse Associazioni certificate.

Viale Brianza 22, 20127 Milano (MI)

Italy

e-mail: flavia.giannoli@gmail.com

Website: <http://admaioranetwork.it/>

LinkedIn: <https://www.linkedin.com/pub/flavia-giannoli/13/297/329>

Received August 14, 2016; revised September 11, 2016; accepted September 28, 2016; published online November 26, 2016

Open Access This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)



Comparing fractions at the age of 11 through the use of the zone of proximal development

Kyriakos Petakos

Abstract. *A fundamental concept associated with the sociocultural theory of learning by Vygotsky (1967, 1978, 1987 and 1998), the zone of proximal development is employed in our present article to help an 11-year old student overcome his difficulties when comparing basic mathematical concepts such as fractions.*

Key words. *Sociocultural Theory Vygotsky, collaboration, Chalkin.*

Sommario. *Nell'articolo si descrive come un concetto fondamentale associato con la teoria socio-culturale dell'apprendimento - zona di sviluppo prossimale di Vygotskij 1967, 1978, 1987 e 1998 - viene impiegato per aiutare uno studente di 11 anni a superare le sue difficoltà quando gli si chiede il confronto con i concetti matematici di base come per esempio le frazioni.*

Parole chiave. *Sociocultural Theory Vygotsky, collaboration, Chalkin.*

Introduction

A fundamental concept associated with the sociocultural theory of learning by Vygotsky (1967, 1978, 1987 and 1998), the zone of proximal development, abbreviated as *zpd*, is employed in our present article to help an 11-year old student overcome his difficulties when comparing basic mathematical concepts such as fractions.

The whole culture of the article is inspired by the work done by Chalkin (2003) to view the concept above as deeply as possible and the new dimension he provides the word collaboration. Not just an urge to move forward but more any communication with a more experienced person that finally adheres to the fundamental principle of sociocultural theory (Vygotsky). Learning takes place first in the intra level, among human beings, and then it is appropriated to oneself, the inter level according to Vygostky. Chalkin's effort in approximating this concept is really ingenious since it combines not only the austerity by sciences that are based on such a strict style such as mathematics, but also the verbal interpretation of the zone of proximal development in a more loose sense that can present attributes of this concept that remained entirely unheeded or latent, through a time, during which the sociocultural theory of learning has extended its clout on a lot of disciplines.

The main core of this paper is a detailed interview with an 11-year old student and his insight

on the fundamental concept of fraction. By employing a question-response mechanism, we focus on a human triangle, the student, the interviewer and the mother, and beyond that an invisible world of demeanors and convictions toward Mathematics. A rather limited learning ambient is extended on sociocultural principles as presented by Vygotsky and refined and fortified by Chalking, especially regarding the notion of collaboration. Our next paragraph comes more natural to expounding what about this whole paper is.

Methodology

We proceeded in this article by the method of a direct interview with an 11-year old primary school student on the island of Rhodes, who is trying to master the idea of the fraction especially when compared to unity, something very important and connected to the nature of understanding what a fraction means. The theoretical background that fosters our work is the zone of proximal development, defined by Vygotsky and exemplified in a unique way by Chalkin.

Our student under observation is a bilingual student that by nature is more liberated to unveil language mechanisms required and employed in the process of learning, since what the native speaker sometimes takes for granted is a bone of contention for the bilingual one, as a result of an unavoidable conflict between the mother tongue and the prevalent environmental language. In the bilingual learning environment the zone of proximal development can be naturally enriched by the intervention of a parent, usually user of a language different than that of the instruction, and the difference in culture, not only in the general sense, but also in the restricted microcommunity of the school that this parent or more knowledgeable person was exposed to as a student.

We intend to discover through our student's words how this zone works and to what extent language and cultural factors intervene to shape and redefine the concept that has occupied valuable time of whole generations of contemporary teachers, the zpd.

Main article

In the following article T will stand for the interviewer, the teacher and S the interviewee, the student. Our student seems to have some obstacles in understanding how a fraction is compared to unity and define the right sign of inequality he has to complete in his respective homework that depicts the level of understanding in this direction.

By taking on the role of the more knowledgeable person, as defined in the zone of proximal development, we do serve a double purpose: on one side we help the student deepen into the fundamental mathematical notion of the fraction and on the other side reevaluate the importance of this zone to the benefit of improving our teaching activity and the learning of mathematics itself.

T When you compare fractions to unity, you seem to encounter a real problem.

S Yes, I do. Most of the classmates face it. We discuss it with each other and correct the wrong ones

(already a vestige of the microculture society of the classroom that forms a modicum of social ambient so that the Vygotskian social learning process takes place).

T But how about the trick I gave you? Can you recite it?

S Sure. When the numerator is less than the denominator, we put the angle at the 1 and its nose

at the fraction.

Language seems to be a dynamic component in our lesson. Peter is not capable of translating into the proper terms “greater than”, “less than”. Instead, he develops his vocabulary to depict this situation. Sort of geometrical language, an angle and its nose, he does not even mention the word vertex. By adopting the zone of proximal development so nicely articulated by Vygotsky, “the distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers” (Vygotsky, 1978, p. 86, Chalkin, 2003, p.40), we try to give the path of Peter’s mind from the pure thought to the word that expresses it. The geometric shape of an angle with its nose forms the path, capable of leading Peter from the thought, the mnemonic rule comparing the numerator to its respective denominator, to the word “greater than”, “less than”. It is undeniably subjective how this path, meaning, is formed on every mind, regardless of the similarities and differences that may show up by direct comparison, but the ultimate goal, the appropriation of the concept remains the same.

T The comment I made is not contained in the book. Do you think this is a problem? Would it help if it was stated?

S Mrs M had already mentioned it

T But you seem to have completely forgotten it. When I mentioned that to you, the expression on your face changed.

It was really a reassuring glance that motivates all sociocultural proponents to stick even closer to that theory.

S You said that to me

T But the teacher also said it to you and the rest of your classmates I suppose. Didn’t she?

S Yes, but when you said it to me, it was the solution. I thought it was a rule

T It does make a difference if the teacher addresses you personally, the way we talk face to face with each other.

S Sure, I even told my mother that

Peter is a bilingual student. When it comes to mathematics, he needs some help from a person in proximity, an application of the zone of proximal development. The criteria for such a decision is not only the greater competence of the second person, as stated by Vygotsky, but also the emotional security provided by a family member. His mother is a permanent refuge. But here, we face one of the primary obstacles again while learning in a bilingual learning ambient, the conflict between the mother tongue and the environmental language. We believe that this dispute can be proven quite fruitful in the context of the zone of proximal development, by accepting multicultural approaches and bilateral loans from either language that might lead to the betterment of the mathematical performance. The Vygotskian zone might be enriched by the mixing of different cultural approaches, which undeniably pass through the language mechanism, and extended to one or more additional persons forming a tripartite group dedicated to deepening into the mechanism under which mathematical understanding is obtained. A phrase or a word that is not used in one language might trigger the interest of learners, native speakers of the others, and vice versa. All this can happen at an age that the child’s mental development is fundamentally shaped avoiding our coming back years ago at the high school or even at the college level to

rectify misconceptions, or better behaviors toward mathematics, whose hostility have such a negative impact on our daily lesson.

But let us return to our dialogue

T Did your mother mention something similar to the rule I gave to you?

S (thinking and smiling) Maybe. But you know, my mother calls the denominator the upper part. She does not know the word denominator in Greek.

T You can teach her

S It does not work, she forgets, and if pushed, she speaks Albanian

T That means she cannot avoid using words for her native language.

S Not often. When she gets frustrated, and we cannot solve the problem, she does that. And then she tells me her story from the Albanian primary school she attended, what the teacher at that time used to say, how he graded them on the blackboard etc.

T So, finally you finally deflect from mathematics and are drifted into a story. Is that helpful? If she tends to narrate all she has been through at your age, would it not be a waste of time? Could you not call one of your classmates to discuss your encountered difficulties with?

S If I cannot find him/her? Mum is always here, and I do relish listening to her stories when she was herself a kid.

Comment: Chalkin is a perennial source of inspiration regarding the zone of proximal development. Next, to the three categories of development, he emphasizes on, we can add the availability property, i.e. the natural presence of a more knowledgeable one to interact with the less experienced and eager to learn. This availability is sure to the benefit of the potential development as viewed by Chalkin, articulated in a magnificent way “but merely an indication of the presence of certain maturing functions, which enables a situation that gives a potential for meaningful, interventive action, Chalkin, 2003, p.43”. That indicator of the maturity process is given vent due to the sentimental proximity that a relative can offer, always being there, no matter how well prepared she is for helping with the teaching subject. Moreover, within the family, there is already a distribution of roles regarding their offspring education, another indicator of how important parental involvement is the first formation of a learning attitude. It is the interplay between the assistive and potential development. Let me go on with the interview.

T You get a lesson and a break at the same time

S Sometimes I feel well when I prove to her that I was right about an exercise because she was unable to work out the right solution. I even told her your rule, about comparing fractions to unity.

T How she reacted?

S I think she said that in Albanian because it reminded her of her childhood. Then she told me, why didn't you tell me that at the very beginning?

T I caused a competition between you and her

S But I won, I knew it before she could ever learn it by heart

Comment: We do observe that this ingenious idea of the zpd can still be worked and expanded to encompass a lot of our learning experiments. The more knowledgeable person, in this case, the mother, resorts to her educational past, to another culture, another society with very different rules and laws. It is unavoidable to do this. In this way, another time, another culture passes per se in

the education of our cognizing subject, justifying Vygotsky once more in his allegation that learning is indeed a sociocultural process.

T Peter, if you can answer me the last question, I will be thrilled. But I can give you a whole week to elaborate on that if you cannot provide me with an immediate answer. Do you see any advantage in our discussion with you? Did I put something else next to the teacher, your mother, everyone who might have helped you so far?

S You gave me the rule, now I do not make mistakes if a fraction is greater than or less of unity (let us remember the moment transition from the descriptive terms angle and nose to the austere mathematical terms “less than” once the rule, according to Peter, was provided).

T But even the teacher, your mother knew the answer in Albanian. What makes the difference that you pay more attention to me?

S You said it to me

T I am a teacher too

S You are not giving me grades unless that one on the scratch paper.

Comment: The undeniable presence of the evaluation presence and its repercussions on the learning itself. We live in a judgmental society, and we keep talking about continuous assessment as a means to improve our modern society. Should we conceptualize more about this process, maybe categorize it between immediate and latent evaluation, the way I interviewed Peter, and try to figure out the pros and cons between the combination of these two kinds for the sake of learning itself?

T Could I also add that I am not supposed to reprimand you for anything outside Mathematics the way that a typical teacher does?

S Let alone that.

Conclusions

The new educational model is comprising of an extension of the so-called zone of proximal development. The ideal would be a teacher-parent-additional teacher. The teacher represents curricula, national standards and policies and is embedded into a legislative, educational frame. The parent is free of procedural and pedagogical norms but inclined to support her offspring with any means available. She is a bearer of another generation under the clout of another educational school of thought, and in the case of a bilingual student, exposed to a different language mechanism. The third person, another teacher, would neutralize the effects of the above two. She is neither sentimentally involved nor a part of the evaluation process. Evaluation cultivates competition, but if we follow Peter’s answers, it can inhibit the under no restrictions law of learning, by taking the liberty of using the term “laws of learning”. Would the cooperation among all three be beneficial to the improvement of Peter’s performance and shed more light on the cognition process? It is a minimal sociocultural setting comprising discipline-hierarchy (teacher), sentiment-familiarity (parent) and liberty of expression (the additional teacher). This presupposes a well-organized educational system with no downsizing in the number of hired teachers, nation and statewide, as well as the provision of motivation for the accomplishment of such goals. Any school district, provided the availability of means, can materialize these tripartite meetings, to the benefit of the education itself.

Individualized learning: The paragon of a teaching ambient, but practically unattainable. Why not apply the common mathematical idea of the approximation to this target? We can dedicate office hours, equally-distributed to all interested students to make them feel they deserve and at the same time get a chance to a privileged learning setting.

The zone of proximal development is an equivalence relation in its pure mathematical sense. Vygotsky never exercised, while living the job of a mathematics teacher, but he undoubtedly possessed a mathematical thinking enviable by contemporary mathematicians. Another proof that language and mathematics are in their structure so close related. The zone by itself is minimal, let me not say minimum, learning ambient, where even a rudimentary form of social interaction takes place for the sake of learning. It is reflexive by definition. It is undeniably symmetric, given the center of this zone if the Vygotskian definition implies such a center. It is not only to the benefit of the less experienced one but also to the advantage of the more knowledgeable one, which encompasses the principles of modern didactics that in the learning process all involving sides are active. The students learn by talking with us, and we do improve our performance by coping through a dialogue with their understanding obstacles in the field of mathematics. This reciprocity defines the symmetrical property of the zone of proximal development. Finally, we can sense the last component of transitivity, as different zones interact with each other. By accomplishing collaboration, as stated by Chalkin.

The term ‘collaboration’ should not be understood as a joint, coordinated effort to move forward, where the more expert partner is always providing support at the moments where maturing functions are inadequate. Rather it appears that this term is being used to refer to any situation in which a child is being offered some interaction with another person about a problem to be solved, (Chalkin, 2003, p.54)

between two different zones with a human overlapping, either the less experienced or, the more experienced one, the benefits are somehow transferred as if the new participants had already taken place in the zones they did not personally take part in. By finishing the concluding paragraph, we can use even the last comment as a means to propagate mathematics among people who are by nature theoretically oriented. A notion that forms part of the contemporary science of psychology can be presented as an extraordinary but nevertheless example of a mathematical concept encountered in all curricula at schools and college that involve mathematics. The equivalence relation. By an imitation process, we can start figuring out similar situations where the so specialized mathematical vocabulary materializes in subjects that mathematics are traditionally absent if an adage like this can finally be supported about the interconnection of Sciences and the applicability of the sociocultural theory.

Declaration of Conflicting Interests

The authors declared that they had no conflicts of interest on their authorship or the publication of this article.

Repository of materials

Click the following link to the registered material regarding this article. These materials can

be modified over time and upgraded following the evolution of the underlying ideas or/and future trials carried out by the author.

<http://www.edimast.it/J/20160202/03690375PE/>

References

- Chalkin, S. (2003). The zone of proximal development in Vygotsky's analysis of learning and instruction. In A. Kozulin, B. Gindis, V. Ageyev, S. Miller (Eds.), *Vygotsky's educational theory and practice in cultural context* (pp.39-64). New York: Cambridge University Press
- Vygotsky, L. S. (1967). Play and its role in the mental development of the child. *Soviet Psychology*, 5(3), 6-18.
- Vygotsky, L. S. (1978). Interaction between learning and development (M. Lopez-Morillas, Trans.). In M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman (Eds.), *Mind in society: The development of higher psychological processes* (pp. 79-91). Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech (N. Minick, Trans.). In R. W. Rieber & A. S. Carton (Eds.), *The collected works of L. S. Vygotsky: Vol. 1. Problems of general psychology* (pp. 39-285). New York: Plenum Press. (Original work published 1934)
- Vygotsky, L. S. (1998). The problem of age (M. Hall, Trans.). In R. W. Rieber (Ed.), *The collected works of L. S. Vygotsky: Vol. 5. Child psychology* (pp. 187-205). New York: Plenum Press. (Original work was written 1933-1934).

About the Authors



Kyriakos Petakos

Dean of the Superior School of Tourism Education ASTER
Dimokratias 2, 85100 Rhodes Greece
Kyriakospetakos66@gmail.com

Dr Petakos is a mathematician graduated with Excellent from the University of Athens in 1988. He attended graduate courses at the University of Augsburg Germany and completed his PhD at the University of Athens in Applied Probability with Professor Papastavridis. His interests turned to mathematics education, and in this direction, he visited financially covered the SUNY Fredonia and SUNY Geneseo delivering speeches on his research on math education. He is currently Assistant Professor and Dean of the Superior School of Tourism Education of Rhodes ASTER.

Received June 16, 2016; revised July 18, 2016; accepted July 29, 2016; published online February 25, 2017

Open Access This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)



Reviewers

Susanna Abbati
MIUR- Università di Torino, Italy

Virginia Alberti
MIUR, Brescia, Italy

Rosa Laura Ancona
MIUR, Siena, Italy

Stefano Babini
MIUR, Imola (BO), Italy

Roberto Boggiani
MIUR, Bonavigo (VR), Italy

Roberto Capone
Università di Salerno, Italy

Maria Grazia Cardillo
MIUR, Reggio Emilia, Italy

Antonia Casiero
MIUR-Università di Bari, Italy

Antonella Castellini
MIUR, Colle Val D'Elsa (SI), Italy

Nino Casto
MIUR, Patti (ME), Italy

Marilena Cazzetta,
MIUR, Francavilla Fontana (TA), Italy

Francesco Chesi
MIUR, Firenze, Italy

Vito Giuseppe Clarizio
MIUR-USR Puglia, Bari, Italy

Angela Colamussi
MIUR, Triggiano (BA), Italy

Pina De Paolis
MIUR, Brindisi, Italy

Federica Ferretti
Università di Bologna & ForMATH, Italy

Rosaria Fiore
MIUR, Bari, Italy

Marilena Fogliana
MIUR, Trapani, Italy

Elena Fracasso
MIUR, Lecce, Italy

Flavia Giannoli
MIUR-Università di Milano Bicocca, Italy

Antonella Greco
MIUR, Edolo (BS), Italy

Viet Quoc Hoang
Tacapuna Grammar School, Auckland City, New Zealand

Angela Iacifano
MIUR, Follonica (GR), Italy

Marzia Maccaferri
MIUR, Ferrara, Italy

Dany Maknouz
Scuola ebraica di Milano, Milano, Italy

Elsa Malisani
MIUR, Ribera (AG), Italy

Claudio Marini
MIUR, Siena, Italy

Antonella Montone
Università di Bari, Italy

Giorgio Musilli
MIUR, Marina di Cerveteri (RM), Italy

Marianna Nicoletti
MIUR, Bologna, Italy

Joey Osorio
Technological University of Tijuana, Baja California, Mexico

Luigia Palumbo
MIUR, Bari, Italy

Antonella Pando
MIUR, Lecce, Italy

Nicole Panorkou
Montclair State University, New Jersey, USA

Monica Pentassuglia
Università di Verona, Italy

Agostino Perna
MIUR, Latina (RM), Italy

Silvia Patrizia Ruggeri
MIUR, Lecce, Italy

Liliana Marlene Sandoval
Technological University of Tijuana, Baja California, Mexico

Massimo Trizio
MIUR, Milano, Italy

Natalia Visalli
MIUR, Palermo, Italy

MIUR: Ministry for Education, University and Research – Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

INDIRE: National Institute for Documentation, Innovation and Educational Research – Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa

INVALSI: National institute for the evaluation of the education and training system – Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione.

Tutors

Simone **Banchelli**

MIUR, Ravenna (RA), Italy

Nicola **Chiriano**

MIUR, Cosenza, Italy

Titti **D'Acunto**

University of Salerno, Italy

Umberto **Dello Iacono**

University of Salerno, Italy

Flora **Del Regno**

University of Salerno, Italy

Alessandra **Faniuolo**

MIUR, Putignano (BA), Italy

Laura **Lombardo**

University of Salerno, Italy

Maria **Piccione**

MIUR, Firenze, Italy

Grazia Patrizia **Raciti**

MIUR, Riposto (CT), Italy

Fiorenza **Turiano**

MIUR, Savigliano (CN), Italy

Dario **Zuccato**

MIUR, Due Ville (VI), Italy

Vincenzo **Palumbo**

MIUR, Rutigliano (BA), Italy



Contents

Experiens & Research Articles

- | | |
|---|-----|
| Against problem solving by segment method | 287 |
| <i>Antonella Castellini</i> | |
| Pitag'ORA PRO NOBIS | 315 |
| <i>Ivan Graziani, Stefano Babini</i> | |
| Experiential learning cycle in Mathematics | 339 |
| <i>Elsa Malisani</i> | |
| Who is afraid of active teaching? | 357 |
| <i>Flavia Giannoli</i> | |
| Comparing fractions at the age of 11 through the use of the zone of proximal development | 369 |
| <i>Kyriakos Petakos</i> | |