Volume 4 January - December 2018

EDiMaST

Experiences of Teaching with Mathematics, Sciences and Technology

Esperienze Didattiche con Matematica, Scienze e Tecnologia

www.edimast.it ISSN 2421-7247 (online)

Experiences of teaching
with Mathematics, Sciences and Technology

Esperienze Didattiche con Matematica, Scienze e Tecnologia

Volume 4, January - December 2018

ISSN 2421-7247 (online)

Journal papers are published online periodically from January to December.

EDIMAST is an Open Access Online publication. This means that everybody can free access online to abstracts and full-length articles.

Anyone involved in the teaching of mathematics, sciences and technology is welcome to contribute.

EDIMAST is an international scientific journal and welcomes articles in English and Italian.

Publish on EDIMAST has no costs for the papers' author.

For more information visit
www.edimast.it

To the authors:
paper can be addressed to:
edimast@gmail.com

article

ISSN 2421-7247

Multıple representatıons and development of students' self-confidence on rational number

Roza Vlachou, Evgenios Avgerinos

Abstract. *In spite of the fact that analytical programs change and mathematical school texts adapt to new education needs, students, internationally, continue to have difficulties when handling fractions. This paper presents the results of a research conducted on students of the 5th and 6th grade of elementary school and its purpose was to investigate at what extent the use of multiple representations is possible to help students cope with difficulties on mathematics and thus to boost their self-confidence in mathematics. For that purpose, the concepts of fractions was chosen are classification of fractions as a representation on the number line, as well as the concepts of the unit's division in equal parts and the concept of the improper fractions. Thus, we present education practices were applied by our research team. These teaching practices take into account the results as stated by international bibliographies as well as years of research of our team on rational numbers. They emphasize on multiple representations, use of experiential activities and activities carried out on electronic platforms. In additional, the present research deepens with semi-structured interviews of the participants. The results of the research indicate that students after instructive interventions with the use of multiple representations performed better on fractions and increased their self-esteem in mathematics.*

Key words. *Fractions, instructional practices, multiple representations, students' self-confidence.*

Sommario. *Nonostante il fatto che i programmi analitici cambino e che i testi scolastici matematici si adattino ai nuovi bisogni educativi, gli studenti, a livello internazionale, continuano ad avere difficoltà nel maneggiare le frazioni. Questo documento presenta i risultati di una ricerca condotta su studenti del quinto e sesto grado della scuola elementare e il suo scopo era quello di indagare in che misura l'uso di rappresentazioni multiple è possibile per aiutare gli studenti a far fronte alle difficoltà della matematica. A tale scopo, sono stati scelti i concetti di frazioni come classificazione delle frazioni come rappresentazione sulla linea numerica, nonché i concetti della divisione dell'unità in parti uguali e il concetto delle frazioni improprie. Quindi, presentiamo le pratiche educative applicate dal team di ricerca. Queste pratiche di insegnamento tengono conto dei risultati dichiarati dalle bibliografie internazionali e di anni di ricerca del nostro team su numeri razionali. Sottolineano su molteplici rappresentazioni, l'uso di attività esperienziali e attività svolte su piattaforme elettroniche. In aggiunta, la ricerca attuale si approfondisce con interviste semi-strutturate dei partecipanti. I risultati della ricerca indicano che gli studenti dopo interventi istruttivi con l'uso di rappresentazioni multiple hanno ottenuto risultati migliori sulle frazioni e aumentato la loro autostima in matematica.*

Parole chiave. *Frazioni, pratiche didattiche, rappresentazioni multiple, fiducia in sé stessi.*

Introduction

The purpose of this paper is to provide instructional practices over time implemented by the research team and its positive effect on fraction understanding and students' self-confidence in mathematics. These instructional practices consider the difficulties of students emerged both from the literature and years of research team on the rational numbers. They emphasise multiple representations and they made use experiential activities and digital representations. The content and activities of teachings were determined by the findings of timeless researches conducted since 2011 to this day and help students reduce the difficulties they face with the concept of fractions classification as a representation on the geometric model of number line, as well as with the concepts of unit division in equal parts and improper fractions with the help of multiple representations with the ultimate goal of developing students' self-confidence in mathematics.

These concepts were chosen because several researchers claim that they are essential for developing rational number meaning and also they are associated with the understanding of other mathematical meanings (Jordan et al., 2013). Lee and Shin (2015) indicate that the distributive partitioning operation was revealed in various mathematical problem situations such as fraction multiplication, fraction division, and multiplicative transformation between fractional quantities. Additionally, the knowledge of improper fractions associates with problem posing (Avgerinos, Vlachou, 2013). Moreover, the implicit use of fractional can lead to more explicit use of structures and relationships in algebraic situations (Empson et al. 2011; Hackenberg, 2013). The fractional knowledge, that is, influenced how students wrote equations to represent multiplicative relationships between two unknown quantities (Lee, Hackenberg, 2014). Other researchers claimed that the division of a unit into equal parts, is essential for developing rational number meaning (Kieren, 1992; Mack, 2001; Steffe, Olive, 2010) and for developing whole number understandings (Boyce, Norton, 2016).

Literature review

Multiple representations in mathematics

In education at least in some instances no understanding can be achieved without the aid of representation. Such a case is the notion of fractions. In mathematics education, the concept of representation is used as equivalent to a sign that shows and makes present a mathematical concept - a symbol or mark to think about the concept. Representations are those schemes or mental images with which the subjects work on mathematical ideas (Castro-Rodríguez et al., 2016). Particularly, it is usual to consider the duality, external and internal representations. To think about and to communicate mathematical ideas we need to represent them in some way. Communication requires that the representations be external, taking the variety of forms, including pictures (e.g., drawing, charts, graphs), written symbols (e.g., numbers, equations, words), manipulative models, oral language (e.g., talk between pairs of students and whole class discussion), and real-world situations (Ryken, 2009). The multiple representations are the use variety of these external representations during teaching a mathematics concept.

According to some researches (Card et al., 1999; Cuoco, Curcio 2001; Cheng, 2002; Dreher, Kuntze, 2015) representing mathematical objects in multiple ways plays an important role in mathematical understanding and brings value to teaching processes. In addition, recent trends in curriculum standards, including standards developed by the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), have highlighted the productive role that drawn models and other external representations can play in teaching and learning mathematics (Jacobson, Izsak, 2015). Although the representations add complexity, using a range of representations is necessary for developing children's fractions understanding because each provide links to the underlying fractions concepts and children require support to make active connections within and between the various representations (Hansen et al., 2016).

However, in 1993 Duval called attention to a cognitive paradox hidden within in various representations. Handling these representations choosing he distinguishing features of the concept we must treat and convert, is not learnt automatically. This learning results from a process of explicit teaching in which the teacher must render the student co-responsible. Teachers often underestimate this aspect and passing from one register to another, believing that the student follows. The teacher is able to jump from one register to another without problems, because he has already conceptualised: while in fact the student does not so, the student follows at the level of semiotic representatives, but not of meanings (Fandiño Pinilla, 2007).

Understanding and self-confidence in mathematics

The importance of beliefs in mathematics education is in concordance with the constructivist understanding of teaching and learning. We understand beliefs as "an individual's understandings and feelings that shape the ways that the individual conceptualizes and engages in mathematical behaviour" (Schoenfeld, 1992:358). Mathematical beliefs can be divided into four main components: beliefs on mathematics, beliefs on oneself as a mathematics learner/applier, beliefs on teaching mathematics, and beliefs on learning mathematics (Lester et al., 1989). In this paper, we will deal with beliefs on oneself as a mathematics learner/applier, in other words, with self-confidence.

Several studies have shown that the learning of mathematics is influenced by a pupil's mathematics-related beliefs, especially self-confidence (Hannula & Malmivuori, 1996; House, 2000). So, self-confidence has a remarkable connection with success in mathematics. However, self-confidence and understanding self-esteem relate to the way of teaching. In other words, the passage from "Knowledge" (academic) to "learned knowledge" (of the student) is the result of a long and delicate path leading first to the knowledge to be taught, then to the knowledge actually taught and finally to the knowledge learnt. In this sequence, the first step of transforming "Knowledge" into "knowledge to teach" is called didactic transposition and constitutes a moment of great importance in which the professionalism and creativity of the teacher are of utmost importance (Fandiño Pinilla, 2007).

Teaching with representations

Research on international literature took place, reviewing current literature about representations in fractions in order to study and record the results of the surveys that have been published on the representations in fractions. In other words, which representations have emerged through these surveys as the most appropriate or inappropriate ones for the students to understand the notion of fractions and specifically, the concepts of classification of fractions as a representation on the number line, as well as the concepts of the unit's division in equal parts and the concept of the improper fractions. The review showed that there are hardly any teaching approaches and proposals made by the researchers on how teachers can deal with teaching and not only on the difficulties faced by students in fractions.

More specifically, as far as the number line is concerned, Brousseau et al. (2007) conducted a series of interventions in order to lead students' day by day to invent, understand and become very good at all aspects of both basic mathematical structures, the rational and decimal numbers. The intervention included a total of 65 courses (15 cycles) which were held in the fourth grade of Michelet school. The courses were repeated in two parallel classes with different teachers in a period of over 15 years, which means that more than 750 students have taken part in them. In the third lesson of the fifth cycle a representation of fractions on the number line takes place, leading gradually to the representation of the number line (see Fig. 1, 2, 3, 4) through a range of playful procedures and teaching methodology. According to this research, at the end of this activity, most students can quickly and undoubtedly put decimal fractions on the number line, and all students can analyze a decimal fraction in units, tenths, hundredths etc.

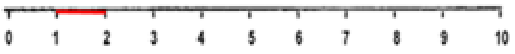


Fig. 1 – Interval [1,2)

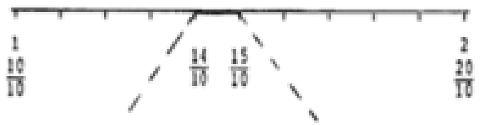


Fig. 2 – 14/10 and 15/10 on number line

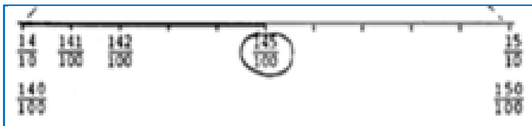


Fig. 3 – Number line points in hundredths

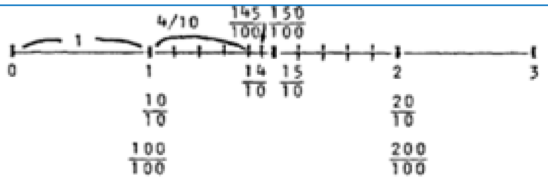


Fig. 4 – Finale form of number line

Another research proposal on the number line is that of Sedig and Sumner (2006) who reported the importance of visual representations of mathematics and the use of digital tools that enable them. One of these tools is the use of zoom on the number line (see Fig. 5). Zooming raises or lowers the level of detail on the number line, allowing students to visualise dividing numbers into equal parts and thus facilitate the transition to the field of rational numbers.

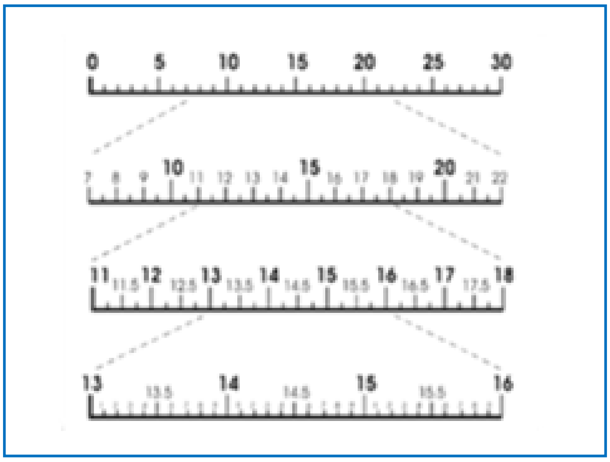


Fig. 5 - Several levels of conceptual zooming of a number line

Hansen et al. (2016) report their article the iTalk2Learn. ITalk2Learn is a Fraction Lab with the aim of developing an open-source intelligent tutoring platform that supports math’s learning for students aged 5 to 11. It allows students to learn from a system in a more natural way than ever before. This empowers educators to deliver the right lesson at the right time for every child, enabling personalized learning at scale. In addition, this Fractions Lab utilized a variety of fractions representations including continuous and discrete fractions and fractions in one, two and three dimensions (number line, area/region, and liquid measures, respectively), developing, in this way, children’s conceptual understanding with a virtual manipulative (see Fig. 6).

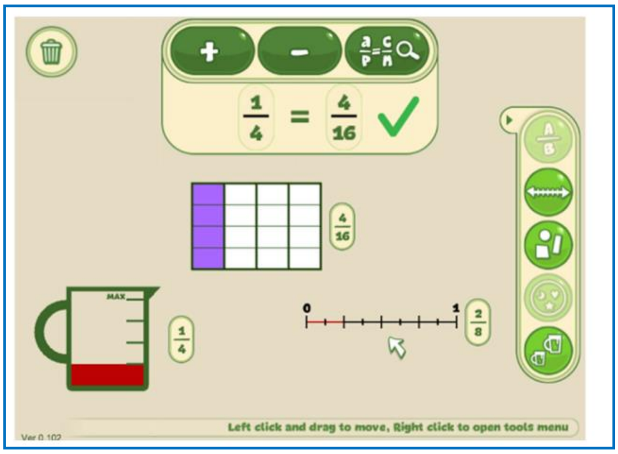


Fig. 6- Fractions Lab showing three representations for 1/4

Regarding the understanding of dividing a unit into equal parts, in their research Olive and Vomvoridi (2006) suggest teachers to avoid incorrect representations, where the division of the fractional unit in equal parts (see Fig. 7) is not frequently observed, which may lead students to believe that diving the unit in equal parts is not necessary. In addition, Tobias (2013) claims that the understanding of the equidivision of a unit into parts depend on the language which the teachers use for defining the whole (e.g. the distinction among of a, of one, of each, and of the).

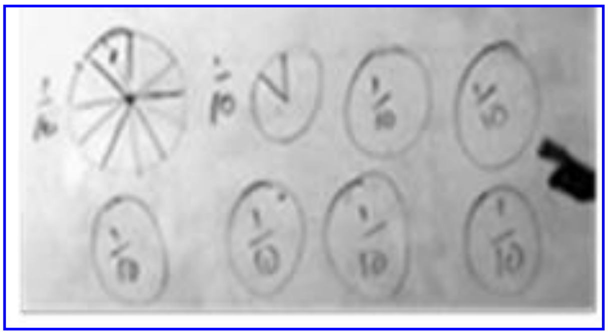


Fig. 7 -Representation about to how to distribute 8 pizzas in 10 people

As far as improper fractions are concerned, Hackenberg (2007) used the JavaBars software on the approximation of the notion, noting the importance of the ability to create improper fractions for placing numbers on the number line, for the construction of fractional numbers that lead the way to developing a sense of consistency and continuity to the numbers (see Fig. 8).

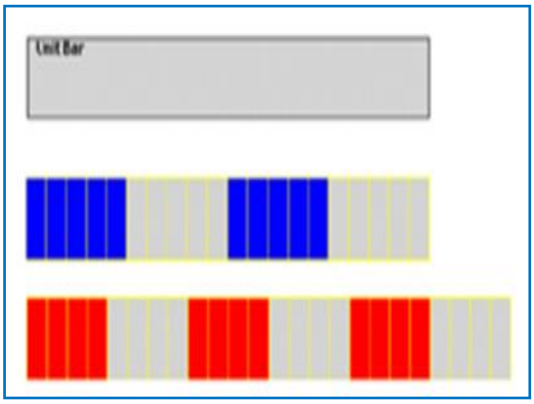


Fig. 8 - Representation of 6/5 on JavaBars

Methods

The researches followed a qualitative, quantitative approach. Moreover, a content analysis and case study were carried out. Thus, a triangulation was formed, which was methodological, temporal, topical and theoretical in order to achieve stabilization of findings (Cohen et al. 2011).

Aim of research

The main purpose of the present study is to provide instructional practices over time implemented by the research team and its positive effect on fraction understanding and development of students' self-confidence in mathematics.

Participants

The sample of the study involved 54 students of the 5th and 6th grade of elementary school in Greece, age 11-12 years. The sample selection was stratified and symptomatic according to the purposes and needs of the research.

Instrument

Regarding the data collection methods, questionnaires and tests written by researchers themselves were used, which reached their final form after pilot studies. Furthermore, instructions, some semi-structured interviews, video recordings, observation and literature study were employed. To achieve the aims of research, students answered a questionnaire – before and after of teachings – which were prepared by our research team to order to be examined the perceptions and the difficulties of pupils at the concept of fractions. The essay contained two parts. The first part of the questionnaire included 22 beliefs questions and second part included seven exercises about fractions.

Data analysis

To analyze the survey data, and in addition to the descriptive analysis, the Statistical Implicative Analysis by Gras, using the CHIC (Cohesive Hierarchical Implicative Classification) software (Gras et al., 1997) and Microsoft Excel program were used. The implication analysis of data was performed through similarity diagrams, in which the variables were associated with each other depending on the similarity or non-similarity they present. Variables in whose solution the subjects behave similarly are grouped together. In addition, the implication analysis of data was performed through implicative graph which presents the variables were associated with each other with implications which are valid at level of significance of 99%.

Variables of research

The variables were defined as a combination of letters and one number. The letters indicate the initial of concept which is examined. For example, the variable NLi5a is composed of the initial proposal "Number Line" because the locating a number on a number line is examined and number 5a indicates the question of questionnaire. According to the implicative analysis, equivalent to a value of 1 was assigned to every item if the answer is correct and 0 if the answer is wrong or missing.

Instructive interventions

The content and activities of teachings were determined by the findings of timeless researches conducted since 2011 to this day and help students reduce the difficulties they face with the concept of fraction as a representation on the geometric model of number line, as well as with the concepts of unit division in equal parts and improper fractions with the help of multiple representations with the ultimate goal of developing students' self-confidence in mathematics.

Participants were 54 fifth and sixth-grade students (11–12 years old). Three classes were designated-1 class of fifth and 2 classes of sixth grade students. The sample selection of fifth glass and one of two classes of sixth-grade students were symptomatic. The sample selection of the second sixth class was stratified. In particular, in this class participated nine students: three students with high performance at school mathematics, tree students with mediocre performance at school mathematics and three students with low performance at school mathematics.

The teaching interventions were made at different times for each class and they last for two weeks each one. The instructive interventions were implementing by our research team and were divided in 7 phases.

The first phase

The first phase involved completing written essays before the lectures. The essay contained two parts. The first part of the questionnaire included 22 beliefs questions and second part included seven exercises about fractions and specifically about the notions of equal parts of the fractional unit, improper fractions and sequences of rational numbers on the geometric model of number line. The aim of this phase is to be examined the students' fraction knowledge and their beliefs about mathematics before the start of the activities. In this phase participated all three classes of the sample.

The second phase

The second phase involved semi-structured interviews of the participating students before the start of the activities. In this phase participated only the class of sixth grade whose sample was stratified (9 students).

The third phase

The third phase involved lectures that had as a target to expose students to as many multiple representations as possible (see Fig. 9a) and were about the concepts of equal parts and improper fractions. This phase aims to students' conceptual development about unit fraction and about the equidivision of a unit into parts. In addition, this phase aims to develop the students' ability to translate from one representation of the concept of fraction to another.

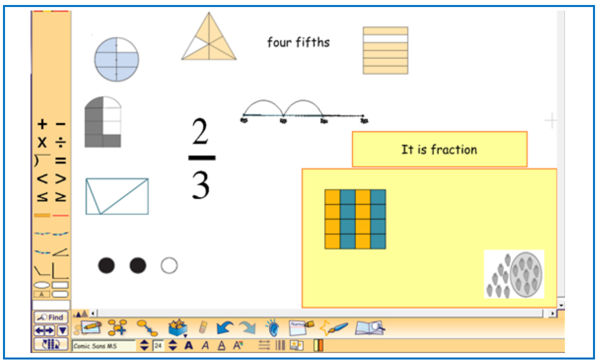


Fig. 9a - Multiple representations during 3th phase of lectures

The presentation of the representations was made with a variety of software (e.g., Microsoft PowerPoint, Microsoft Word software) and included 55 multiple representations in total. In these multiple representations included pictures of fraction unit which were not division into equal part (see Fig. 9b). In this phase participated all three classes of the sample.

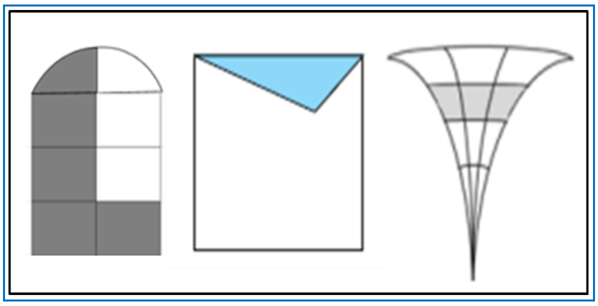


Fig. 9b – Representation of unit which were not division into equal part

The fourth phase

The fourth phase included lectures that were about putting fractions on the number line with the use of experiential representation and representation in a computing environment with the use of the software ConceptuaMath → Place Fractions on the Number Line (see Fig. 10b). This software it is possible to represent a fraction with variety of representations (e.g., symbol, number line, decimals, percent etc.). This phase aims to take students should be capable of locating a number on a number line and, conversely, be able to identify a number represented by a certain point on the number line. In addition, it aims to develop students' knowledge that between any two fractions there is an infinite number of fractions. In this phase participated all three classes of the sample.

This phase begins with a rope was placed on the board representing the number line on which the points 0, 1 and 2 were set (see Fig. 10a). Several tabs were given to students showing different fractions, either improper, proper, whole etc. and each student came to the board in order to place his/her tab correctly on the number line, with reference to existing points, at the beginning only 0,1 and 2, and then to the students' tabs that had been placed on the number line as well. Before the students placed their tab in the number line, they had to report to their classmates, externalising their thoughts, the reason why they intended to place the tab at this point of the number line. Some externalizations of ideas of the students' arguments are fowling:

For 3/4: The numerator is smaller than the denominator, so my fraction is smaller than the unit, so I will place it before 1.

For 299/299: The numerator is equal to the denominator, so it is equal to the unit, so I'll place it under 1.

For 2/150: 2 is very far from 150 which is my unit, so my fraction is close to 0.

For 1/4 (students had already placed 1/5 and 1/3 on the number line): My fraction has the same numerator with 1/5 and 1/3 so it goes between them, since in fractions with same numerator, the one with the smallest denominator is the greatest.

For 149/150: My fraction is very close to the unit, so I'll put it next to 1.

For 8/9: My fraction is very close to unit, it only needs one piece to be 9/9 but this piece is larger than the piece of 149/150 which also needs one piece to be 150/150 so I'll put it next to 1, before 149/150.

For 5/4: In my fraction the numerator is greater than the denominator, so my fraction is greater than the unit so I'll put it after 1.

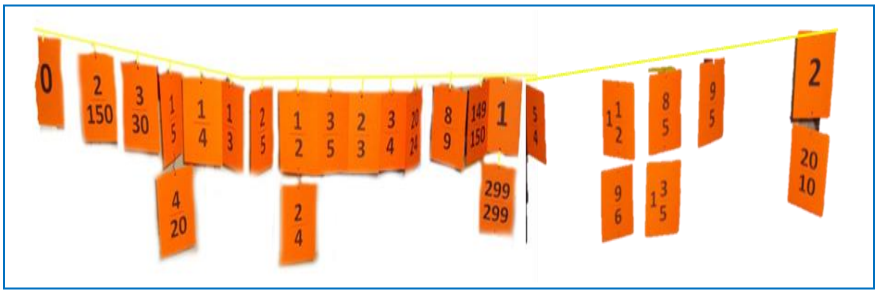


Fig. 10a – The finale form of activities for number line using experiential representation

In any explanation given by the students for their choice, a debate takes place first between the group and then between all groups for whether the choice of each student is correct or not. The confirmation, questions and errors are corrected by the students themselves, using the software Conceptual Math → Place Fractions on a Number Line (see Fig. 10b).

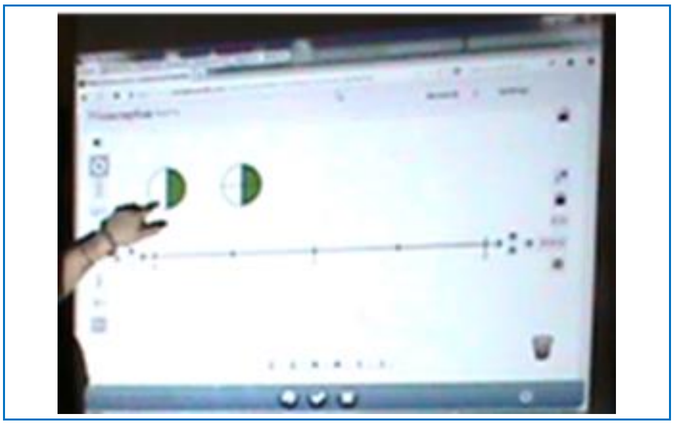


Fig. 10b – Activities for number line using the software ConceptualMath

The fifth phase

The fifth phase included the application of Fraction Battles Software which was created by the research team (see Fig. 11). This software was about the concepts of the equal parts of a unit, of improper fractions and of the classification of rational numbers on the geometric model of the number line. The software's target was to familiarize students with rational numbers and help them reduce difficulties they face with fractions with the assistance of multiple representations on which the added value of the software through a variety of activities of a dynamic multimedia environment. In this phase participated all three classes of the sample.

For its design, all findings from longitudinal surveys from 2011 to 2015 were considered. These researches were carried out by our research team and they investigated the difficulties faced by students in primary and secondary education over rational numbers and the perceptions of prospective teachers over rational numbers, the structure and content of textbooks of mathematics in primary school, as well as on the teaching suggestions and approaches that several researchers have proposed on an international level. This means that every activity of the game is intended to cover a specific difficulty that students face with fractions.

Fig. 11 – Home page of Fraction Battles software

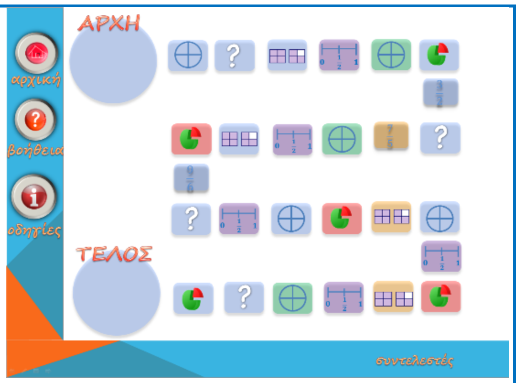


Fig. 12 – Digital dashboard of Fraction Battles

In order to win in Fraction Battles, students must arrive at the finish, throwing the dice and following the route shown in figure (Fig. 12). The route includes 27 points/activities. Each time a student stops at some of these points, he is asked to answer the question/activity by clicking on the corresponding position. If he answers correctly, he continues, otherwise he waits for his turn again. Each activity is designed to refute some of the difficulties students have in rational numbers, as highlighted by previous research. In addition, activities are graded by difficulty (see Fig. 13).

Fig. 13a – Indicative activities of Fraction Battles Software: activity for translating from one representation of the concept of fraction to another

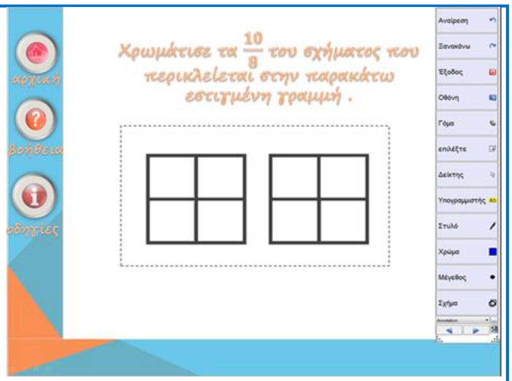


Fig. 13b – Indicative activities of Fraction Battles Software: activity for improper fractions

The sixth phase

The 6th phase involved completing the written essays at the end of the learning process. The essay contained two parts, like the first phase. The aim of this phase is to be examined the students' fraction knowledge and their beliefs about mathematics after at the end of the learning process. In this phase participated all three classes of the sample.

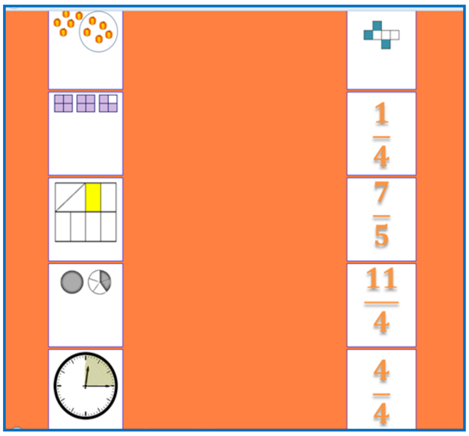


Fig. 13c – Indicative activities of Fraction Battles Software: activity for the equidivision of a unit into parts

The sixth phase

The 6th phase involved completing the written essays at the end of the learning process. The essay contained two parts, like the first phase. The aim of this phase is to be examined the students' fraction knowledge and their beliefs about mathematics after at the end of the learning process. In this phase participated all three classes of the sample.

The seventh phase

The 7th phase involved semi-structured interviews of the participating students (students of second phase) after the instructional interventions.

Results and findings

The implication analysis of data was performed through similarity tree and implicative graph. In similarity tree (see Fig. 14, 15) the variables were associated with each other depending on the similarity or non-similarity they present. Variables in whose solution the subjects behave similarly are grouped together. In implicative graph (see Fig. 16) the variables were associated with each other with implications which are valid at level of significance of 99%. The implication Task 1 → Task 2 means that the success in Task 1 involves success in Task 2 and the failure to Task 2 entails failure in Task 1.

After the teaching interventions, an improvement in students' performance was observed from data analysis (see Fig. 14, 15). In particular, in finding fractions on the number line, the success rate was initially 25% (NLi5a, NLi5b, NLi6ei) and while in the post-activities rates, it rose to 84%. On the notion of unit division into equal parts, we also observed increased success rates, since in exercises concerning recognizing fraction in shapes that were not divided into equal parts (UnFD1a, UnFD1b, UnFD2a, UnFD2d, UnFD2st), rates from 14% in pre-activities, rose to 89% in post-activities. Noteworthy is that the students stated during interviews before the teachings that it is not necessarily fractional unit is divided into equal parts.

In additional, we observed increased success rates in the notion of improper fractions as well, as they rose from 29% to 75% (ImpP7, ImpD2z, ImpD1d) in recognizing improper fraction from a diagram. During interviews before the teachings the many students stated that they did not know what improper fraction means.

Similarity Tree

How this positive change in student performance in rational numbers due to multiple representations is possible to boost their self-confidence in mathematics?

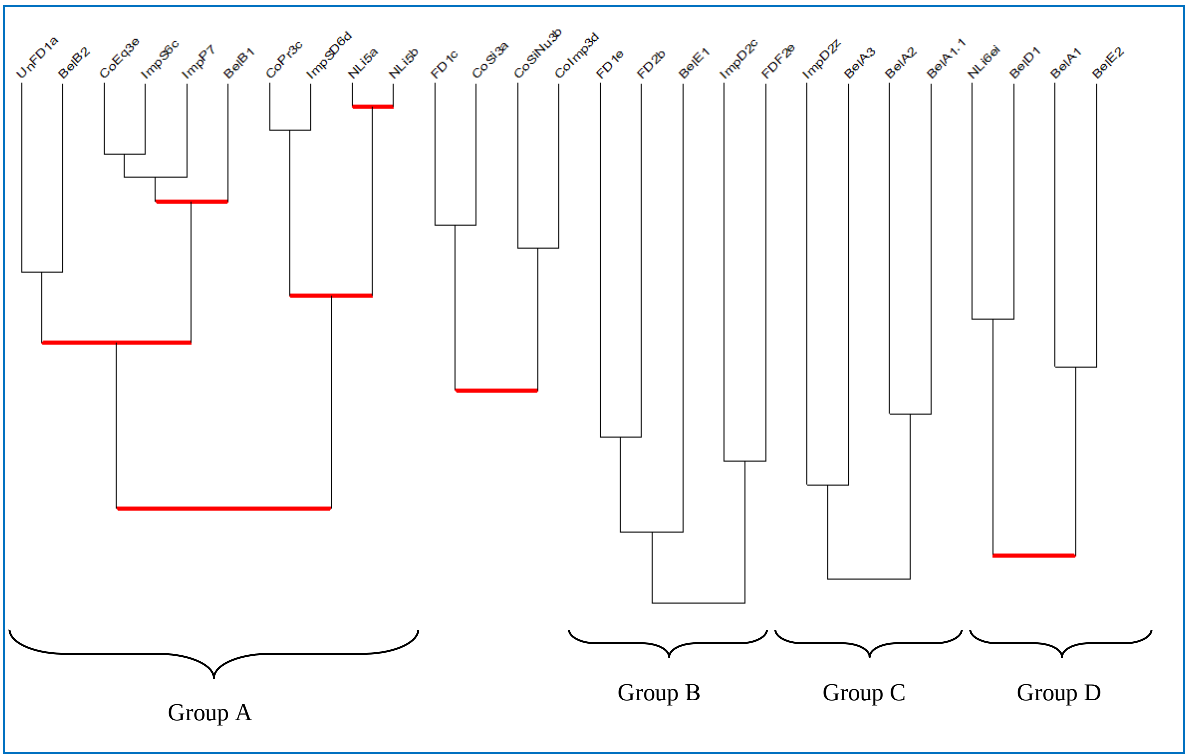


Fig. 14 - Similarity tree 1-Results of pre-test

According to similarity tree 1 (see Fig. 14), which presents the task before the instructive interventions, it is possible to distinguish observe four groups. The first group, group A consists mainly of the variables that present the tasks which are related to the concepts of the unit's division in equal parts and the concept of the improper fractions ((UnFD1a BelB2) (((CoEq3e ImpS6c) ImpP7) BelB1)). These variables are related to the variables BelB2 and BelB1, which concern the belief of students that mathematics would be more attractive to them if they were not so difficult.

From the third group (group C, Fig. 14) it seems that the understanding of improper fraction relates to development of students' self-confidence in mathematics ((ImpD2z BelA3) (BelA2 BelA1.1)). In particular, the students, who stated that they like mathematics and that they are important in human life, achieve to a high success rate in tasks about improper fractions.

On the other hand, according to group D (see Fig. 14) we can observe that the ability of classification of fractions as a representation on the number line, associated with the variables

BelA1, BelD1, BelE2 which concern three categories of statements. The first statement is that students like mathematics (BelA1). The second statement concerns the teaching method (BelD1) and third statement concerns the satisfaction of students according to their performance in mathematics (BelE2). In other words, the students who stated that they like to learn mathematics and that their teachers used examples from everyday life to solve problems and they were satisfied from their performance in mathematics, these students had better performances in tasks about classification of fractions as a representation on the number line.

Comparing similarity tree 1-results of pre-test (see Fig. 14) and Similarity tree 2-results of post-test (Fig. 15), we observe that the improvement of student performance after the explicit instructive interventions using multiple representations positively reinforced the attitude of students towards Mathematics.

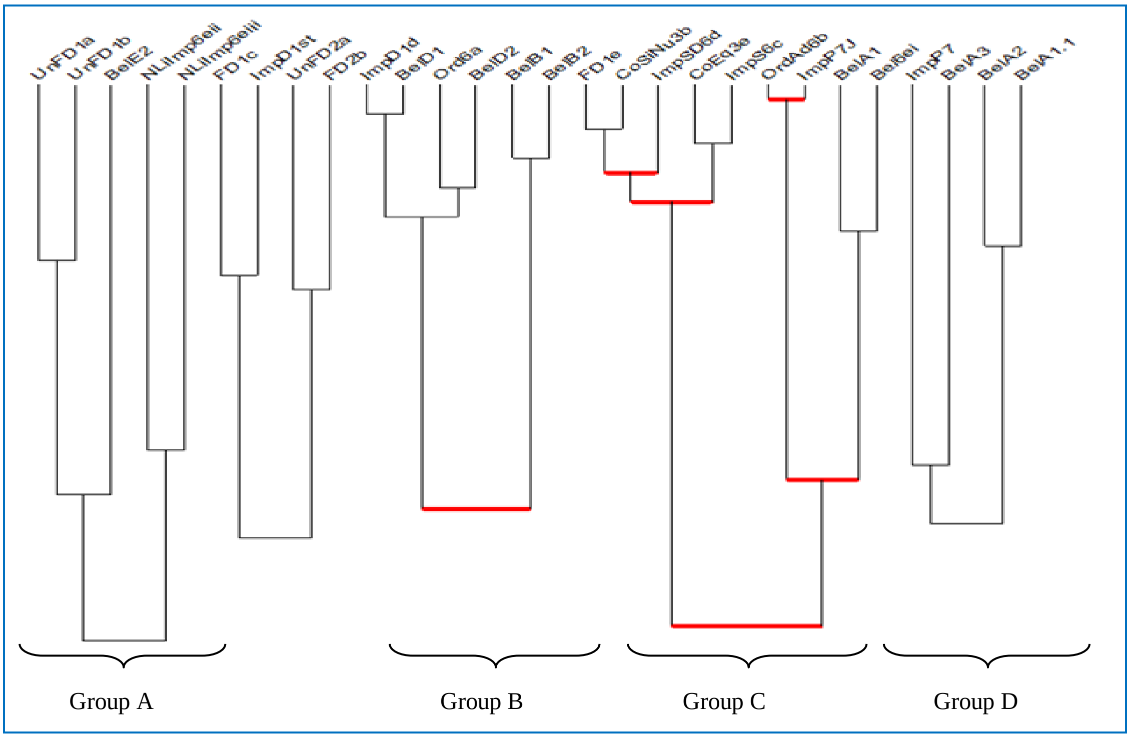


Fig. 15 - Similarity tree 2- Results of post-test

In particular, in group A of similarity tree 2 (see Fig. 15) we observe that the improvement on student’s performance on the tasks which the fractional unit presented with diagrammatic representation and it’s not divided in equal parts encourages mostly students who stated that they are satisfied from their performance in mathematics ((UnFD1a UnFD1b) BelE2). That change of attitude led to better student’s performance in placing improper fractions on the number line (((UnFD1a UnFD1b) BelE2) (NLiImp6eii NLiImp6eiii)).

On group B of similarity tree 2 (see Fig. 15) we observe that the change on the way of teaching with the use of multiple representations improves student’s performances on the concept of the improper fraction and on finding a fraction between two fractions ((ImpD1d BelD1) (Ord6a BelD2)). This improvement on student’s performance led to the change of their belief that mathematics are not so difficult (((ImpD1d BelD1) (Ord6a BelD2)) (BelB1 BelB2)).

In addition, the improvement on student's performance on more complicated tasks (group C, Fig. 15) such as explaining their solutions of problems on improper fractions, changes the student's attitude towards mathematics and they stated that they like to learn mathematics and that it's important for them to be good at mathematics ((OrdAd6b ImpP7J) (BelA1 BelE1)).

Same as above, group D, Figure 15, presents that the improvement on solving problems of improper fractions boost the state of students that they like mathematics and that mathematics are important on our lives ((ImpP7 BelA3) (BelA2 BelA1.1)).

Implicative graph

The above findings are reinforced by the implicative graph (see Fig. 16) which presents the variables were associated with each other with implications which are valid at level of significance of 99%. More specifically, a positive attitude in mathematics (BelB1) helps students to solve tasks involving both the classification of fractions (CoEqe) and solve problems with improper fractions. Also, the ability of students to solve the above tasks implicates positive change in students' beliefs about mathematics at three levels, at the level of attitudes (BelA1.1, BelA2), at the level of beliefs (BelB2) and at the level of encouragement (BelE2). In other words, students who have improved their performance on these tasks stated that they like mathematics, that mathematics is not so difficult as originally stated and they stated more satisfied with their performance in mathematics. The important finding is that the students after the learning process develop a positive attitude in mathematics (BelB1) which helps them to solve difficult tasks.

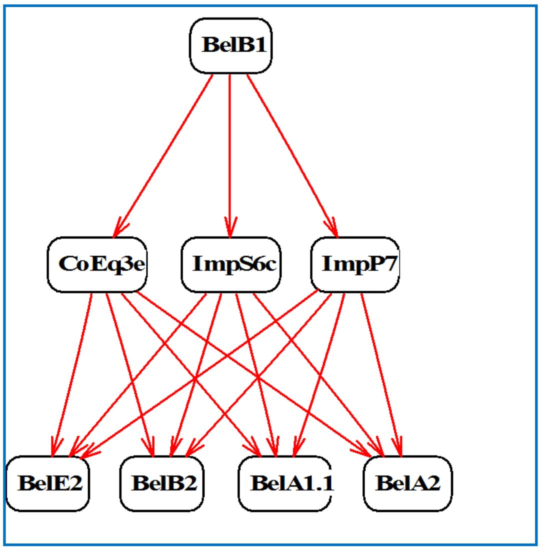


Fig. 16 - Implicative graph of post-test

Conclusion

Rational numbers are an important part of our students' mathematical literacy, as their understanding further contributes to Knowledge other mathematical notions (Empson et al., 2011; Jordan et al., 2013; Hackenberg, 2013; Avgerinos, Vlachou, 2013; Lee, Hackenberg, 2014; Lee, Shin, 2015; Boyce, Norton, 2016). For this reason, many researchers move in this area by investigating the students' difficulties over rational number. Several of these studies share a common component: the idea that the way of teaching is a key factor influencing the future development of the notion of understanding in students' perceptions (Streefland, 1991; Sfard, 1991; Lo, 1993; Chen, Li, 2009; Rønning, 2013; Howe et al., 2015; Dreher et al., 2016; Petakos, 2016) and that the use of multiple representations can play productive role in teaching and learning of mathematics (Janvier, 1987; Dreher, Kuntze, 2015; Shahbari, Peled, 2015; Jacobson, Izsak, 2015; Deliyianni et al., 2016; Hansen et al., 2016).

Hence, despite the research efforts, the constant changes in books, the suggestions etc. students still face the same difficulties and the student population present the same discouraging picture concerning rational numbers in all levels of education. The present study provided instructional practices how the use of multiple representations helps students to reduce their difficulties on fractions and its positive effect on fraction understanding and development of students' self-confidence in mathematics.

The analysis of the collected data both similarity statistical method and implicative graph showed that multiple representations helped enough students to reduce their difficulties about classification of fractions as a representation on the number line, as well as the concepts of the unit's division in equal parts and the concept of the improper fractions.

The reduction of difficulties of students seems to amplify students' self-esteem about mathematics, as they stated to be more satisfied by their performance and expressed more interest for the subject. In particular, the students stated, on a 75% percentage of the respondents, that they are more satisfied by their performance on mathematics after the lectures with the use of multiple representations. In additional, students that stated that they don't like learning mathematics (those students showed low performance on mathematics at school), after the interventions there was a change on their convictions, as they stated that they like mathematics.

The more important finding is that the students after the learning process develop a positive attitude in mathematics which helps them to solve difficult tasks such as tasks with improper fractions. This change of positive attitude in mathematics was affected – according to statements of students in interviews – by better understanding. So, the findings of present research may help researchers and teachers to understand the significance, for some students, of use multiple representations and may help researchers to extend the use of representations to other mathematical concepts.

Author Contributions

All authors designed the study. In particular, E. Aygerinos, and R. Vlachou created the application of Fraction Battles Software and activities of the teaching interventions. In additional, E. Aygerinos, and R. Vlachou collected the data, they analyzed the data and they wrote the manuscript. R. Vlachou made the teaching interventions.

Declaration of Conflicting Interests

The authors declared that they had no conflicts of interest with respect to their authorship or the publication of this article.

References

Avgerinos, E., Vlachou R., (2013). The consistency between the concepts of equal parts of the unit, improper fractions and problem-solving at candidate teachers of education departments. *Proc. 30th Hellenic Conference on Mathematical Education* (pp.135-147). Greece: Hellenic Mathematical Society (in Greek).

Boyce S., Norton A., (2016). Co-construction of fractions schemes and units coordinating structures. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 10-25. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.11.003.

Brousseau G., Brousseau N., Warfield V., (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum Part 2: From rationals to decimals. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(4), 281-300. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.09.001 .

Card S., MacKinlay J., Shneiderman B., (1999). *Readings in information visualization: Using vision to think.* San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers.

Castro-Rodríguez E., Pitta-Pantazi D., Rico L., Gómez P., (2016). Prospective teachers' understanding of the multiplicative part-whole relationship of fraction. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(1), 129-146. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9673-4.

Cheng P., (2002). Electrifying diagrams for learning: Principles for complex representational systems. *Cognitive Science 26*(6), 685–736. doi:10.1016/S0364-0213(02)00086-1.

Chen X., Li Y., (2009). Instructional coherence in Chinese mathematics classroom a case study of lessons on fraction division. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *8*(4), 711-735. https://doi.org/10.1007/s10763-009-9182-y.

Cohen L., Manion L., Morrison K., (2011). *Research methods in education*. UK: Routledge.

Cuoco A. A., Curcio F.R., (2001). *The roles of representation in school mathematics: 2001 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Deliyianni E., Gagatsis A., Elia I., Panaoura A., (2016). Representational flexibility and problem-solving ability in fraction and decimal number addition: A structural model. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(2), 397-417. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9625-6.

Dreher A., Kuntze S., (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(1), 89-114. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9577-8.

Dreher A., Kuntze S., Lerman, S., (2016). Why use multiple representations in the mathematics classroom? Views of English and German preservice teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(2), 363-382. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9633-6.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. *5*, 37-65.

Empson S. B., Levi L., Carpenter T. P., (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai, & E. J. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 409 – 428). Berlin, Germany: Springer.

Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*. *7*, 23-45.

Gras R., Peter P., Briand H., Philippe J., (1997). Implicative statistical analysis. In C. Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock, & Y. Baba (Eds.), *Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies* (pp. 412-419). Tokyo, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

Hackenberg A. J., (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(1), 27-47. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.03.002.

Hackenberg J. A., (2013). The fractional knowledge and algebraic reasoning of students with the first multiplicative concept. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(4), 538-563. https://doi.org/org/10.1016/j.jmathb.2013.06.007.

Hansen A., Mavrikis M., Geraniou, E., (2016). Supporting teachers' technological pedagogical content knowledge of fractions through co-designing a virtual manipulative. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(2-3), 205-226. http://dx.doi.org/10.1007/s10857-016-9344-0.

Hannula M. S., Maijala H., Pehkonen E., Soro R. (2002). Taking a step to infinity: Student's confidence with infinity. Tasks in School Mathematics. In S. Lehti & K. Merenluoto (Eds.) *Third European Symposium on Conceptual Change – A Process Approach to Conceptual Change* (pp. 195–200). University of Turku: Dept Teacher Education in Turku.

House J. (2000). Student self-beliefs and science achievement in Ireland: Findings from the third international mathematics and science study (TIMMS). *International Journal of Instructional Media 27*(1), 107-115.

Howe C., Luthman S., Ruthven K., Mercer N., Hofmann R., Ilie S., Guardia P., (2015). Rational number and proportional reasoning in early secondary school: towards principled improvement in mathematics. *Research in Mathematics Education, 17*(1), 38-56. https://doi.org/10.1080/14794802.2015.1019914.

Jacobson E., Izsa´k A., (2015). Knowledge and motivation as mediators in mathematics teaching practice: the case of drawn models for fraction arithmetic. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(5), 467-488. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9320-0.

Janvier C., (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Jordan N. C., Hansen N., Fuchs L. S., Siegler R. S., Gersten R., Micklos D., (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology, 116*(1), 45 – 58. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.02.001.

Kieren T. E., (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. In R. Leinhardt, R. Putnam, & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 323 – 371). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lester F. K., Garofalo J., Kroll, D. L. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: Key influences on problem-solving behavior. In D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving* (pp. 75-88). New York: Springer-Verlag.

Lee J. S., Shin J., (2015). Distributive partitioning operation in mathematical situations involving fractional quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(2), 329-355. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9478-9.

Lee M. Y, Hackenberg A. J., (2014). Relationships between fractional knowledge and algebraic reasoning: The case of Willa. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*(4), 975-1000. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9442-8.

Lo J-J., (1993). Conceptual bases of young children's solution strategies of missing value proportional tasks. *Proc. of the Seventeenth International Conference of Psychology of Mathematics Education* (pp. 162-177). Tsukuba, Japan: University of Tsukuba.

Mack N. K., (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: Partitioning, units and understanding multiplication of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(3), 267 – 295. https://doi.org/10.2307/749828.

National Council of Teachers of Mathematics, (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Olive J., Vomvoridi E., (2006). Making sense of instruction on fractions when a student lacks necessary fractional schemes: The case of Tim. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 18–45. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.11.003.

Petakos, K., (2016). Comparing fractions at the age of 11 through the use of the zone of proximal development. *Experiences of Teaching with Mathematics, Sciences and Technology*, *2*(2), 369-375.

Rønning F., (2013). Making sense of fractions in different contexts. *Research in Mathematics Education*, *15*(2), 201-202. https://doi.org/10.1080/14794802.2013.797741.

Ryken A., (2009). Multiple representations as sites for teacher reflection about mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *19*(2-3), 205-226. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9107-2.

Schoenfeld A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In A. D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics learning and teaching*, (pp.334-370).

Sedig K., Sumner M., (2006). Characterizing interaction with visual mathematical representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*(2), 1–55. https://doi.org/10.1007/s10758-006-0001-z.

Sfard A., (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715.

Shahbari A. J, Peled I., (2015). Resolving cognitive conflict in a realistic situation with modeling characteristics: coping with a changing reference in fractions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(4), 891-907. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9509-1.

Steffe L. P., Olive J., (2010). *Children ' s fractional knowledge*. New York: Springer.

Streefland L., (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Tobias M. J., (2013). Prospective elementary teachers' development of fraction language for defining the whole. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(2), 85-103. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9212-5.

About the Authors

Evgenios Avgerinos
Mathematics Education and Multimedia Laboratory,
Department of Education, University of the Aegean
1 Demokratias av., 85100 Rhodes, Greece
eavger@aegean.gr

Short Curriculum

- Professor of Mathematics and Mathematics Education.
- Manager of Mathematics Education and Multimedia Laboratory of the Department of Education, University of the Aegean.
- Scientist in the numerous research programs.
- Collaborates with the Greek Ministry of Education.
- From1990 he is reviewer in 5 international journals.
- He is the author of numerous scientific papers.

Roza Vlachou
Mathematics Education and Multimedia Laboratory,
Department of Education, University of the Aegean
1 Demokratias av., 85100 Rhodes, Greece
r.vlachou@aegean.gr

Short Curriculum

- Teacher in Primary Schools.
- PhD cadidate about the didactic of Mathematics.
- Cooperator of Mathematics Education and Multimedia Laboratory of the Department of Education, University of the Aegean.
- Instructor on teacher education.
- Peer Review Board in 6 Panhellenic conferences and 1 international conference.
- 25 publications in international and nationwide conferences, international journals, chapter in book.

Received October 05, 2018; *revised* November 18, 2018; *accepted* November 29, 2018; *published online* December 11, 2018

article

ISSN 2421-7247

Look ... what a beautiful figure: misconceptions and more in geometry

Ivan Graziani, Stefania Neri

Abstract. *The activities were carried out to a view to verticality and continuity between the first and second cycle of education. Our research group, Diverticalmath, which operates in the provinces of Forlì-Cesena and Ravenna, has been dealing with vertical teaching for a couple of years to make mathematics more fun and loved by students.*

The purpose was to verify the presence of misconceptions and to highlight, through a laboratory teaching, that geometry does not deal with the position of the figures, but only with their shape, their measurements and their transformations, isometric or not.

The students worked in small groups, in cooperative mode, also to foster constructive relationships among the comrades and to increase confidence in their means. Through these activities, we have tried to move from knowledge to know-how and, finally, to the construction of meanings, which then lead to building skills.

Key words. *Verticality, Figures, Geometry.*

Sommario. (Guarda… che bella figura: misconcezioni e altro in geometria). *Il nostro lavoro di ricerca è stato condotto su studenti di scuola primaria e secondaria di I e II grado.*

Le attività sono state svolte in un'ottica di verticalità e di continuità tra il primo e il secondo ciclo di istruzione. Il nostro gruppo di ricerca, Diverticalmath, che opera nelle province di Forlì-Cesena e Ravenna, si occupa, già da un paio di anni, della didattica in verticale per rendere la matematica più divertente e amata dagli studenti.

Lo scopo è stato quello di verificare la presenza di misconcezioni e di mettere in evidenza, attraverso una didattica laboratoriale, che la geometria non si occupa della posizione delle figure, ma solo della loro forma, delle loro misure e delle loro trasformazioni, isometriche o meno.

Gli studenti hanno lavorato a piccoli gruppi, in modalità cooperativa, anche per favorire relazioni costruttive tra i compagni e potenziare la fiducia nei loro mezzi. Attraverso queste attività abbiamo cercato di passare dal sapere al saper fare e, infine, alla costruzione di significati, che portano poi a costruire competenze.

Parole chiave. *Verticalità, Figure, Geometria.*

Introduzione

La nostra attività e il nostro lavoro di ricerca sono stati incentrati soprattutto sulla geometria e in particolare sulle "posizioni" delle figure geometriche.

Volevamo vedere se alcune difficoltà, emerse anche dalle indagini nazionali e internazionali, potessero avere radici profonde, iniziate già alla scuola dell'infanzia.

Abbiamo visto che, un po' a tutti i livelli, sia nel primo che nel secondo ciclo, ci sono diverse misconcezioni relative alle figure geometriche e soprattutto alle loro misurazioni.

Abbiamo lavorato con i bambini e i ragazzi in modo laboratoriale e a piccoli gruppi, introducendo anche alcuni aspetti di tipo ludico. Il tutto sempre con un'ottica di verticalità e di continuità.

Questo laboratorio è stato inoltre effettuato, con i docenti del primo ciclo, anche durante il XXXV Convegno UMI-CIIM "*Matematica e scienze nell'insegnamento: frontiere da aprire e ponti da costruire*", che si è tenuto a Cagliari, dal 4 al 6 ottobre 2018.

Destinatari e tempi

L'attività è stata svolta durante gli anni scolastici 2016/2017 e 2017/2018 con i docenti delle scuole del primo e del secondo ciclo e con gli studenti delle scuole dell'Infanzia, Primaria e Secondaria di I grado dell'Istituto Comprensivo di Santa Sofia (FC) e presso alcune classi di Liceo Scientifico e Istituti Tecnici e Professionali di vari indirizzi della provincia di Forlì-Cesena.

Attività e sperimentazione

La nostra attività di sperimentazione è iniziata dai docenti e dall'analisi della normativa vigente (indicazioni Nazionali per il primo ciclo e linee guida per il secondo ciclo di Istruzione), sempre in un'ottica di verticalità e di continuità.

Inoltre, secondo noi è molto importante abituare gli studenti fin da piccoli ad argomentare e a non avere paura a farlo. Abbiamo notato, infatti, che il timore di argomentare solitamente è inversamente proporzionale all'età e al grado scolastico frequentato, per cui abituare e continuare a far argomentare i ragazzi è fondamentale per una "buona riuscita" in matematica (Baccaglini et al., 2018).

Siamo partiti con una domanda che Alice pone allo Stregatto, nel famoso Romanzo di Lewis Carroll "*Alice nel paese delle meraviglie*" (vedi Fig. 1).

Fig. 1 – Alice e lo Stregatto

E proprio questo è il punto: Noi dove vogliamo andare?

La nostra "direzione" è fissata dai Traguardi per lo sviluppo delle competenze nelle indicazioni nazionali per il curricolo del 2012, nelle linee guida per i tecnici e nelle indicazioni per i licei.

Il traguardo non va, infatti, inteso come punto di arrivo, né come obiettivo statico di una disciplina, ma proprio come la direzione verso cui tendere la nostra azione didattica.

Un esempio in verticale del segmento che noi analizziamo è nella tabella (Tabella 1).

Tabella 1 – Traguardi al termine dei tre ordini del primo ciclo e del secondo ciclo (ricavato al Quadro di Riferimento Invalsi)

Traguardi al termine della scuola dell'Infanzia	Traguardi al termine della scuola Primaria	Traguardi al termine della scuola Secondaria di I grado	Traguardi al termine della scuola Secondaria di II grado
Individua le posizioni di oggetti e persone nello spazio usando termini come avanti/dietro, sopra/sotto…	Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo.	Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi.	Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi. Utilizza proprietà delle figure geometriche e teoremi per il calcolo di lunghezze, aree e volumi

Stabilita quindi la meta, occorre scegliere la strada da seguire e questa è tracciata dal Curricolo (verticale) di Istituto.

Da un ipotetico curricolo verticale per un Istituto comprensivo del primo ciclo di istruzione, per anni di snodo, abbiamo mostrato questa tabella (Tabella 2), relativa alle conoscenze su: posizioni e movimenti degli oggetti nello spazio e nel piano.

Tabella 2 – Abilità per anni di snodo

ABILITA' (fine SI) Riconosce, sperimenta e descrive relazioni spaziali (dentro/fuori, sopra/sotto, aperto/chiuso …) usando principalmente la gestualità. Coglie aspetti diversi dello stesso oggetto osservandolo da posizioni spazialmente differenti.	**ABILITA' (fine 3^SP)** Utilizza i concetti topologici mediante registri rappresentativi diversi. Effettua movimenti rigidi di figure nel piano e nello spazio e riconosce elementi invarianti. Si muove dallo spazio al piano e viceversa (sviluppi). Riconosce i diversi movimenti rigidi delle figure (traslazioni, rotazioni, simmetrie). Effettua, in contesti concreti, movimenti rigidi di oggetti e figure.
ABILITA' (fine 5^SP) Classifica i movimenti rigidi secondo criteri stabiliti. Effettua movimenti rigidi di oggetti e figure utilizzando gli strumenti della geometria. Riconosce figure uguali e descrive le isometrie necessarie per portarle a coincidere.	**ABILITA' (fine SS1°g)** Effettua movimenti rigidi utilizzando il piano cartesiano. Visualizza oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresenta su un piano una figura solida. Riconosce in vari contesti grandezze proporzionali e figure simili e riproduce in scala una figura assegnata.

Per introdurre le attività che avremmo svolto con gli studenti siamo partiti affermando:

"*La geometria è nata quando l'uomo cominciò a costruire le prime capanne*"

e abbiamo mostrato una figura (Fig. 2).

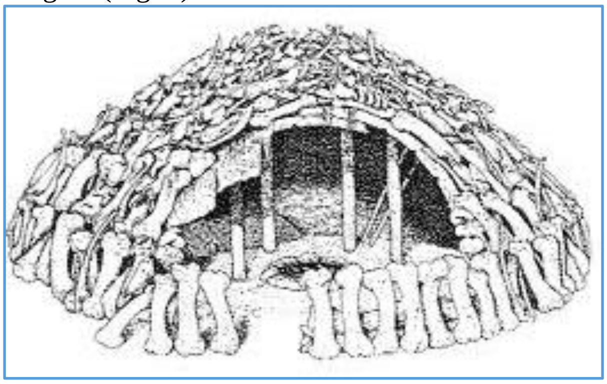


Fig. 2 – capanna preistorica

Poi abbiamo aggiunto: "Il cerchio è "l'ultima" figura che si studia a scuola, è considerata la più difficile… Perché? Forse la spiegazione sta in una simpatica vignetta (vedi Fig. 3).

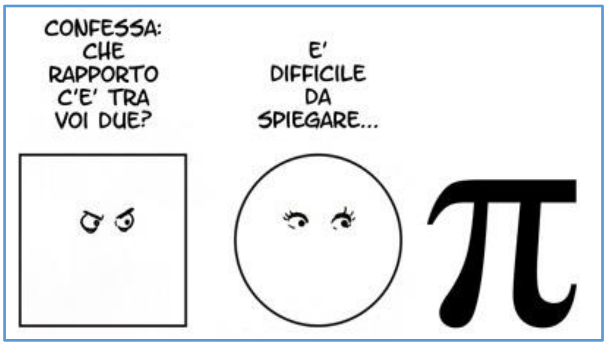


Fig. 3 – Vignetta umoristica

Siamo poi passati alle attività svolte con gli studenti nelle varie classi dei diversi ordini di scuola.

Le figure geometriche

Alla Scuola dell'Infanzia abbiamo iniziato, insieme alla maestra, a far vedere ai bambini di 5 anni varie figure geometriche semplici (quadrato, triangolo e cerchio) e abbiamo chiesto se conoscessero i loro nomi. La maggior parte dei bambini riconosceva subito le prime due figure e sapeva i loro nomi, mentre per il cerchio la maggior parte di loro lo chiamava "Tondo". È importante, fin dalla scuola dell'infanzia, introdurre i nomi corretti delle figure che i bambini incontrano, per evitare di creare delle misconcezioni che poi sono difficili da eliminare (D'Amore, Sbaragli, 2011).

Abbiamo poi chiesto di guardarsi intorno nella stanza in cui eravamo e di trovare quali figure fossero presenti simili a quelle viste.

Alle tre figure ne abbiamo aggiunte altre due che erano presenti nelle "forme" che avevano a scuola (il rettangolo e il pentagono). Appurato che alcuni conoscevano il nome del primo, ma nessuno quello del secondo. Abbiamo chiesto di vedere se quelle figure si trovavano intorno a loro. Un bimbo ha detto “di rettangoli ce ne sono tanti, anche fuori, il campo da calcio, la televisione, i biscotti…”.

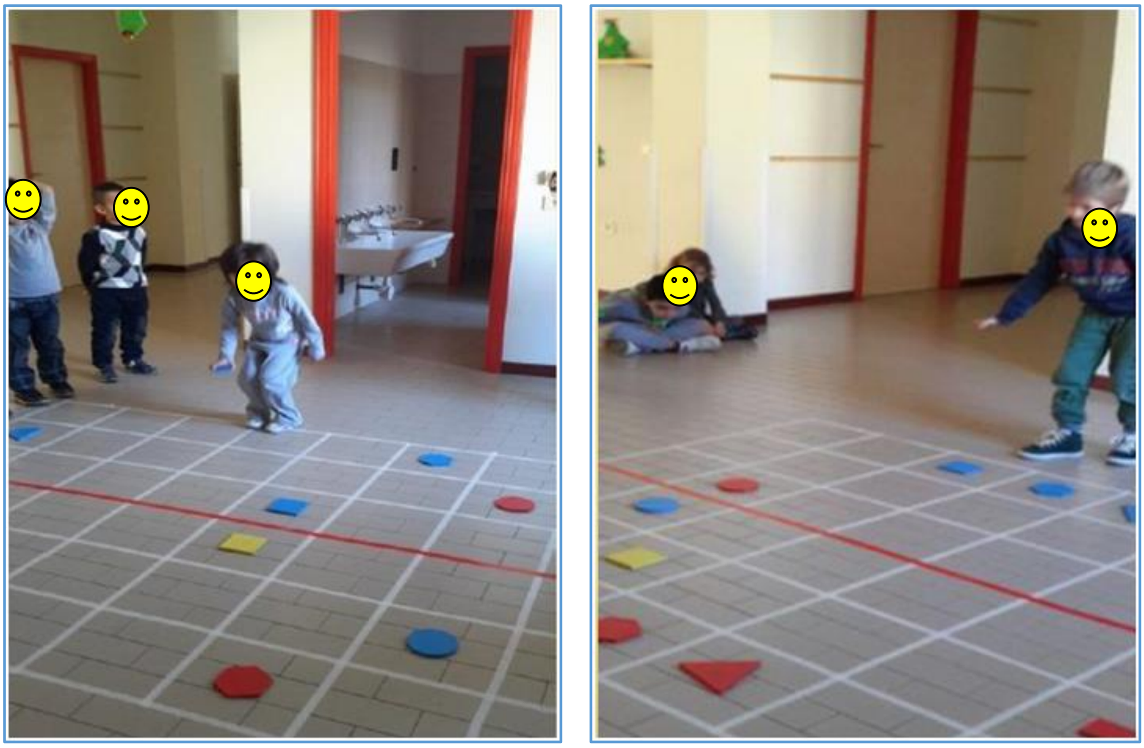


Fig. 4 – bambini all’opera nel gioco del Twister geometrico con le figure

Abbiamo poi chiesto ai bambini se muovendo sul pavimento una figura, questa cambiasse la forma, così come se loro si mettevano in piedi o sdraiati per terra cambiasse qualcosa nelle loro “forme”. I bambini hanno detto tutti di no, anche con il quadrato messo in posizione non standard.

Fig. 5 – bambini che giocano alle simmetrie con il Twister geometrico

A questa età, secondo noi, per fortuna i bambini sono ancora “puri” e non contaminati da eventuali preconcetti o misconcezioni.

Dopo abbiamo affrontato una attività-gioco, (vedi Fig. 4 e 5): abbiamo giocato a *Twister* geometrico. I bambini dovevano posizionare in modo simmetrico (è stato spiegato a loro con esempi pratici cosa significasse, anche simulando due bambini che si guardano come se fossero allo specchio), rispetto ad un asse posto sul pavimento, le figure geometriche viste precedentemente.

Con la scuola dell’infanzia ci siamo fermati qui. Per noi era importante soprattutto farli giocare con le figure geometriche e fargliele già vedere in posizioni non standard, per non mostrare sempre le figure in un’unica posizione come accade purtroppo spesso nei libri di testo. Abbiamo quindi avuto modo di ribadire alle docenti di chiamare le figure o altri oggetti matematici con il loro nome già da questo ordine di scuola, per non creare misconcezioni nei bambini.

Anche il linguaggio è importante: ad un corso per docenti abbiamo mostrato questa immagine che sul web è diventata in poco tempo virale (vedi Fig. 6).

Fig. 6 – Item mostrato al corso per docenti

Abbiamo detto ai docenti presenti: “Che figura facciamo (talvolta) noi docenti!”.

Immagini come queste ce ne sono anche altre, come quella, sempre virale, che chiede di trovare la *x* posizionata sull’ipotenusa di un triangolo con cateti noti (vedi Fig. 7).

Infatti, è estremamente importante quando si pone una domanda ai nostri studenti, non solo in geometria, essere molto chiari nella richiesta che viene fatta, per evitare problemi come quelli mostrati nelle due figure precedenti e fare, come docenti, una brutta figura.

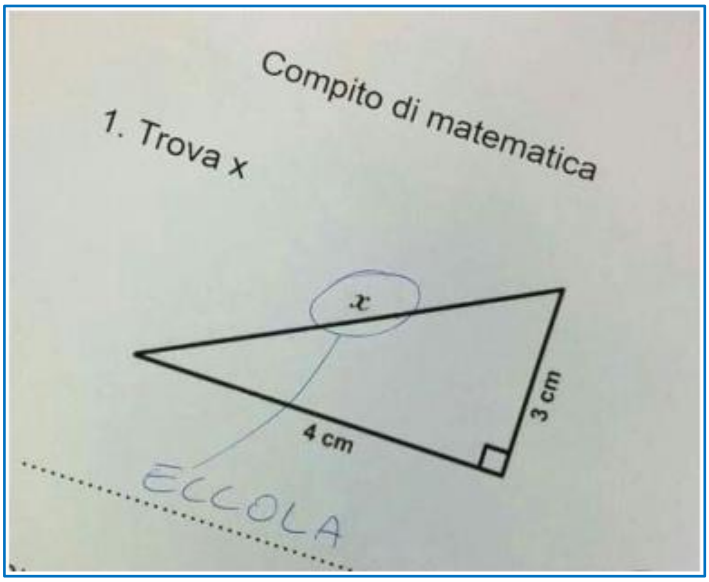


Fig. 7 – Item mostrato al corso per docenti

Nelle classi della scuola primaria abbiamo svolto una stessa attività, la cui preparazione è stata effettuata con difficoltà crescente dalla prima alla quinta.

Nelle prime due classi abbiamo fornito ai bambini già un foglio di forma circolare, mentre dalla terza in su abbiamo chiesto di realizzarlo partendo da un foglio A4. Abbiamo anche specificato che il foglio non doveva avere piegature. Questa era la consegna: "*Costruisci un foglio di forma circolare senza usare piegature*".

Poi agli studenti sono state date le seguenti indicazioni operative:

Disegna dentro di esso:

Te "steso" e "in piedi"
Un qualche oggetto "steso" e "in piedi"
un segmento verticale e un segmento orizzontale
Dall'altra parte del foglio disegna un rettangolo

Dopo l'attività abbiamo chiesto agli studenti: "Che differenze hai trovato nell'usare questo foglio?".

Tra le risposte ricorrenti e più simpatiche sono state le seguenti:

- È rotondo (studenti poco fantasiosi…).
- Non ha un verso.
- Non ha i quadretti (grandi osservatori…).

Allora abbiamo detto ai bambini: "Ecco dove volevamo arrivare!"

"La geometria si occupa forma, delle loro misure e delle loro trasformazioni, isometriche o meno, ma non della loro POSIZIONE!"

Anche con loro abbiamo giocato a Twister geometrico sia con i poligoni e le figure studiate, sia con i solidi, sia con loro stessi.

Abbiamo giocato con loro anche a un “Indovina chi – geometrico” (vedi Fig. 8), nel quale invece di dover individuare un personaggio in base alle caratteristiche del volto, come nel gioco originale, dovevano trovare a quale figura geometrica si riferivano le proprietà elencate (una alla volta).

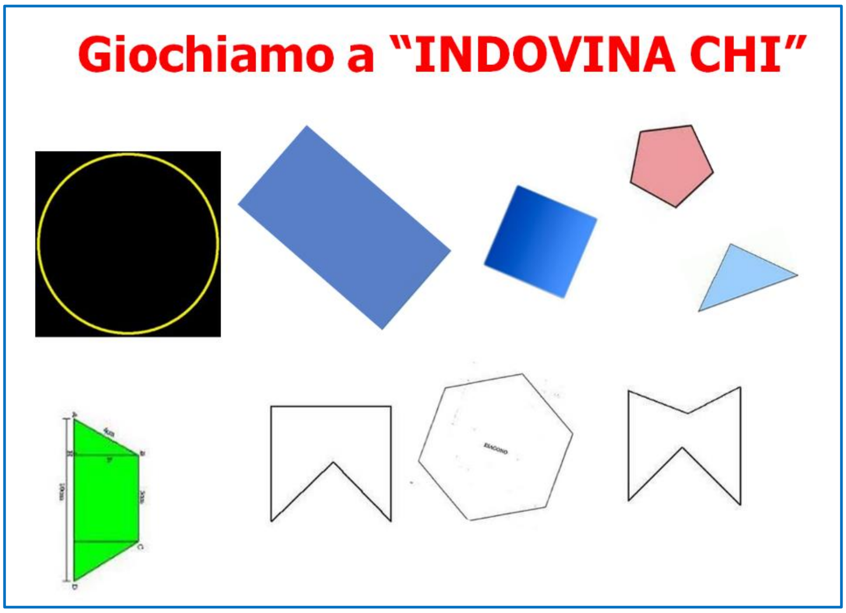


Fig. 8 – Figure di “Indovina chi – geometrico”

Le caratteristiche delle figure potevano essere le seguenti:

- *È un poligono* (in questo caso si eliminava il cerchio)
- *Ha più di 3 lati* (si eliminava il triangolo)
- *Non ha angoli retti* (si toglievano, quadrato, rettangolo e pentagono non regolare)
- *Ha meno di 6 lati* (si toglievano i due esagoni)
- *Ha due lati paralleli* (si eliminava il pentagono e rimaneva l’unico vincitore: il trapezio volutamente non in posizione standard come anche gli altri).

Nella scuola secondaria di I grado abbiamo giocato a “Indovina chi – geometrico”, introducendo anche i solidi, mentre nella secondaria di II grado abbiamo introdotto rette e curve della geometria analitica.

Nella scuola secondaria di I grado, ma già anche nelle ultime due classi della Primaria, abbiamo svolto delle attività con il software Geogebra.

Va comunque precisato che, secondo noi, i software di geometria dinamica possono aiutare gli studenti a visualizzare meglio alcune particolarità che si perdono nei libri di testo e nelle normali costruzioni come la possibilità di spostare i punti notevoli dei triangoli, o le misure degli angoli, rette parallele o perpendicolari, ecc. (vedi Fig. 9a e 9b).

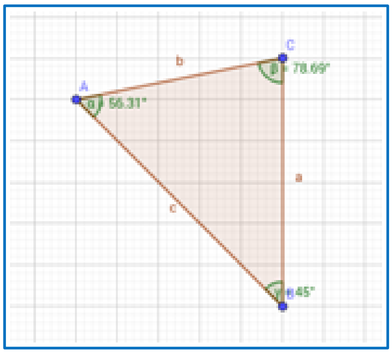


Fig. 9a – Per verificare che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre di 180°

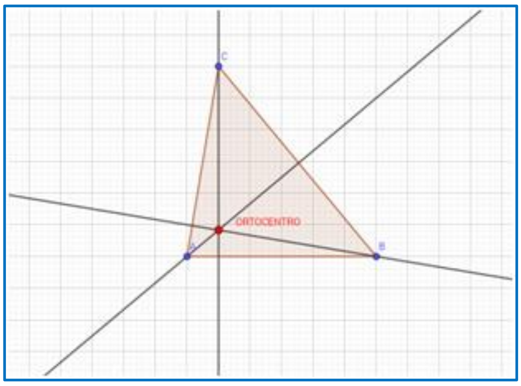


Fig. 9b – Per visualizzare come si sposta l'ortocentro dal triangolo acutangolo a quello rettangolo e quello ottusangolo

Tuttavia l'abilità di costruire figure con riga, squadra e compasso e la relativa manualità non devono assolutamente essere perse dai ragazzi, anche per comprendere meglio alcune caratteristiche che solo con la costruzione possono essere più adeguatamente interiorizzate.

Girando per le classi di scuola primaria e secondaria di I e II grado, ci siamo pure accorti che spesso ci sono grossi dubbi su alcune figure, anche elementari.

Questo accade soprattutto quando la loro "posizione" non è quella "standard" (vedi Fig. 10).

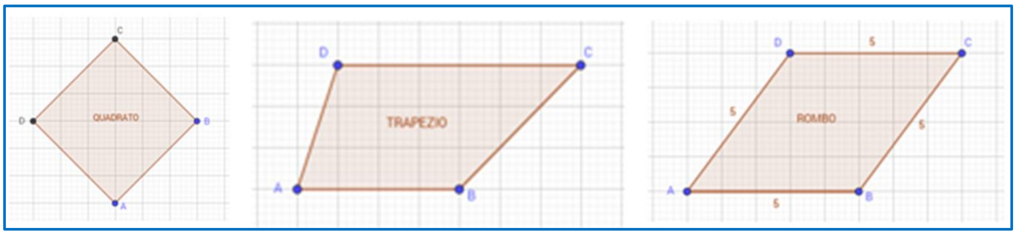


Fig. 10 – poligoni in posizione "non standard"

Purtroppo, anche alcuni libri di testo non aiutano molto, come nell'osservazione aggiunta proprio a un rombo rappresentato in forma non standard.

In un libro di testo per la secondaria di I grado abbiamo trovato un problema di questo tipo: "Determina l'area di un rombo avente il lato di 5 cm e l'altezza di 2 cm". La figura, sotto il testo, era rappresentata in forma non standard (vedi Fig. 11).

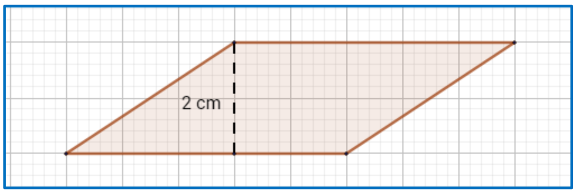


Fig. 11 – Il rombo, come era presentato nel testo

Fin qui tutto bene. Poi, però, sotto la figura c'era un riquadro che invitava ad osservare che "il rombo posizionato come in figura diventa un parallelogramma avente per base il lato del rombo e per altezza l'altezza del rombo".

Ma come "un rombo posizionato come in figura diventa un parallelogramma"? Prima non lo era?

Nelle classi quinte della Primaria e nelle due secondaria abbiamo svolto anche delle attività su alcuni quesiti di geometria contenuti nelle prove Invalsi degli anni precedenti.

Il primo quesito era parte della Prova Nazionale (terza secondaria I grado) nel 2013 (vedi Fig. 12). Il quesito, all'apparenza semplice, lo abbiamo assegnato dalla quinta primaria in su. La curiosità sta nel fatto che quelli che l'hanno maggiormente sbagliato sono stati gli studenti del biennio della secondaria di II grado (vedi Fig. 13).

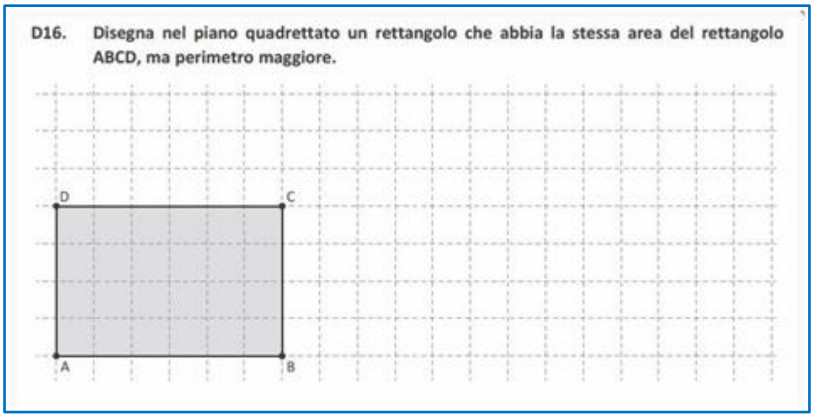


Fig. 12 – Item per il grado 8 del 2013

Da notare che nel testo della domanda compare due volte la parola rettangolo!

Un altro item interessante su cui si può lavorare con gli studenti dalla quinta primaria in su, è quello presente nella prova del 2017 (vedi Fig. 14) proprio per la quinta primaria, ma che ha dato qualche problema anche nelle due secondarie.

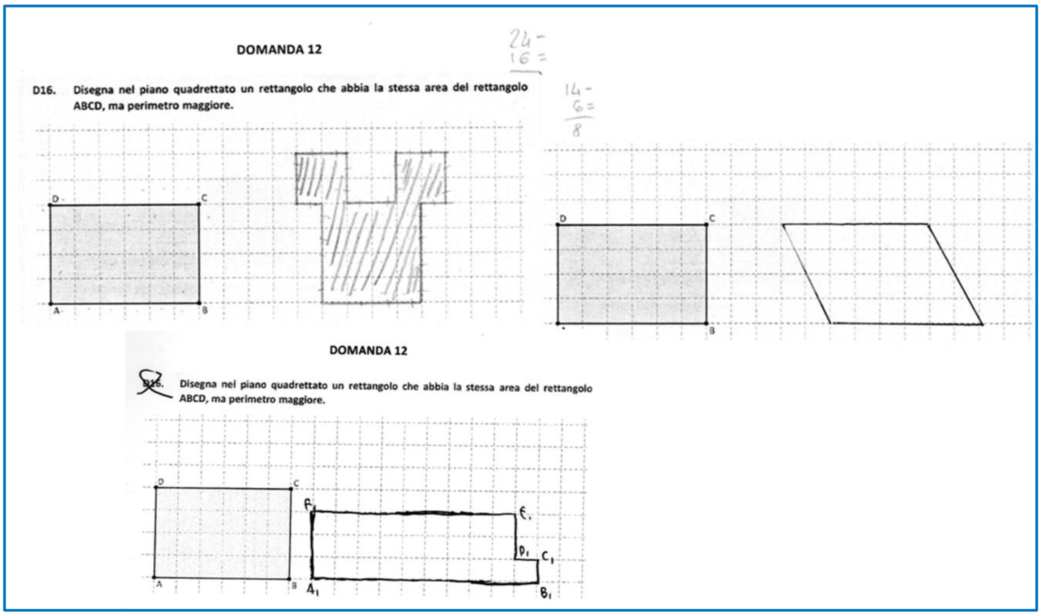


Fig. 13 – Errori in un istituto di secondo grado

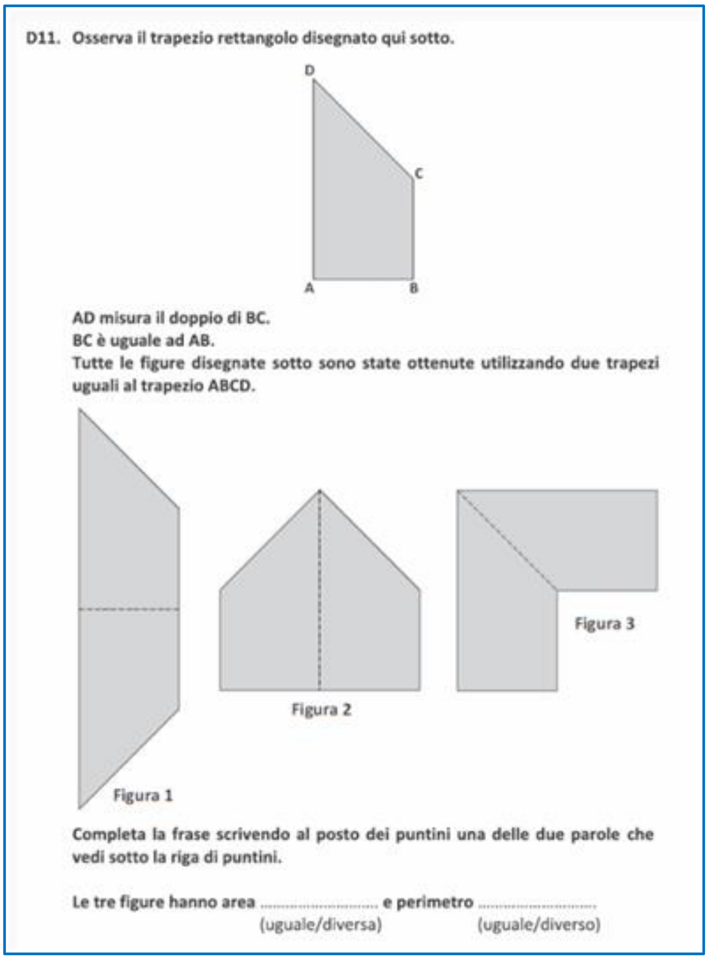
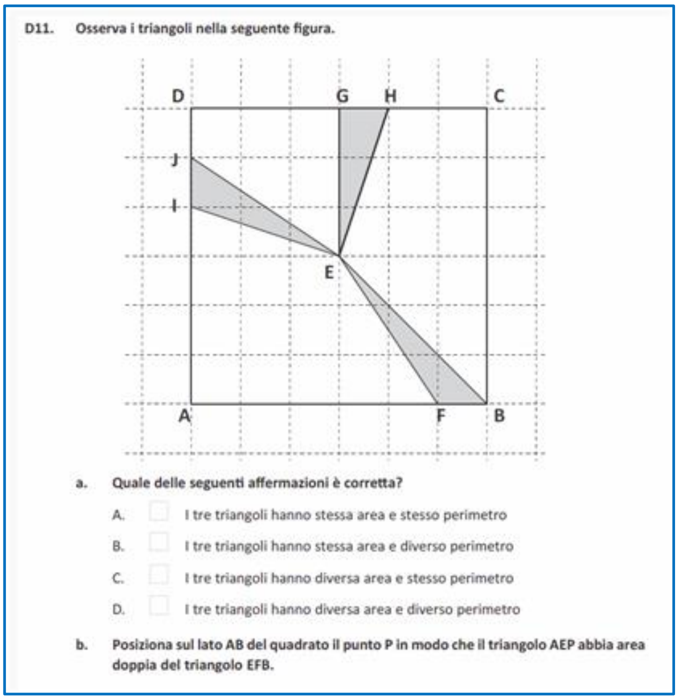


Fig. 14 – Item per il grado 5 del 2017

A noi è piaciuto, in particolare un quesito con due item, presenti nella Prova nazionale del 2015 (Fig. 15).


D11. Osserva i triangoli nella seguente figura.

a. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

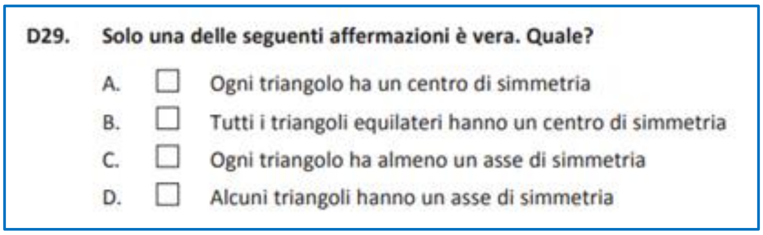
A. ☐ I tre triangoli hanno stessa area e stesso perimetro
B. ☐ I tre triangoli hanno stessa area e diverso perimetro
C. ☐ I tre triangoli hanno diversa area e stesso perimetro
D. ☐ I tre triangoli hanno diversa area e diverso perimetro

b. Posiziona sul lato AB del quadrato il punto P in modo che il triangolo AEP abbia area doppia del triangolo EFB.

Fig. 15 – Item per il grado 8 del 2015

In questo caso gli errori maggiori sono stati nel secondo item, anche con diverse "omissioni".

Un ultimo item su cui ragionare è quello uscito per la classe seconda della secondaria di II grado nel 2015 (Fig. 16), ma che può essere tranquillamente assegnato anche nella secondaria di I grado. Questo è interessante perché coglie una misconcezione che viene fornita anche da vari libri di testo.


D29. Solo una delle seguenti affermazioni è vera. Quale?

A. ☐ Ogni triangolo ha un centro di simmetria
B. ☐ Tutti i triangoli equilateri hanno un centro di simmetria
C. ☐ Ogni triangolo ha almeno un asse di simmetria
D. ☐ Alcuni triangoli hanno un asse di simmetria

Fig. 16 – Item per il grado 10 del 2015

Abbiamo somministrato il quesito a oltre 200 studenti dalla quinta primaria alla secondaria di II grado e molto studenti, in tutti gli ordini di scuola, hanno scelto la risposta B (36%), e altri (9%) hanno affermato che secondo loro erano giuste due risposte (B e D). Purtroppo, abbiamo trovato l'affermazione B anche in alcuni libri di testo sia della secondaria di I grado, sia in quella di II grado e questo porta a generare delle false convinzioni, che poi sono difficili da "sradicare" dalle menti dei nostri studenti.

Conclusione

Un motto latino recitava “ludendo docere” che significa “insegnare divertendo”. Con questo scopo è nato il gruppo di ricerca in didattica matematica Divertical-Math, e abbiamo condotto anche il nostro lavoro ricerca con i docenti prima e con i ragazzi in un secondo momento.

Per noi era importante ribadire di che cosa si occupa la geometria, sia con gli studenti che con gli insegnanti e questo lo abbiamo fatto in tutti gli ordini di scuola.

Dovevamo anche cercare di “scovare” e di “togliere di torno” alcune misconcezioni particolarmente “pericolose”, che, più avanti si va negli ordini di scuola, più sono difficili da eliminare. Una, soprattutto, è quella relativa ai concetti di area e perimetro che, nei nostri incontri e nelle schede, abbiamo trovato a tutti i livelli, anche in una ricerca svolta quest’anno su oltre 700 studenti del primo e secondo ciclo.

Affrontare comunque questi temi in forma giocosa e divertente, ha contribuito molto a interessare i bambini e i ragazzi, in una sorta di situazioni a-didattiche, tanto care a Brousseau (D’Amore, 2001).

Destare interesse per la geometria è molto importante, anche per migliorare la visione che gli studenti hanno, o che si stanno costruendo, della matematica. Spesso i ragazzi identificano la nostra disciplina come quella in cui si devono solo fare dei calcoli e se già da piccoli avranno una visione così distorta della matematica, difficilmente si impegneranno ad amarla e sicuramente la manterranno anche da adulti (Zan, Baccaglini Frank, 2017).

Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Bibliografia

Baccaglini Frank A., Di Martino P., Natalini R., Rosolini G., (2018). *Didattica della Matematica*. Mondadori Università.

D’Amore B., (2001). *Elementi di Didattica della Matematica*. Pitagora Editrice.

D’Amore B., Sbaragli S., (2011). *Principi di base di Didattica della matematica*. Pitagora Editrice.

Zan R., Baccaglini Frank A., (2017). *Avere successo in matematica – Strategie per l’inclusione e il recupero*. Utet.

Gli Autori

Ivan Graziani
Istituto Comprensivo di Santa Sofia – Scuola Secondaria di I grado "Galileo Galilei"
Via Arcangeli, 1, 47018 Santa Sofia (FC)
graziani.ivan@tin.it
Italy

Professore a tempo indeterminato di matematica. Formatore in didattica della matematica. Appassionato di ICT, di problem solving e di comunicazione didattica. Si occupa inoltre di processi di apprendimento e di valutazione in vari contesti formativi e di sistema.
Fa parte del "Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica della Matematica – Pisa" (GRSDM). Fa parte del gruppo di ricerca in didattica "Divertical-Math".
Collabora da diversi anni con l'Università di Bologna, con l'INDIRE (Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa), con l'INVALSI (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione) e con l'USR Emilia Romagna (Ufficio Scolastico Regionale).

Stefania Neri
Stefineri51@libero.it
Italy

Già insegnante di matematica nella scuola secondaria di I grado.
Formatrice in didattica della matematica. Si occupa inoltre di costruzione di curricoli verticali, processi di apprendimento e di valutazione in vari contesti formativi e di sistema e di didattica e valutazione per competenze.
Fa parte del gruppo di ricerca in didattica della matematica "Divertical-Math".

Received November 05, 2018; *revised* November 18, 2018; *accepted* November 28, 2018; *published online* December 12, 2018

article

EDiMaST

ISSN 2421-7247

Mathematical anxiety and the Zone of Proximal Development

Kyriakos Petakos

Abstract. *In the recent article mathematical anxiety in a group of junior students is discussed. These students have just entered tertiary education in the field of Hotel Management and have to deal with Business mathematics during their first semester. A question regarding mathematical anxiety is posed to them by the instructor. Their answers are written down and a sociocultural analysis ensues based on the renowned Vygotsky's theory.*

Key words. *Mathematical anxiety, Zone of Proximal Development, Sociocultural theory, Teaching mathematics.*

Sommario. *Nell'articolo viene discussa l'ansia matematica in un gruppo di studenti junior. Questi studenti sono appena entrati nell'istruzione terziaria nel campo della gestione alberghiera e hanno a che fare con la matematica aziendale durante il loro primo semestre. Una domanda riguardante l'ansia matematica è posta loro dal docente. Le loro risposte vengono trascritte e ne consegue un'analisi socioculturale basata sulla famosa teoria di Vygotskij.*

Parole chiave. *Ansia matematica, Zona dello sviluppo prossimale, Teoria socioculturale, Insegnamento della matematica.*

Introduction

Mathematical anxiety does not require any special definition as it is encountered in our every day teaching practice. It is a sort of anxiety that impedes the process of learning and leaves to us the difficult task of embellishing and beautifying mathematics as a subject material. Especially when teaching to university students that have already created their convictions about the subject in contrast with students at younger ages that appear easier to change stance towards mathematics (Petakos, 2016).

In this direction a cornerstone of the sociocultural theory inaugurated by Vygotsky and exemplified bu others (Kozullin, 2015, Chaiklin, 2003), the so-called Zone of Proximal Development, henceforth ZPD, will act as a catalyst. What is the Zone of Proximal Development? A classical definition will ensure " the distance between the actual development level as determined by independent problem solving and the level of potential development developed as determined through problem-solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers" (Vygotsky, 1978, p. 86 as cited in Chaiklin, 2003, p.40).

In the course of history this notion of ZPD has attracted the interest of many researchers and has adopted interpretations in general similar to each other, albeit with a separate nuance that seems to depict the author's personal stance towards it. For example, Palinscar (1998) advocates that it is "probably one of the most used and least understood constructs to appear in contemporary educational literature" (as cited in Chaiklin, 2003, p. 41).

Our goal here will be to construe how a certain group of students react to the mathematical anxiety employing as much as possible the concept of ZPD. The concomitant experiment will illustrate what we aim at based on this magnificent powerful tool that Vygotsky exhorts to use, language.

Methodology

In a class of 25 students that have just entered the university through a strict examination system, the following question is posed

Have you felt or are you still feeling mathematical anxiety? Deliberate to what or to whom this can be attributed.

Someone might claim that the ensuing writing down of answers will be proven to be biased by the nature of the question. On the contrary, we have to avow here that we exhibit as much loyalty as possible to the sociocultural theory of Vygotsky, one of whose primary components is speech, language.

Our question above is posed in an interpretative manner (Di Martino & Zan, 2010), which empowers the potential researcher and the classroom teacher to realize motives of deliberate actions successfully. We can state that, what we have accomplished here by writing down the students' answers and analysing them, tends to the three dimensions presented in Di Martino and Zan (2010), i.e.

- Emotional disposition toward mathematics
- Vision of mathematics
- Perceived competence of mathematics

That is why we chose to work with a cornerstone of Vygotsky's theory, the ZPD. This approach fits in our role as simultaneously teachers and researchers and moreover provides the student with the ability to give vent to some of their deep-rooted dormant beliefs and attitudes. Demeanours, over which they have mulled throughout the years, but never hitherto have been provided with the opportunity to openly articulate. Albeit the fact that the three dimensions mentioned above are inextricably interconnected, we need to avow that the first two eclipse the third in our impending analysis, without of course neither eliminating it nor diminishing its importance.

The eventual reader might ponder a little on the aforementioned comments and dither about which way to construe the gist of speech in writing down answers. It is a speech with ourselves what we deliberate in our minds before it can be articulated in words. A process in which every fibre of our spiritual being is employed and definitely involved. So, are we reversing the principle of Vygotsky's (Vygotsky, 1978) theory that the interpsychological level precedes the intrapsychological?

No way can that happen. As we grow up, we adapt more and more easily to a set of rules set by the society itself, cultural or not. Deliberation before talking is a rule given to us at an early age, whose repercussions will be experienced in our later life. Ergo, by letting the students write what they think about the question, we exhort them to this sort of internal speech that will not go unheeded as long as we analyse its aftermath.

Main Article

Out of the 25 students that were asked the aforementioned question, we had a return of 7 after a week of deliberation. Someone might consider poor the participation of the students but remaining loyal to the development of higher psychological processes under the Vygotskyan clout, (Vygotsky, 1978). This can be ascribed to the degree of maturity these students have mastered through the years, which is not always compatible with the one anticipated according to their learning outcomes. All but one seem to acknowledge the existence of mathematical anxiety. A categorization will ensue reflecting on the factor that causes them this anxiety which will also encompass the negative answer.

According to their answers the prevailing factor for the mathematical anxiety appears to be the teacher. Then the student herself and the prejudice surrounding this teaching subject. We will not deal with the educational system-process itself because it is interwoven in their answer with the role of teacher. Let us see how the answers concerning the teacher shape students' demeanour pertaining to this vigorous participant of the educational process.

Answers pertaining to the teacher

- Even if we consider that this anxiety has been always there, then this one manifested itself during middle school, in the face of our teacher of the time. In brief, the mathematical fear had become a person and was moving among us.
- In the end, an equally important role play the professors, who many times are indifferent to their students' understanding, try to cover long teaching material in a short period of time, and as a result, big and uncovered gaps are created among the students.
- Moreover the teachers that are responsible for the lesson do not provide the necessary basis because they have little time at their disposal that is why they focus on the good students.
- Sometimes it is a mistake on behalf of the teachers, who do not dedicate the required time to the students.
- (*This last one is coming from the student who feels liberated from any kind of mathematical anxiety and therefore should be construed differently*). A teacher should be as good a scientist as an educator with the whole meaning of the word, because ultimately it is a nice subject, which with the right teacher would be popular to everybody.

Let us expatiate on the above-mentioned answers. We take into account the first one. Here the student personifies the primary cause of mathematical anxiety, the fear itself, as the mathematics teacher. The space component of the Zone of Proximal Development (symbolically ZPD) manifests itself here. The use of the verb *move* also bestows a dynamic dimension to this space component.

The way that the student expresses herself demonstrates a concept by which we could conceptualise a reverse process of the ZPD. In this example, the presence of a more knowledgeable experienced peer proves to be to the detriment to the student's understanding of the teaching material. Inspired by this and adhering to our favourite mathematics terminology, we can liken the ZPD to an open interval, whose endpoints can be shifted according to appropriate use. It is sort of a topological interpretation.

The remaining answers touch a very sensitive theme of modern day education. Time allocated to teachers to cover their material according to the existing curriculum. Here the students' demeanour can be construed as beneficial not only to the teacher but also to the educational process itself. It is what we denominate as the time dimension of the ZPD. Allocation of time surely contributes to shaping our zone of proximal development whose direct repercussions are experienced by both the teaching subject and the appointed peer next to her.

Answers pertaining to the student herself

- Naturally a share of responsibility falls upon us
- There are students who are indifferent to many classes and in general to the school. Later on, as it is proven, these students face problems.
- It is just an aspect of my nature.

The second group of answers sheds light upon a self-reproach attitude towards mathematical understanding and its concomitant anxiety. To us, it is of paramount importance that there are students aware of their own share of responsibility, as stated so clearly in the first answer, and do not make an effort to exonerate themselves. Lack of time really deprives us of the chance to interview one by one these students, but we dare construe such a demeanour as a result of their own educational history. It is internalized in the center of the open interval of the ZPD the conviction that failure cannot be ascribed only to external factors, but also to internal ones.

Answers pertaining to the prejudice surrounding the teaching subject

- Of course, it is not mathematics what really causes me anxiety, as much as the way they have passed it on me subconsciously.
- Among the most important factors that predispose me negatively towards mathematics, is the general prejudice that surrounds them and their "enormous" difficulty. To this, parents contribute to an extent, who, considering this learning subject unattainable, force their offspring from an early age to seek help from a teacher outside the school, which consequently increases their anxiety.

In this case we see how contemporary the sociocultural theory of Vygotsky (Vygotsky, 1978) appears to be. The first student enunciated that with a very descriptive way. *The way they have passed it on me subconsciously*. Pass on really highlights the idea to what extent social and cultural processes have affected the student's personal stance. The learning subject cannot remain unaffected and untouched by what transpires around her. The ZPD makes its appearance again, because we have a transmission of messages by either a teacher, or a parent, or a schoolmate at an older age etc. Whether the ZPD enhances or dwindles the student's abilities depends on the activity this more experienced peer carries out within that zone.

The second example demonstrates better the aforementioned role, where the more experienced peer bears the name of parent. The family environment fits in the space component of the ZPD we discussed at the beginning of our main article. Parental intervention and its concomitant repercussions, which could form the inspiring idea of developing another article. Here we can also detect the transitivity property of the ZPD (Petakos, 2016) viewed as an equivalence class of influences. A parent ill-disposed towards mathematics, viewing it as something unattainable, passes on her child this preoccupation and exhorts her to seek help from a teacher outside classroom. Ergo, the child resorts to this teacher, who in her turn will be affected by the situation, in the sense that her beliefs about how to teach mathematics may be consequently altered. On this equivalence class characterisation, we will provide an explanatory comment in the Conclusions section that will ensue.

Ending this paragraph we need to state a comment given by the student who provided us the very first answer at the beginning of our section.

– Adoring the ancient Greek language, I understood that mathematics is directly associated with it and especially with its syntactical analysis. Now, as a student I am not afraid of mathematics.

The ZPD can encompass not only humans, but also theoretical abstract objects, which serve as sort of an exhortation source for further learning and development. The ancient Greek language, with its syntactical rules, is a strong incentive for the student to overcome the impediment already posed to her, the mathematical fear occasioned by a middle school teacher. Proper language teaching, another teaching discipline that might not seem akin to mathematics, induces the student to dedicate further time to master this initially fear-causing subject. She feels finally, as a college student, liberated from mathematical anxiety.

Conclusions

Before starting this section, we would like to declare that we were not able to transfer every inspiring phrase that students included in their answers. This can deprive the eventual reader by the generating feeling that these answers might pass on, through which sociocultural theory and its Zone of Proximal Development manifest themselves. We try to make up for it by employing this unstated part of the answers and also the dialogue that ensued the experiment in the Conclusion. To assuage the feelings of those who advocate the prevalence of certain disciplines over others, we avow that mathematics does not monopolize the concept of ZPD (Chaiklin, 2003) but it undoubtedly encompasses it.

In mathematical terminology, the zone of proximal development resembles that of an open interval in its topological meaning. The students is located in that interval ready not just to assimilate knowledge but also to strengthen and reinforce her mental capabilities. Social interaction will suitably serve this purpose by moving the endpoints of the interval. The wider the interval is, the more effective the way her mental capacities will be affected and therefore expanded. The social gift (Silvonen, 2010, p.50) is the shift of the interval's endpoints. Regarding the giver, we can apply this term rather to the teacher, the more competent person of the ZPD, whereas the process of expanding the interval's endpoints can be attributed to a joint effort by the giver and the receiver.

We think by Chaiklin's generality assumption of the ZPD (Chaiklin, 2003) that mathematics is by nature a subject that favours development, the transition from a lower to a higher layer, from the rudimentary form of ε-δ definition of the limit in a Calculus course to the concept of neighbourhood in the topology. Ergo, students' fear grounded on the premises of prejudice as reflected on their answers and the ensuing dialogue really encompass this characteristic of Vygotskyan thought. Riding a bicycle is not the quiddity of the generality principle of the

Vygotskyan pedagogical mind. But the use in general of wheel-based vehicles might approximate the so-called generality. Even if that example may be proven to be somehow unsuccessful, mathematical learning divided into layers corroborates better the aforementioned aspect. Missing a layer should surely form an impediment for moving to the next one, the higher one, and this gap will inexorably mark the student's ability to master mathematics. Building a step by step approach to get a better understanding of the mathematics' gist can surely be of some genuine benefit to the student, the teacher, the microsociety of the school itself. Let alone it complies with ZPD's generality aspect.

The role of a good teacher in the class and its concomitant repercussions on the individual student's learning is associated with the assistance assumption of ZPD (Chaiklin, 2003). We are surely embedded in a classroom that presupposes the existence of a teacher. In the general gist of the word teacher, someone who is not necessarily certified but is surely more competent than the student subject of learning. This can be well represented by a teaching assistant, a talented student, someone who the students can be aware of her competence and are ready to acknowledge that in class. We will remain a little bit on the word competent, since language is of paramount importance to Vygotskyan theory. Students that are advocates of a good teacher may not have the slightest idea of this teacher's knowledge credentials. In fact, in only one answer we viewed the teacher's scientific knowledge along with her performance in the classroom to be of equal importance. In the rest of the answers emphasising on the role of the teacher, students zero in on the interaction between the teacher and themselves. The teacher's educational background, albeit a prerequisite for becoming a teacher, is eclipsed by the calibre of the face-to-face collaboration with the student.

Ending this paragraph, let us reiterate a comment that was introduced in a previous article of ours referring to the ZPD as an equivalence class. It is reflexive by definition. It is inexorably symmetric, given the centre of this zone if the Vygotskyan definition implies such a centre. It is not only to the benefit of the less experienced one but also to the advantage of the more knowledgeable one, which encompasses the principles of modern didactics that in the learning process all involving sides are active. The students learn by interacting with us, and we do enhance our teaching performance by coping through a dialogue with their understanding impediments in the field of mathematics. This reciprocal relationship defines the symmetrical property of the zone of proximal development. Finally, the interaction of two different zones, as presented in the answer that included the parental intervention, demonstrates the transitivity, which completes our definition of an equivalent class.

Declaration of Conflicting Interests

The authors declared that they had no conflicts of interest with respect to their authorship or the publication of this article.

Publisher's Note

EDiMaST remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

Acknowledgements

The author would like to acknowledge the invaluable help of Professors A. Kozulin and J. Silvonen without whose contribution the present article could not have been written.

References

Chaiklin, S., (2003). The Zone of Proximal Development in Vygotsky's Analysis of Learning and Instruction. In Kozulin, A., Gindis, B., Ageyef, V., & Miller, S., (Eds.). *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context*, (pp. 39-64). New York: Cambridge University Press.

Di Martino, P. & Zan, R. (2010). 'Me and maths': towards a definition of attitude grounded on students' narratives, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(1), 27-48. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9134-z

Kozulin, A., (2015). Vygotsky's Theory of Cognitive Development. *International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences*. Second Edition (pp. 322-328).

Petakos, K., (2016). Comparing fractions at the age of 11 through the use of the zone of proximal development. *Experiences of Teaching with Mathematics, Sciences and Technology (2)*, 2 (pp. 369-375). www.edimast.it

Silvonen, J., (2010). Vygotsky's plural discourse on the human mind. In P. Aunio, M. Jahnukainen, M. Kalland, & J. Silvonen (Eds.). Piaget is dead, Vygotsky is still alive, (pp. 37-61). Research in Educational Sciences 51. Helsinki: Finnish Educational Research Association.

Vygotsky, L., (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

About the Authors

Kyriakos Petakos
Director of the Advanced School of Tourism Education ASTER
Dimokratias 2, 85100 Rhodes Greece
kyriakospetakos66@gmail.com

Dr Petakos is a mathematician graduated with Excellent from the University of Athens in 1988. He attended graduate courses at the University of Augsburg Germany and completed his PhD at the University of Athens in Applied Probability with Professor Papastavridis. His interests turned to mathematics education, and in this direction, he visited financially covered the SUNY Fredonia and SUNY Geneseo delivering speeches on his research on math education. He is currently Assistant Professor and Director of the Advanced School of Tourism Education of Rhodes ASTER.

Received December 06, 2018; *revised* December 18, 2018; *accepted* December 24, 2018; *published online* January 23, 2019

ISSN 2421-7247

article

Analysis of errors on area and perimeter in some Invalsi questions

Stefano Babini, Ivan Graziani

Abstract*. Many errors in mathematics are related to different reasons and to bring them back to the simple "have not understood" is too trivial. We carried out a research by submitting to 748 students (133 of Primary Schools, 249 Secondary Schools and 366 High Schools) some items taken from specific issues and retrieved thanks to the Gestinv platform.*

The aim of our research was to see how concepts like perimeter and area could be internalized and there were misconceptions in the various school orders. We also had the aim of verifying if recurrent errors, apparently linked to a wrong understanding of the text, are linked to other reasons as an incorrect learning of the presented concepts.

Often the learning of important concepts in mathematics is ephemeral, because it is not correctly internalized by students who soon forget what they think to have learned.

In our work we will present three items chosen in the space and figures that show how students, even of higher orders, can make mistakes that we would not expect from those who have been attending school for several years.

Key words. *Verticality, area and perimeter, Invalsi.*

Sommario. (Analisi di errori su area e perimetro in alcuni quesiti Invalsi). *Molti errori in matematica sono legati a diversi motivi e ricondurli al semplice "non hanno capito" è troppo banale. Noi abbiamo condotto una ricerca sottoponendo a 748 studenti (133 di Scuole Primarie, 249 di Secondarie di I grado e 366 di Secondarie di II grado) alcuni item tratti da fascicoli invalsi e reperiti grazie alla piattaforma Gestinv.*

Lo scopo della nostra ricerca era quello di vedere come potevano essere interiorizzati concetti come perimetro e area e si vi fossero delle misconcezioni nei vari ordini di scuola. Avevamo, inoltre, lo scopo di verificare se comparivano errori ricorrenti, legati a errata comprensione del testo o ad altre motivazioni legate ad altri motivi sempre collegati a un non corretto apprendimento dei concetti presentati.

Spesso l'apprendimento di concetti importanti in matematica risulta effimero, perché non viene correttamente interiorizzato dagli studenti che dimenticano in breve tempo quanto pensano di aver appreso.

Nel nostro lavoro presenteremo tre item scelti in ambito spazio e figure che mostrano come gli studenti, anche di ordini superiori possano commettere errori che non ci aspetteremmo da chi frequenta la scuola da diversi anni.

Parole chiave. *Verticalità, area e perimetro, Invalsi.*

Introduzione

Il nostro lavoro di ricerca è nato con l'intento di indagare su come cambiassero o si consolidassero nel primo e nel secondo ciclo le conoscenze e le competenze degli studenti su alcuni aspetti relativi a area e perimetro delle figure piane.

Per la nostra ricerca abbiamo utilizzato vari item di prove Invalsi di questi ultimi anni, ricavate grazie al sito Gestinv e assemblati in fascicoli, somministrati a studenti di quinta primaria, seconda e terza classe della secondaria di I grado e prima, seconda e quarta classe di scuola secondaria di II grado. Per questo studio particolare abbiamo considerato i tre quesiti nei quali avevamo rilevato i risultati più interessanti.

In tutto sono stati somministrati 748 fascicoli in 37 classi dei vari ordini di scuola. Tutti gli studenti hanno avuto gli stessi fascicoli composti da item di grado 5, 8 e 12.

La nostra domanda di ricerca iniziale partiva dall'intento di verificare se ci fosse, come prevedibile, un miglioramento degli apprendimenti procedendo in verticale dalla scuola primaria alla secondaria di II grado.

I nostri risultati ci hanno portato non solo a smentire tale ipotesi iniziale, ma anche a trovare tipologie di errori legati a competenze non consolidate e anche a misconcezioni che hanno fatto virare la nostra ricerca in quella direzione.

Quadro teorico

Gli aspetti di natura didattica

Relativamente al problema specifico su perimetro e area relativo alla nostra ricerca, ci riferiamo anche ad un lavoro di D'Amore e Pinilla (2006) nel quale si concludeva che "l'ostacolo che si oppone alla costruzione di una conoscenza soddisfacente sulle relazioni tra «perimetro e area» non è solo di natura epistemologica bensì *anche di natura didattica*".

Abbiamo quindi analizzato i possibili problemi anche dal punto di vista didattico.

Il termine Sistema didattico, usato dai ricercatori, indica uno schema triangolare formato dai 3 vertici rappresentati da insegnante, allievo e sapere, cioè dalle conoscenze di una disciplina che l'insegnante ha lo scopo di far apprendere all'allievo (vedi Fig. 1).

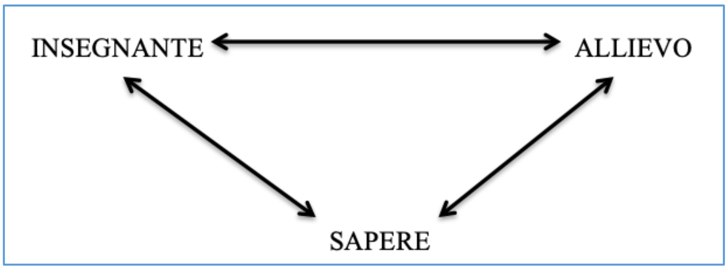


Fig. 1 – il triangolo del sistema didattico

Lo schema va considerato come un riferimento ai tre soggetti che entrano in contatto tra loro al momento dell'azione didattica e le frecce indicano il fatto che questi interagiscono fortemente.

Bisogna però chiarire il significato della parola sapere nei vari aspetti che lo contraddistinguono:

- Abbiamo un *sapere accademico*, proprio dell'insegnante, nel nostro caso il sapere matematico.
- Il sapere accademico deve diventare *sapere insegnato*, quello che viene trasmesso agli studenti.
- Il *sapere insegnato* non serve a niente se non diventa a sua volta *sapere appreso* (qui ci spostiamo sul vertice degli studenti).
- Infine il *sapere appreso*, perché sia veramente interiorizzato, deve diventare *sapere competente*.

Quello della *competenza* è poi un concetto dinamico e complesso, risultato di un intreccio a *più dimensioni*:

- *Sapere* (dimensione *cognitiva*): riguarda il possesso di conoscenze e l'organizzazione dei concetti ad esse collegate.
- *Saper fare* (dimensione *operativa* o *procedurale*): concerne le abilità che caratterizzano le azioni che il soggetto può compiere con l'uso di tali conoscenze.
- *Saper comunicare* (dimensione *comunicativa*): riguarda la capacità di comunicare significati con linguaggi via via più formalizzati.
- *Saper essere* (dimensione *affettiva*): coinvolge le motivazioni e le disposizioni interiori del soggetto che accetta di mettersi in gioco, conferendo un senso alle proprie conoscenze e abilità.

Il triangolo diventa in questo modo un quadrilatero (Castoldi, 2012) con un nuovo vertice rappresentato dalla componente emotiva, che comprende anche la visione che gli studenti hanno della matematica (vedi Fig. 2).

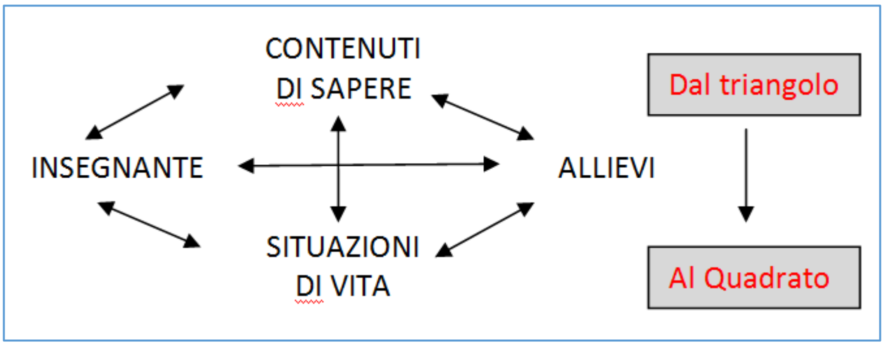


Fig. 2 – il triangolo del sistema didattico

L'importanza di alcuni termini

Una prima distinzione doverosa per chi insegna o si occupa di didattica è quella fatta dal punto di vista pedagogico tra errore e sbaglio (Binanti, 2001). C'è infatti una sostanziale differenza tra il commettere un errore o l'incorrere in uno sbaglio, perché i presupposti di queste due realtà sono diametralmente opposti.

Si commette un errore quando deliberatamente ci si allontana (cioè si erra, da cui l'etimologia del

termine errore) dalla verità, da ciò che ci può far raggiungere i nostri obiettivi.
Si incorre invece in uno sbaglio quando, pur andando nella giusta direzione verso ciò che desideriamo raggiungere, prendiamo un abbaglio o pecchiamo di sbadataggine (l'etimologia del vocabolo infatti viene contesa tra abbaglio, dall'evidente significato, e "disbadaglio", ossia sbadataggine). In questa categoria rientrano anche i cosiddetti errori di distrazione.
C'è chiaramente anche una grossa differenza tra queste due tipologie dal punto di vista ponderale (di gravità), diagnostico e "curativo" (recupero).
Un'altra doverosa distinzione che spesso anche i libri di testo trascurano, è quella tra esercizio e problema (D'Amore, Pinilla, 2006): anche se entrambi hanno una funzione nel processo di apprendimento della matematica, molto spesso i due termini sono confusi tra loro e molti esercizi vengono "spacciati" come problemi.
Secondo Zeitz (2007), un esercizio è qualcosa che si sa esattamente come risolvere: se dato come compito a scuola, richiederà con tutta probabilità di usare gli argomenti appena svolti a lezione. Un problema è, invece, qualcosa che non sappiamo come affrontare, e per cui dobbiamo costruirci un percorso che ci porti alla soluzione.
Un esercizio consolida quindi le abilità e mette a fuoco le conoscenze, mentre un vero problema deve far mettere in campo le abilità e le conoscenze ma, soprattutto, deve esplicitarle in competenze.

Le misconcezioni

Un termine molto usato da decenni nella ricerca in didattica della matematica è la parola "misconcezione"; tale parola viene interpretata in modi diversi dai vari Autori ma assume nella maggior parte dei casi semplicemente connotati negativi, come sinonimo di "errore", "giudizio erroneo", "idea sbagliata", ma anche "equivoco" o "malinteso"; si trova intesa anche nel senso più esteso di "concezione fallace". Per questa ragione le misconcezioni vengono spesso citate quando si fa riferimento alla didattica relativa agli errori.
«Il termine misconcezione che ha origine negli Stati Uniti potrebbe non essere il termine più appropriato se ci si riferisce alla conoscenza degli studenti "non corretta". La nozione di "correttezza" non è assoluta e si riferisce sempre ad un dato sapere; il sapere di riferimento può anche evolversi. I criteri di rigore in matematica sono cambiati considerevolmente nel tempo. Ogni concezione ha un suo dominio di validità e funziona per quel preciso dominio. Se questo non avviene, la concezione non sopravvive. Ogni concezione è in parte corretta e in parte non corretta. Quindi sembrerebbe più conveniente parlare di concezioni rispetto ad un dominio di validità e cercare di stabilire a che dominio queste appartengono» (D'Amore, Sbaragli, 2011).
Un misconcetto sta, infatti, più ad indicare un'interpretazione distorta di un concetto, cioè diversa da quella ufficialmente riconosciuta valida. La sua presenza può dare luogo a errori sistematici, come quelli commessi nell'applicazione di algoritmi. Nel caso di procedure "molti allievi sbagliano perché applicano in modo corretto delle procedure scorrette e non perché applicano le procedure corrette in modo scorretto" (Zan, Baccaglini-Frank, 2017).
Si possono distinguere due categorie di misconcezioni: *inevitabili* ed *evitabili* (Sbaragli, 2005).
Le misconcezioni inevitabili non dipendono direttamente dalla trasposizione didattica effettuata dal docente né dall'ingegneria didattica, ma dalla necessità di dover dire e mostrare qualcosa per poter spiegare un concetto, che non potrà mai essere esaustivo di ciò che si sta proponendo anche a causa dalle caratteristiche ontogenetiche legate all'allievo.

Tali misconcezioni sono quindi imputabili alla necessità di dover partire da un certo sapere iniziale da dover necessariamente comunicare in modo non ineccepibile.

Le *misconcezioni evitabili* dipendono, invece, proprio *dalle scelte che l'insegnante fa per effettuare la trasposizione didattica* e scelte concernenti l'*ingegneria didattica*. Queste misconcezioni sono state assai studiate e sembrano dipendere dalla prassi scolastica "minata" da improprie consuetudini proposte dagli insegnanti ai propri allievi.

Capita spesso che, a complicare l'apprendimento dei concetti matematici, incidano le decisioni prese dall'insegnante, a volte derivanti dalle proposte della *noosfera* (libri di testo, programmi, riviste, …), di fornire all'allievo giorno dopo giorno, sempre e solo univoche rappresentazioni convenzionali che vengono così accettate ciecamente dall'allievo come univoche e anzi obbligate a causa del *contratto didattico* instaurato in classe e del fenomeno di *scolarizzazione* (D'Amore, 1999).

Le continue e univoche sollecitazioni fornite dall'insegnante fanno sì che lo studente confonda la rappresentazione proposta con il concetto matematico che si vuole far apprendere: «Lo studente non sa che sta apprendendo segni che stanno per concetti e che dovrebbe invece apprendere concetti; se l'insegnante non ha mai riflettuto su questo punto, crederà che lo studente stia apprendendo concetti, mentre questi sta in realtà "apprendendo" solo a far uso di segni» (D'Amore, 2003).

Ne consegue che occorre didatticamente fare molta attenzione alla scelta, ai contesti ed alle modalità d'uso dei segni che rappresentano il concetto matematico che si vuole far apprendere ai propri allievi; un'attenzione che è spesso sottovalutata o data per scontata.

In alcuni casi di errore può rientrare anche una distinzione operata anche da Trinchero (2016) tra lo studente abile e lo studente competente (vedi Tabella 1).

Tabella 1. Distinzione tra allievi "abili" e "competenti" (Trinchero, 2016)

	Allievo "abile"	**Allievo "competente"**
Risorse	Conosce il concetto di prodotto e di area, sa effettuare prodotti, …	Conosce il concetto di prodotto e di area, sa effettuare prodotti, …
Strutture di **interpretazione**	Si chiede "Quando abbiamo trattato queste figure a scuola?"	Legge il problema come "Trasformare le figure irregolari in figure note"
Strutture di **azione**	Cerca, senza successo, di applicare una formula risolutiva nota	Trasforma le figure irregolari in figure note
Strutture di **autoregolazione**	Rinuncia a risolvere il problema ("Non lo abbiamo trattato a scuola)	Se la trasformazione non porta ad una soluzione, cerca trasformazioni alternative.

In quasi tutti gli errori commessi nei quesiti che abbiamo proposto agli studenti dei vari gradi di scuola, dalla quinta Primaria alla quarta secondaria di II grado, si ravvisano problemi legati anche ai quattro tipi di conoscenze individuabili: fattuale, concettuale, procedurale e metacognitiva (Trinchero, 2017).

- *Conoscenza fattuale*, costituita da fatti, termini e elementi di base necessari per comprendere concetti complessi o risolvere problemi in un determinato ambito conoscitivo.

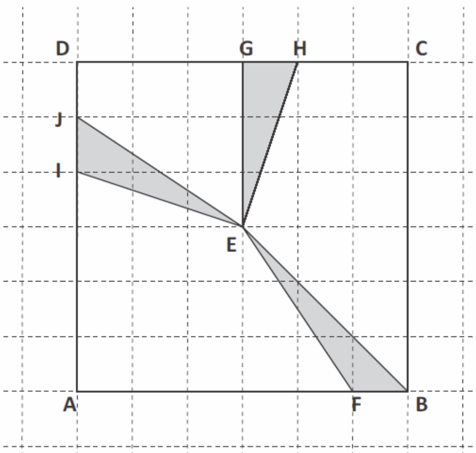
- *Conoscenza concettuale*, data da classificazioni, principi, teorie, generalizzazioni, modelli e strutture necessari per comprendere concetti complessi o risolvere problemi in un determinato ambito conoscitivo.
- *Conoscenza procedurale*, che comprende gli algoritmi, le tecniche, i metodi e le strategie utili per compiere operazioni specifiche in un determinato ambito conoscitivo.
- *Conoscenza metacognitiva*, che include la consapevolezza del proprio funzionamento cognitivo, la conoscenza contestuale e strategico-riflessiva per la risoluzione di problemi in un determinato ambito conoscitivo.

A scuola normalmente ci si occupa maggiormante dei primi tre tipi di conoscenza e proprio la mancanza di consapevolezza di quanto appreso, e della sua utilità in contesti differenti, è alla base di vari errori e alimentano alcune misconcezioni anziché estinguerle.

Destinatari e tempi

Il campione che abbiamo scelto è stato coinvolto durante l'anno scolastico 2017/2018, grazie alla disponibilità dei colleghi delle varie classi del primo e secondo ciclo.
Abbiamo chiesto la disponibilità ai docenti, ricevendo una risposta che è stata largamente al di là delle nostre migliori aspettative.

D11. **Osserva i triangoli nella seguente figura.**



a. **Quale delle seguenti affermazioni è corretta?**

A. ☐ I tre triangoli hanno stessa area e stesso perimetro

B. ☐ I tre triangoli hanno stessa area e diverso perimetro

C. ☐ I tre triangoli hanno diversa area e stesso perimetro

D. ☐ I tre triangoli hanno diversa area e diverso perimetro

b. **Posiziona sul lato AB del quadrato il punto P in modo che il triangolo AEP abbia area doppia del triangolo EFB.**

Fig. 3 – item G8 del 2014

Nella ricerca sono state quindi coinvolte 37 classi per un totale di 748 studenti: 133 della scuola primaria (6 classi); 249 della scuola secondaria di primo grado (12 classi di cui 5 di seconda e 7 di terza) e 366 della scuola secondaria di secondo grado (21 classi: 5 di liceo scientifico, 2 di liceo classico, 1 di liceo linguistico, 2 di liceo artistico, 2 di I.T. Economico, 2 di I.T.A.S., 2 di I.T. Tecnologico, 2 di I.T. per Geometri e 1 di I.P. Alberghiero).
Da osservare che le scuole sono state scelte appositamente in località diverse e per la secondaria di secondo grado vi sono classi di liceo, tecnico e professionale.

Attività e sperimentazione

Il primo quesito che abbiamo scelto di analizzare è composto da due item (a e b) ed era presente nella Prova Nazionale (G8) nel 2014 (vedi Fig. 3).

L'item a (vedi Tabella 2) ha avuto risultati migliori nella terza secondaria di I grado e un andamento di risposte corrette non lineare tra il primo e il secondo ciclo. Stupiscono per differenti ragioni i valori inferiori in quinta primaria e in 4 secondaria di II grado.

Tabella 2. Risultati nei diversi ordini di scuola nell'item a G8 del 2014

	corretta
V Primaria	59,4%
II Sec. I grado	69,9%
III Sec. I grado	74,3%
I Sec. II grado	57,9%
II Sec. II grado	71,7%
IV Sec. II grado	55,8%
Campione nazionale	44,5%

Per la quinta stupisce che la risposta più scelta tra quelle errate sia stata la A, in quanto se capiscono che l'area rimane uguale, dovrebbero, anche in linea con le risposte date precedentemente negli altri item, osservare che i perimetri invece sono diversi.
Per la IV secondaria di II grado stupisce che sia stata scelta da alcuni la risposta D, perché dovrebbero avere interiorizzato nel corso degli anni il fatto che l'area di triangoli, con base e altezze congruenti, siano uguali.

Tabella 3. Risultati nei diversi ordini di scuola nell'item b G8 del 2014

	corretta
V Primaria	60,2%
II Sec. I grado	69,1%
III Sec. I grado	70,8%
I Sec. II grado	60,2%
II Sec. II grado	71,7%
IV Sec. II grado	68,4%
Campione nazionale	59,1%

Per quanto riguarda i risultati relativi all'item b (vedi Tabella 3), si può notare che in genere abbia avuto risultati non troppo distanti dal campione nazionale. Nel campione nazionale l'item b ha avuto inoltre risultati significativamente migliori rispetto a quelli dell'item a. La stessa cosa non si registra invece nel nostro campione.

Resta da notare tuttavia che, per questo item, la maggior parte degli errori è consistita nel fatto di tracciare Il segmento EP come altezza, quindi perpendicolarmente ad AB, senza considerare la lunghezza del segmento AP (vedi Fig. 4). Emerge qui una misconcezione comune a molti studenti convinti che l'altezza sia un segmento perpendicolare alla retta orizzontale e quindi solo verticale.

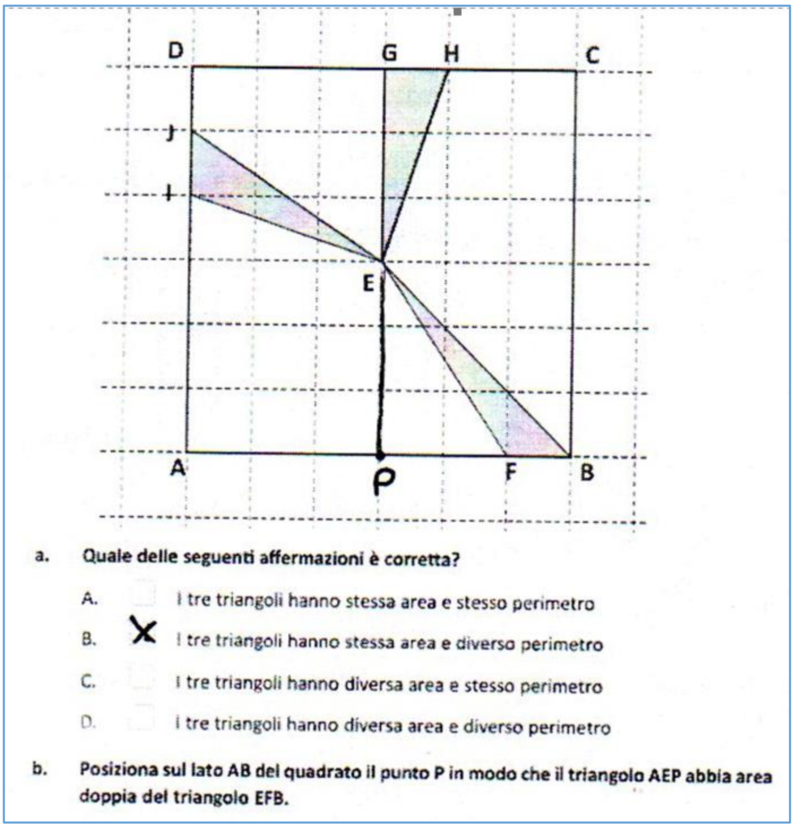


Fig. 4 – errore tipico legato all'altezza

Il sesto item che abbiamo analizzato era inserito nel fascicolo della Prova Nazionale del 2013 (vedi Fig. 5).

Era un item che ritenevamo facile e che non pensavamo che avrebbe creato tanti problemi, soprattutto agli studenti della secondaria di II grado, soprattutto nella classe prima e quarta (vedi Tabella 4).

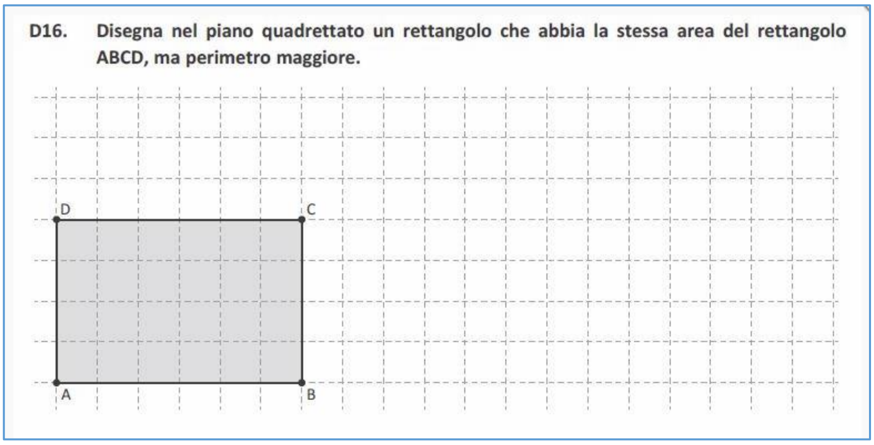
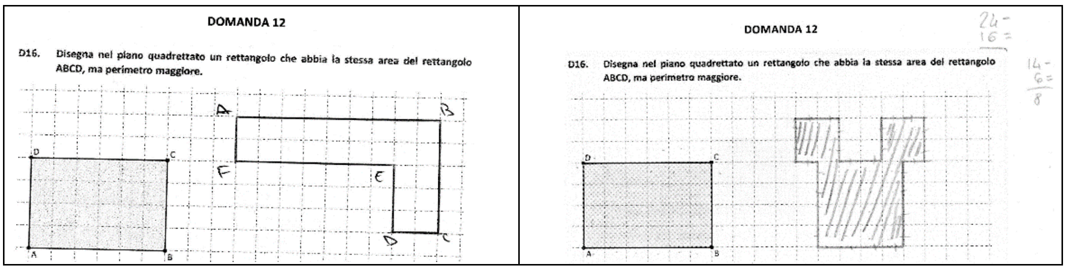


Fig. 5 – item G8 del 2013

Tabella 4. Risultati nei diversi ordini di scuola nell'item G8 del 2013

	corretta
V Primaria	70,7%
II Sec. I grado	80,1%
III Sec. I grado	77,9%
I Sec. II grado	60,2%
II Sec. II grado	74,6%
IV Sec. II grado	58,9%
Campione nazionale	57,8%

Poi, esaminando i fascicoli siamo riusciti a stupirci per il fatto che, pur comparendo ben due volte la parola “rettangolo” nel testo della domanda, gli studenti della prima classe della secondaria di II grado abbiano avuto particolare creatività nel rispondere (vedi Fig. 6).
In questo caso può entrare in gioco anche una lettura selettiva del testo (Zan, 2016), per cui gli studenti, anche svolgendo calcoli e aggiustamenti, si sono concentrati solo sulla richiesta relativa al perimetro.



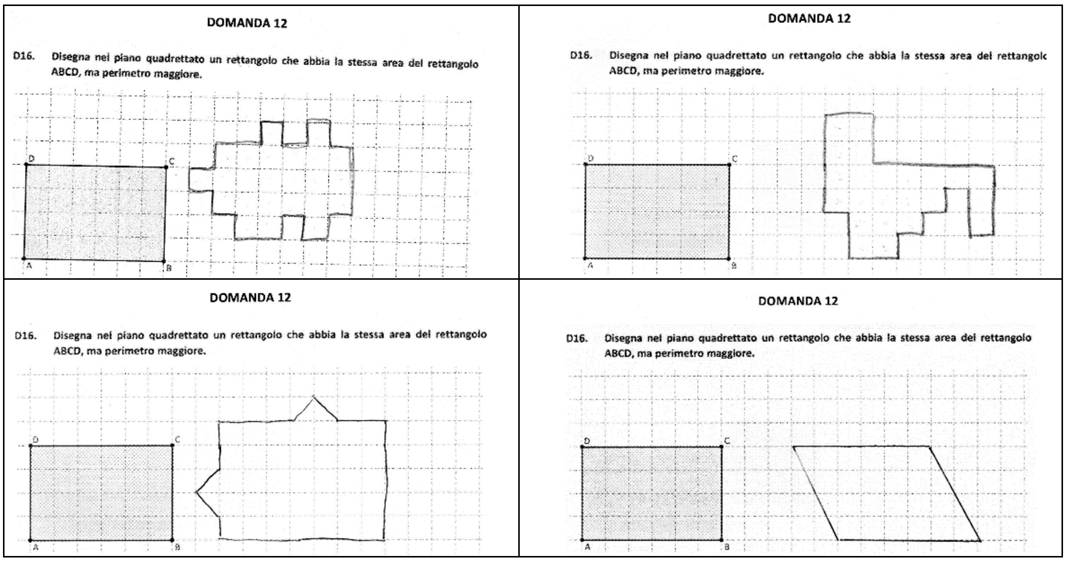
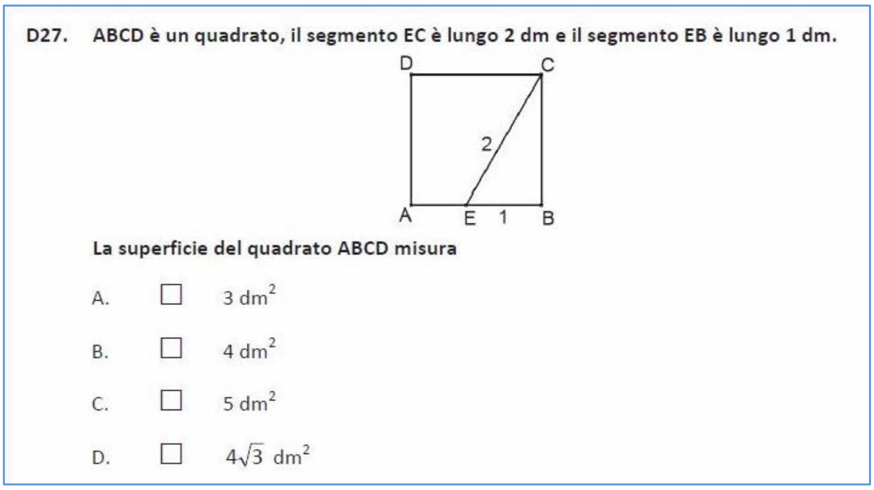


Fig. 6 – Fantasiose risposte alla domanda

L'ultimo item che abbiamo analizzato era contenuto nel fascicolo per la seconda secondaria di II grado nel 2013 (vedi Fig. 7). Siamo stati molto indecisi se somministrarlo anche agli studenti della quinta Primaria. Poi però abbiamo scelto di sottoporlo lo stesso anche a loro per vedere come andava, nonostante per rispondere fosse all'apparenza necessario conoscere il teorema di Pitagora.


D27. ABCD è un quadrato, il segmento EC è lungo 2 dm e il segmento EB è lungo 1 dm.

La superficie del quadrato ABCD misura

A. ☐ $3\ dm^2$

B. ☐ $4\ dm^2$

C. ☐ $5\ dm^2$

D. ☐ $4\sqrt{3}\ dm^2$

Fig. 7 – Item G10 del 2013

Nonostante solo uno studente su cinque nella primaria abbia risposto correttamente (vedi Tabella 5), ci siamo stupiti che in due classi quinte di un Istituto il risultato sia stato sensibilmente migliore (vedi Tabella 6).

Tabella 5. Risultati nei vari ordini di scuola nell'item G10 del 2013

	corretta
V Primaria	19,5%
II Sec. I grado	72,1%
III Sec. I grado	69,9%
I Sec. II grado	29,3%
II Sec. II grado	60,1%
IV Sec. II grado	66,3%
Campione nazionale	35,0%

Tabella 6. Risultati nei diversi plessi di scuola Primaria nell'item G10 del 2013

Plessi	**corretta**
P1	29,2%
P2	20,5%
P3	8,7%

Abbiamo allora chiesto il motivo di tale performance e abbiamo scoperto che gli studenti della classe che ha avuto i risultati migliori (plesso1) erano andati qualche giorno prima a Pennabilli al Museo del calcolo e si ricordavano dell'esperienza fatta proprio sul teorema di Pitagora (vedi Fig. 8). Questo è un esempio di una situazione non didattica (Brousseau, 1986), in quanto l'insegnante non pensava certamente che la visita al museo avrebbe portato a comprendere il teorema in questione.

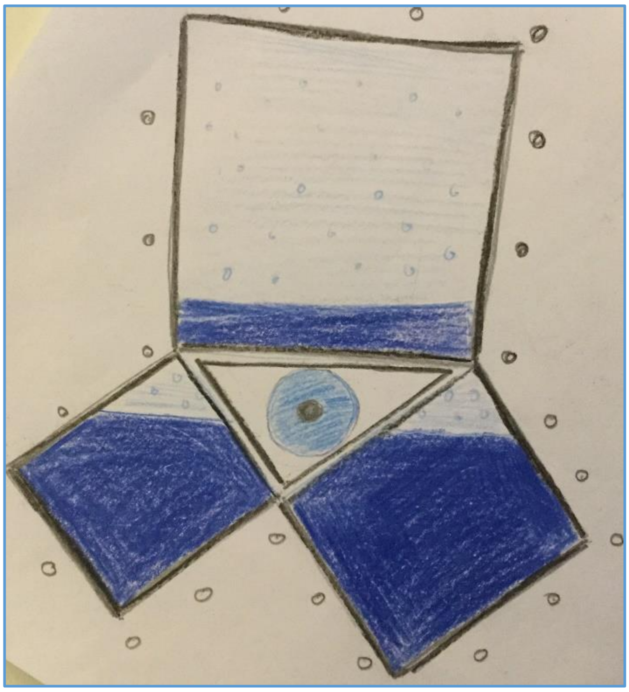


Fig. 8 – Macchina matematica del museo per dimostrare il teorema di Pitagora (disegnata dai ragazzi dopo la visita al museo)

Altri, invece (plesso 2) avevano svolto un'attività laboratoriale sul teorema di Pitagora, che consisteva nel formare due quadrati equivalenti assemblando 3 quadrati (di lato 3, 4 e 5 cm) e 8 triangoli rettangoli con cateti di 3 e 4 cm). Anche questa modalità "visuale" (vedi Fig. 9) è stata ricordata da alcuni alunni.

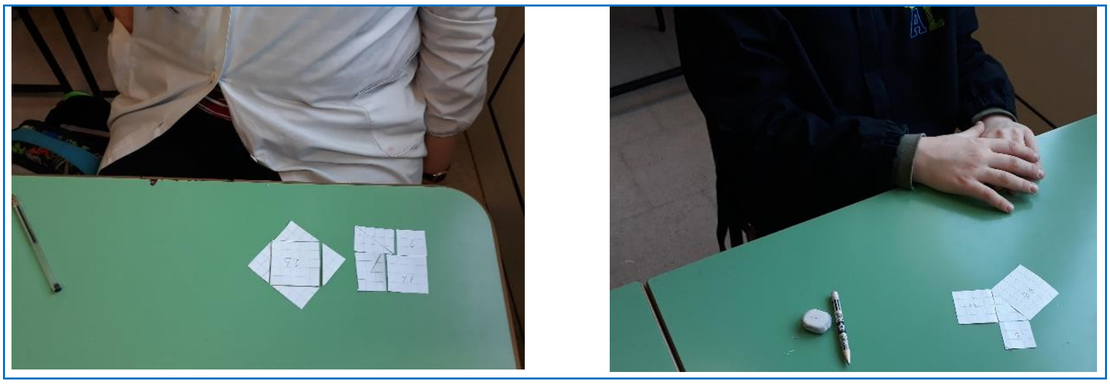
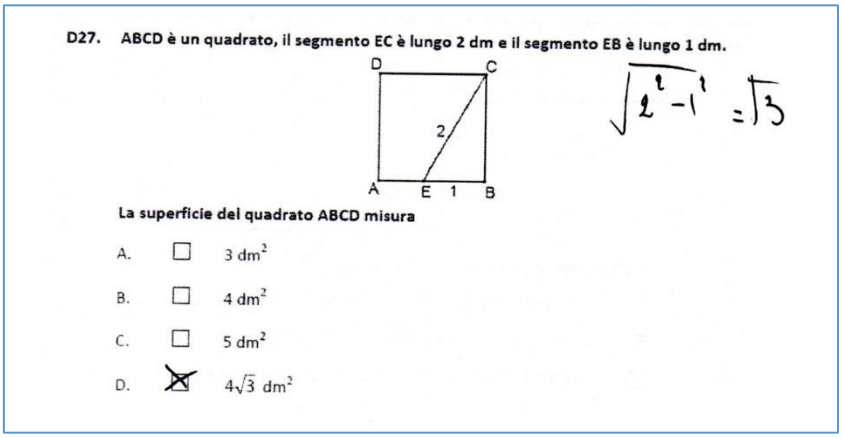


Fig. 9 – Attività laboratoriale sul teorema di Pitagora in una classe di scuola Primaria

Ci siamo incuriositi anche delle risposte di altri studenti della primaria che ci hanno detto che hanno proceduto per esclusione.
Gli altri studenti della primaria che hanno risposto correttamente ci hanno detto che sono andati "per esclusione". Hanno escluso il 4 e il 5 "perché il lato CB è più piccolo di 2" e il "$4\sqrt{3}$ sembra più grande di 4". Un altro bambino ha detto che "ho fatto togliendo il 4 e il 5 che erano troppo grandi e quell'altro ($4\sqrt{3}$), perché strano".


D27. ABCD è un quadrato, il segmento EC è lungo 2 dm e il segmento EB è lungo 1 dm.

$\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

La superficie del quadrato ABCD misura

A. ☐ 3 dm^2

B. ☐ 4 dm^2

C. ☐ 5 dm^2

D. ☒ $4\sqrt{3}$ dm^2

Fig. 10 – Risoluzione errata del quesito in una seconda di II grado

Nelle secondarie hanno, invece, utilizzato, in genere correttamente, il teorema di Pitagora, ma l'errore più comune è stato quello di scegliere di calcolare la misura del perimetro, invece di quella, richiesta, dell'area (vedi Fig. 10). La confusione tra perimetro e area continua ad essere una misconcezione presente in molti studenti.
Anche in questo caso può essere collegabile alla lettura selettiva del testo, ma ancora di più alla presenza tra i possibili risultati di un dato che li ha attirati, avendo trovato $\sqrt{3}$ grazie al teorema di Pitagora.

Conclusione

Dall'analisi condotta nella nostra ricerca è emerso che la percentuale di risposte corrette nella maggior parte dei casi non accresce all'aumentare del livello di scuola Questo accade, secondo noi, per molteplici motivi, ma soprattutto per il fatto che l'apprendimento degli studenti è spesso dovuto all'esecuzione di esercizi ripetitivi, che non lo porta ad essere veramente significativo e soprattutto duraturo nel tempo.

Si rileva anche la presenza in tutti gli ordini di scuola di misconcezioni relative ai concetti di area e perimetro, spesso confusi, ma entra sicuramente in gioco pure la lettura frettolosa che non contribuisce ad una corretta comprensione del testo.

Un'altra considerazione che possiamo fare è che alcuni concetti possono essere assimilati meglio se lo studente fa esperienze che lo colpiscono, o comunque lo affascinano, come nel caso di una visita ad un museo, ma sicuramente anche attraverso attività di tipo laboratoriale.

Il laboratorio di matematica è particolare proprio perché non si realizzano manufatti tangibili, da portare a casa, ma si possono costruire saperi significativi e duraturi negli studenti.

Da osservare infine che, in generale, gli item somministrati hanno ottenuto risultati migliori rispetto al campione nazionale. Questo, secondo noi, principalmente perché è stato eliminato lo stress del tempo e anche il peso valutativo della prova non era paragonabile a quella che la prova nazionale aveva fino a due anni fa.

Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Bibliografia

Binanti L., a cura di, (2001). *Pedagogia, epistemologia e didattica dell'errore*. Rubbettino editore, Soveria Mannelli (CZ).

Brousseau G. (1986). *La relation didactique: le milieu*. Actes de la IVème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques, pp. 54-68, IREM Paris.

Castoldi M. (2012). *Valutare a scuola: dagli apprendimenti alla valutazione di sistema*. Carrocci editore, Roma.

D'Amore B., (2001). *Elementi di Didattica della Matematica*. Pitagora Editrice, Bologna.

D'Amore B., (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Pitagora editrice, Bologna.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., (2006). *Che problema i problemi !*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 6, vol. 29 AB. 645-664. Editore: Centro Morin, Paderno del Grappa (TV).

D'Amore B., Sbaragli S., (2011). *Principi di base di Didattica della matematica*. Pitagora Editrice, Bologna.

Fandiňo Pinilla M.I., D'Amore B., (2006). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*. Erikson, Trento.

Sbaragli S., (2006). *Le misconcezioni in aula*. Articolo di divulgazione. NRD Dipartimento di Matematica. Università di Bologna.

Trinchero R., (2016). *Costruire, valutare, certificare competenze. Proposte di attività per la scuola*. Franco Angeli editore, Milano.

Trinchero R., (2017). *Costruire e certificare competenze con il curricolo verticale nel primo ciclo*. Rizzoli Education.

Zan R., (2016). *I problemi di matematica*. Carrocci editore, Roma

Zan R., Baccaglini Frank A., (2017). *Avere successo in matematica – Strategie per l'inclusione e il recupero*. Utet.

Zeitz P., (2007). *The Art and Craft of Problem solving*. Second edition. John Wiley & Sons, Inc.

Gli Autori

Stefano Babini
Liceo Artistico Statale "Paolo Toschi"
Via Toschi, 1– Parma (PR)
stefano0011@libero.it
Italy

Professore a tempo indeterminato di matematica e fisica. Appassionato di problem solving, di comunicazione didattica e delle nuove tecnologie applicate alla didattica (docente da diversi anni nelle classi 2.0).
Si occupa inoltre di processi di apprendimento e di valutazione in vari contesti formativi e di sistema.
Collabora da anni con l'INVALSI (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione).

Ivan Graziani
Scuola Secondaria di I grado "Galileo Galilei"
Via Arcangeli, 1, Santa Sofia (FC)
graziani.ivan@tin.it
Italy

Professore a tempo indeterminato di matematica. Formatore in didattica della matematica. Appassionato di ICT, di problem solving e di comunicazione didattica.
Si occupa inoltre di processi di apprendimento e di valutazione in vari contesti formativi e di sistema.
Fa parte del Gruppo di Ricerca Sperimentazione in Didattica della Matematica (GRSDM)
dell'università di Pisa. Fa parte del gruppo di ricerca in didattica "Diverticalmath".
Collabora da diversi anni con l'Università di Bologna, con l'INDIRE (Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa), con l'INVALSI (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione) e con l'USR Emilia Romagna (Ufficio Scolastico Regionale).

Received November 17, 2018; *revised* December 19, 2018; *accepted* December 27, 2018; *published online* Juley 28, 2019

article

ISSN 2421-7247

Elliptical gears and dynamic geometry

Andrea Gambini

Abstract. *The purpose of this path is to present to pupils of 16 years of age an unusual application of conics with the help of the dynamic geometry software "GeoGebra".*

Key words. *GeoGebra, Conics, Geometry, elliptical gears.*

Sommario. (Ingranaggi ellittici e geometria dinamica). *Lo scopo di questo percorso è quello di presentare agli alunni di 16 anni di età un'applicazione insolita delle coniche con l'ausilio del software di geometria dinamica "GeoGebra".*

Parole chiave. *GeoGebra, Coniche, Geometria, ingranaggi ellittici.*

Introduzione

Nella trasmissione del moto, siamo abituati a pensare agli ingranaggi di forma circolare, tuttavia esistono anche ingranaggi "esotici" come quelli di forma ellittica.
Il problema della costruzione di ingranaggi ellittici (vedi Fig. 1) è interessante da un punto di vista geometrico ed è riconducibile a quello della costruzione di una famiglia di ellissi tangenti.
Una volta risolto il problema geometrico della costruzione è interessante spostare l'attenzione sugli aspetti cinematici e riflettere su questa domanda:

> se un ingranaggio ellittico ruota con una certa velocità angolare, come viene trasmesso il movimento rotatorio al secondo ingranaggio?

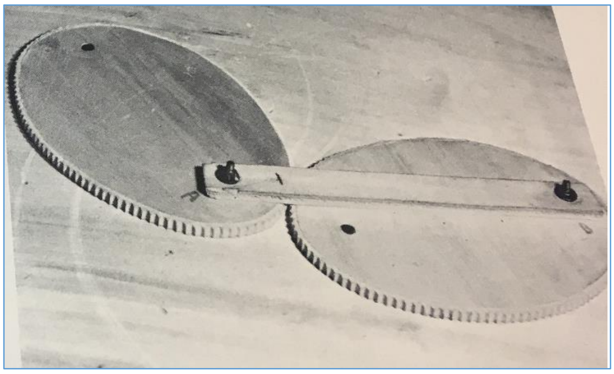


Fig. 1 – ingranaggi ellittici

Prerequisiti

Prerequisiti per affrontare il percorso:

- Definizione di ellisse come luogo geometrico
- Criteri di congruenza dei triangoli
- Concetto di velocità angolare (in casi semplici)
- Equazione della retta nel piano cartesiano.

Attività e sperimentazione

Questo percorso si ispira a un'attività a cui hanno lavorato due alunni di Emma Castelnuovo quando frequentavano la scuola superiore di primo grado. L'attività viene riproposta a un livello adatto agli alunni di una classe terza del liceo scientifico.

Ingranaggi ellittici entrambi rotanti

Gli studenti vengono invitati a realizzare in "GeoGebra" la seguente costruzione di cui elenchiamo i passaggi:

1) Fissiamo due punti O e Q a una distanza d e tracciamo una circonferenza $\mathscr{C}$ di centro O e raggio $f < d$. Scegliamo, quindi, un punto arbitrario $A \in \mathscr{C}$.
2) Tracciamo la retta OQ e definiamo il punto T, all'interno del segmento OQ, come intersezione tra la retta e l'asse del segmento AQ.
3) Tracciamo la retta AT e la circonferenza $\mathscr{D}$ di centro T e raggio OT.
4) Nel semipiano opposto rispetto al punto A, indichiamo con P il punto di intersezione tra la retta e AT e la circonferenza $\mathscr{D}$.

A questo punto si chiede agli alunni di dimostrare che:

1) I triangoli AOT e QPT sono congruenti in base al 1° criterio di congruenza:
$$AOT \cong QPT$$
2) La somma dei segmenti AT e TO è uguale a d:
$$AT + TO = d$$
3) La somma dei segmenti QT e TP è uguale a d:
$$QT + TP = d.$$

In base alle dimostrazioni svolte, gli alunni dovrebbero concludere che i punti A, O e P, Q sono i fuochi di due ellissi congruenti passanti entrambe per il punto T. Inoltre i punti O, T, Q sono allineati per costruzione.

Le terne di punti (A, O, T) e (P, Q, T) individuano univocamente due ellissi che chiameremo rispettivamente, $\mathscr{E}$ ed $\mathscr{F}$. Possiamo visualizzarle in "GeoGebra" con il comando "ellisse" (il comando del software visualizza un'ellisse se sono noti i due fuochi e un qualunque punto che le appartiene).

Spostando il punto A lungo la circonferenza $\mathscr{C}$ si osserva il moto di puro rotolamento delle due ellissi in figura (vedi Fig. 2).

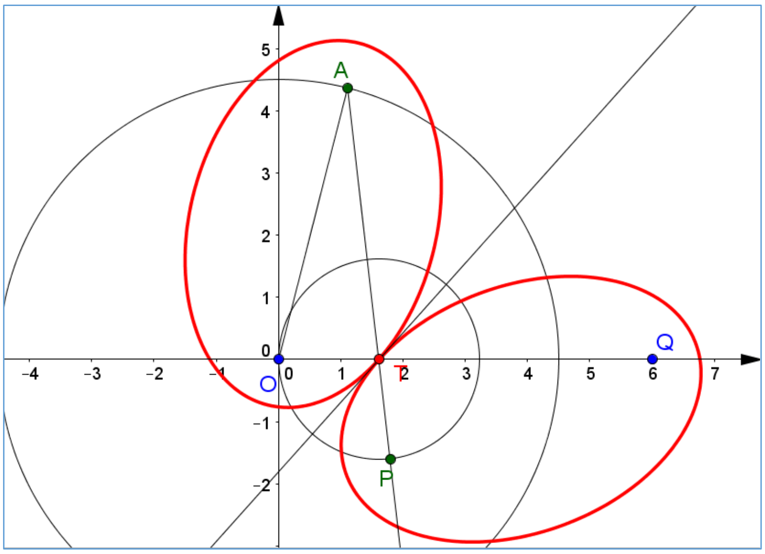


Fig. 2 – puro rotolamento delle due ellissi

Agli alunni si chiede di calcolare il valore dei due semiassi *a* e *b* e dell'eccentricità *e* delle ellissi $\mathscr{E}$ ed $\mathscr{F}$.

Risulta

$$a = \frac{d}{2}; \quad b = \frac{\sqrt{d^2 - f^2}}{2}; \quad e = \frac{f}{d}.$$

Quest'ultima attività è interessante perché spinge a riflettere sul significato geometrico dei parametri *f* e *d* e li lega ai parametri *a*, *b*, *e* con cui gli studenti hanno più familiarità perché conoscono l'equazione cartesiana dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Elenchiamo di seguito alcuni spunti di riflessione che possono essere proposti in relazione al problema degli ingranaggi ellittici.

Spunti di riflessione

1) Perché le ellissi $\mathscr{E}$ ed $\mathscr{F}$ tangenti nel punto *T* ?

   Gli angoli congruenti *PTQ* e *ATO* condividono la stessa bisettrice perché sono opposti al vertice e quindi la retta tangente ad $\mathscr{E}$ coincide con la retta tangente ad $\mathscr{F}$ nel punto *T*.

2) Esiste un'unica ellisse congruente ad $\mathscr{E}$, avente un fuoco nel punto *Q* e tangente ad $\mathscr{E}$ nel punto *T* ?

   La risposta è affermativa.

   Per dimostrare l'unicità indichiamo con $\mathscr{G}$ un'ellisse congruente ad $\mathscr{E}$ passante per T. Ricordiamo che $\mathscr{G}$ ha un fuoco collocato nel punto fisso Q; indichiamo l'altro fuoco di $\mathscr{G}$ con F (si chiede agli alunni di costruire F).

Poiché le ellissi $\mathscr{T}$ e $\mathscr{G}$ sono congruenti risulta:

$$QT + TF = d \quad \Rightarrow \quad TF \cong TP.$$

Ma allora i triangoli TQP e TQF sono congruenti per il 3° criterio di congruenza.

Da ciò segue che F coincide con P oppure che F è il simmetrico di P rispetto alla retta OQ, ma la seconda eventualità è impossibile perché la bisettrice dell'angolo ATO è bisettrice anche dell'angolo KTQ. Quindi $F \equiv P$, perciò l'ellisse tangente è unica.

Se rimuoviamo l'ipotesi che vincola la posizione del fuoco Q si perde l'unicità della ellisse tangente come si vede nella figura (vedi Fig. 3). Infatti, fissato il punto $T \in \mathscr{E}$ esistono infinite ellissi congruenti e tangenti in T.

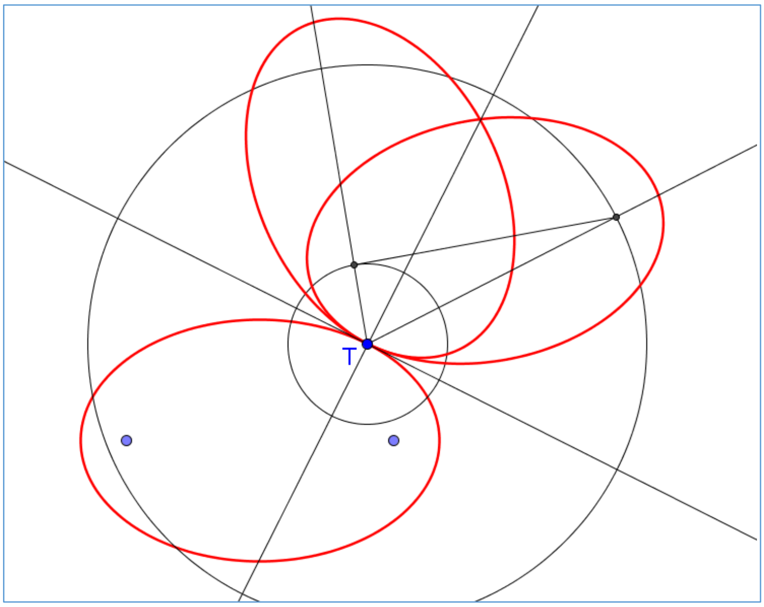


Fig. 3 – se il fuoco *Q* non è fisso abbiamo tante ellissi tangenti in *T*

3) Esiste un'unica ellisse congruente ad $\mathscr{E}$, avente un fuoco nel punto Q e tangente ad $\mathscr{E}$? (N.B. Rispetto al caso precedente non viene specificato il punto di tangenza).

La risposta è negativa: le ellissi sono due.

Per verificarlo si propone agli studenti la seguente costruzione da realizzare in "GeoGebra" per individuare le ellissi tangenti:

- Data l'ellisse $\mathscr{E}$ di fuochi O e A e scelto un punto $S \in \mathscr{E}$ tale che $QS \leq d$, si traccia la retta tangente t ad $\mathscr{E}$ nel punto S;
- Si considera il punto Q' simmetrico di Q rispetto a t;
- Si interseca la semiretta $Q'S$ di origine Q' con la circonferenza di centro Q' e raggio d e si chiama P il punto di intersezione.

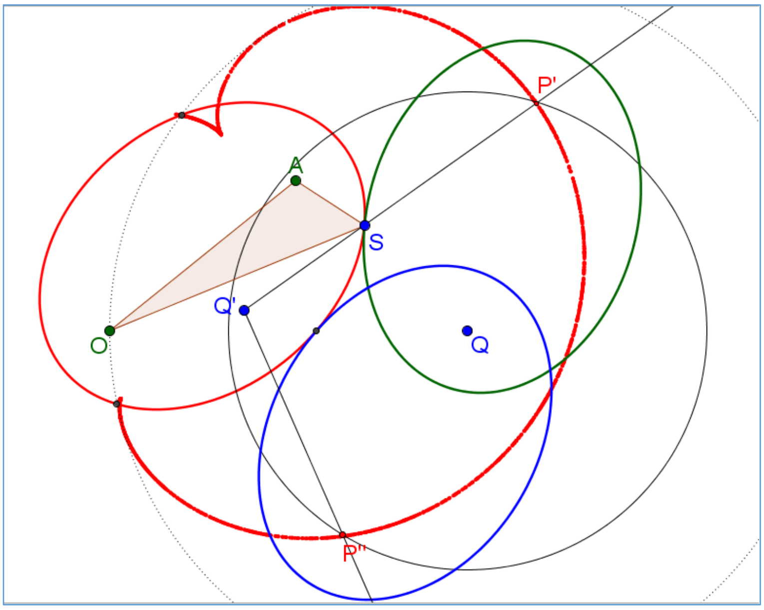


Fig. 4 – costruzione delle due ellissi tangenti (in blu e in verde)

Con questa costruzione abbiamo associato ad ogni punto $S \in \mathscr{E}$ un unico punto *P* del piano e quindi abbiamo definito un luogo geometrico $\mathscr{L}$ che può essere visualizzato in "GeoGebra" con l'opzione "*traccia attiva*" la quale mentre si sposta *S* lungo l'ellisse, *P* descrive visivamente il luogo $\mathscr{L}$.

Detti *P'* e *P''* i due punti di intersezione tra $\mathscr{L}$ e la circonferenza di centro *Q* e raggio *f*, gli studenti dovrebbero dimostrare che le ellissi di fuochi *Q*, *P'* e *Q*, *P''* aventi l'asse maggiore lunga *d* sono congruenti e tangenti ad $\mathscr{E}$.

L'ellisse azzurra è quella che abbiamo chiamato $\mathscr{T}$ e corrisponde alla costruzione con l'anti-parallelogramma mentre quella verde è un'altra ellisse tangente che non va bene, da un punto di vista cinematico, per il moto degli ingranaggi (gli alunni dovrebbero spiegare il motivo).

La traccia rossa è il grafico della curva $\mathscr{L}$.

L'esistenza della seconda ellisse tangente si giustifica anche con un ragionamento intuitivo: basta ruotare l'ellisse azzurra in senso antiorario intorno al fuoco *Q* fino a "toccare" di nuovo l'ellisse $\mathscr{E}$.

Un po' di trasformazioni geometriche

In questo paragrafo generalizziamo l'idea che abbiamo utilizzato nello spunto di riflessione 3) del precedente paragrafo e la formalizziamo meglio. L'obiettivo è quello di definire un procedimento adatto a costruire un'ellisse tangente a una conica qualsiasi generalizzando in questo modo il caso degli ingranaggi.

Dato un punto fisso *Q* nel piano e una costante positiva *d*, consideriamo un arco di conica $\mathscr{K}$.

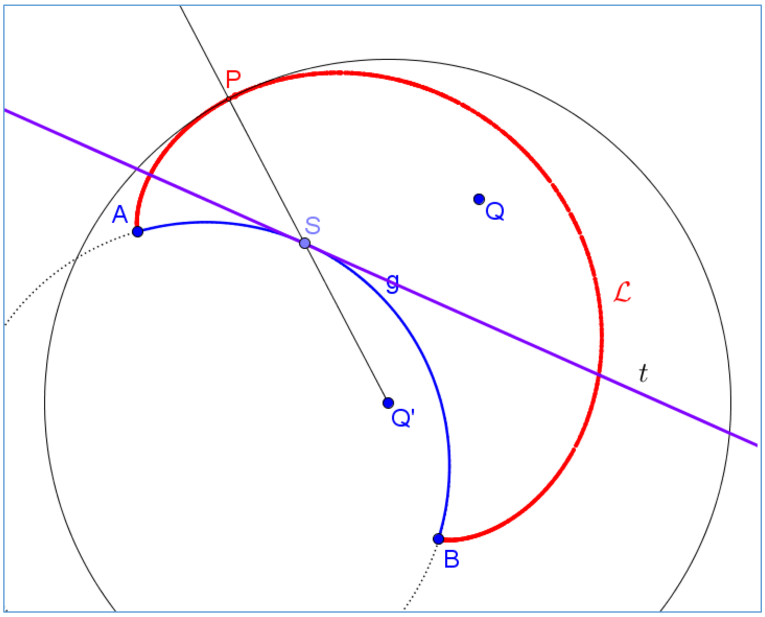


Fig. 5 – immagine (in rosso) di un arco di circonferenza

Definiamo i seguenti passaggi:

- Scelto un punto $S \in \mathscr{K}$ tale che $QS \le d$, si traccia la retta tangente t ad $\mathscr{K}$ nel punto S;
- Si considera il punto *Q'* simmetrico di *Q* rispetto a *t*;
- Si interseca la semiretta *Q'S* di origine *Q'* con la circonferenza di centro *Q'* e raggio *d*. Chiamiamo *P* il punto di intersezione.

In questo modo abbiamo associato ad ogni punto $S \in \mathscr{K}$ un unico punto *P* del piano. Abbiamo definito, cioè, una trasformazione che opera sui punti di $\mathscr{K}$ e dà in output un arco "deformato" rispetto a quello di input (non si tratta di un'affinità). Possiamo chiamare questa trasformazione "*la proiezione ellittica di* $\mathscr{K}$ *di fuoco Q e raggio d*".

Indichiamo in figura (vedi Fig. 5) con $\mathscr{L}$ l'arco ottenuto proiettando $\mathscr{K}$.

Gli studenti vengono invitati a realizzare in "GeoGebra" le proiezioni ellittiche degli archi di varie coniche (rette, parabole, ellissi, iperboli) con lo strumento del software "*traccia attiva*".

Spunti di riflessione

1) Come si trasforma un segmento?

   La proiezione di un segmento consiste in un arco di circonferenza di raggio *d* e centro *Q'* e gli alunni dovrebbero dimostrarlo osservando che, almeno in questo caso, l'arco $\mathscr{L}$ è perpendicolare in ogni punto al vettore $\overrightarrow{SP}$. Questa proprietà geometrica vale, per qualunque arco $\mathscr{K}$ di partenza ma la dimostrazione è troppo complessa per essere affrontata in questa sede.

La proiezione ellittica è utile per costruire le ellissi tangenti a una data conica in modo da soddisfare determinati requisiti (il fuoco si trova in un dato punto e i semiassi hanno misure

assegnate).
Infatti se vogliamo costruire le ellissi tangenti a una conica in modo che un fuoco sia nel punto Q, l'asse maggiore sia lungo d e la distanza focale sia f è sufficiente costruirne la proiezione ellittica $\mathscr{L}$ di fuoco Q e raggio d e intersecarla con la circonferenza di centro Q e raggio f individuando, se esistono, le posizioni dei fuochi delle ellissi tangenti.

Considerazioni cinematiche sugli ingranaggi ellittici entrambi rotanti

Lo scopo di questa parte è quello di riflettere sul legame tra i due moti. Se il primo ellisse ruota intorno ad O in modo uniforme, cosà farà il secondo ellisse?
Con alcune prove "empiriche" gli alunni dovrebbero rendersi conto che il secondo ellisse ruota intorno a Q in modo non uniforme.
Ciò è dovuto al fatto che, in ogni istante, i punti di contatto tra le due ellissi si muovono con la stessa velocità. Se ω_1 e ω_2 sono le velocità angolari delle ellissi, l'uguaglianza delle velocità $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ nei punti di contatto implica che:

$$\omega_1 OT = \omega_2 QT \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{OT}{QT}.$$

Perciò il problema viene ricondotto alla valutazione di un rapporto tra segmenti.
Poniamo

$$\rho = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

e indichiamo con r la distanza tra T e O.

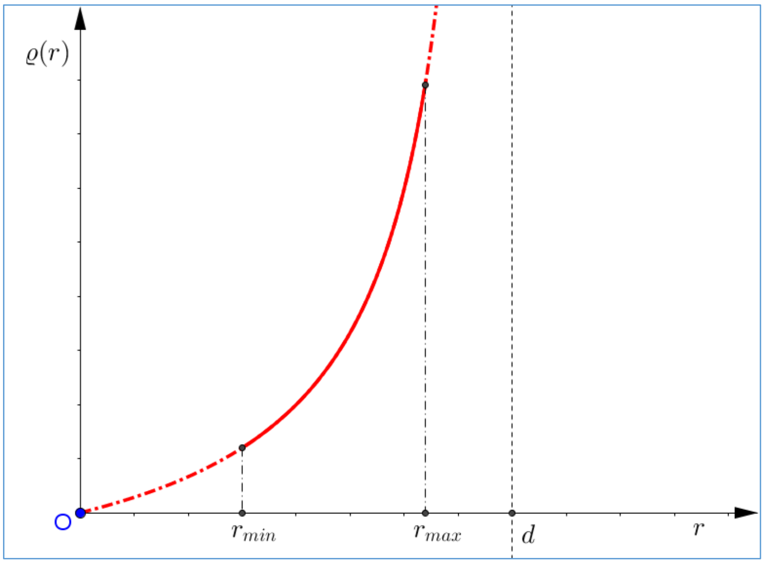


Fig. 6 – andamento del rapporto tra le velocità angolari

Si vede facilmente che:

$$\rho = \frac{r}{d - r}\,.$$

Gli alunni dovrebbero osservare che la relazione $\rho = \rho\,(r)$ si rappresenta sotto forma di un arco di iperbole equilatera come mostra la figura (vedi Fig. 6).

Approfondimento sulla cinematica degli ingranaggi

Si suggerisce agli alunni di scegliere un sistema di riferimento cartesiano Oxy come in figura e si indica con θ l'angolo che il vettore OA forma con l'asse x. Con questa scelta le coordinate dei punti A e Q risultano:

$$A = (f\cos\theta;\, f\sin\theta) \qquad Q = (d;0)$$

Per ricavare esplicitamente r in funzione di θ e quindi $\rho(\theta)$, gli alunni devono scrivere l'equazione dell'asse di AQ

$$y = \frac{d - f\cos\theta}{f\sin\theta}\left(x - \frac{d + f\cos\theta}{2}\right) + \frac{f}{2}\sin\theta$$

e devono intersecarla con l'asse x di equazione $y = 0$. Ricordando che $e = f/d$, il punto di intersezione è proprio T che ha ascissa r data da

$$r = \frac{d^2 - f^2}{2(d - f\cos\theta)} = \frac{d(1-e^2)}{2(1 - e\cos\theta)}$$

e quindi si può esprimere il rapporto ρ in funzione di θ

$$\rho(\theta) = \frac{d^2 - f^2}{d^2 + f^2 - 2fd\cos\theta} = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\theta}$$

avendo posto

$$p = \frac{d^2 - f^2}{d^2 + f^2} = \frac{1-e^2}{1+e^2} \qquad \varepsilon = \frac{2fd}{d^2 + f^2} = \frac{2e}{1+e^2}\,.$$

L'ultima formula esprime la relazione tra le due velocità angolari in funzione di θ. Notiamo che si tratta dell'equazione polare di un'ellisse perché $\varepsilon < 1$, inoltre l'eccentricità di $\rho(\theta)$ dipende solo dall'eccentricità di $\mathscr{E}$ ed $\mathscr{F}$ e non dalle misure dei semiassi.

Un ingranaggio è fisso e l'altro ruota

Come cambia il movimento se un ingranaggio ellittico è tenuto fermo e l'altro rotola senza strisciare sul primo?

Gli alunni, riflettendo e procedendo per tentativi, dovrebbero rendersi conto che una possibile soluzione, per questo problema, consiste nella riflessione assiale dell'ellisse $\mathscr{E}$ rispetto alla retta tangente in un suo generico punto S.

Tuttavia questa soluzione funziona solo in un caso particolare (gli alunni devono spiegare il motivo).

Discussione e risultati

Questa attività, riguardante gli ingranaggi ellittici, non è ancora stata sperimentata “sul campo” perché gli alunni non hanno affrontato l’argomento coniche in modo sistematico. Si prevede di proporre l’argomento tra qualche mese.
Quando gli alunni avranno modo di lavorare con gli ingranaggi, verranno documentate le impressioni e l’interesse suscitato. Si tratterà di un feedback prezioso per capire eventuali aspetti da migliorare e rivedere prima di proporre questa attività a un secondo gruppo di studenti.
L’ideazione e la creazione del percorso descritto segue il pensiero metodologico di Emma Castelnuovo.

Conclusione

L’attività che è stata descritta in questo articolo si inserisce in un percorso di approfondimento di matematica pensato per una classe terza del Liceo Scientifico che ha aderito al progetto del Liceo Matematico. L’idea che ha ispirato l’avvio del Liceo Matematico, da parte dell’Università di Salerno, è quella di dare più spazio alla matematica e alle scienze, non per introdurre un numero maggiore di nozioni, ma per riflettere su fondamenti e idee, allargare gli orizzonti culturali e sottolineare collegamenti con altre discipline. In quest’ottica si è ritenuto proficuo proporre un collegamento tra cinematica, moti rotatori e coniche inteso come un momento di interdisciplinarietà tra matematica e fisica.

Dichiarazione di conflitti di interesse

L’autore dichiara di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Bibliografia

Castelnuovo E., (1972). *Documenti di una esposizione di matematica*. Boringhieri.

L'Autore

Andrea Gambini
Liceo Scientifico "A. Volta"
Colle Di Val D'Elsa (SI)
gambiniandrea87@gmail.com
Italy

Breve curriculum

- Laurea Magistrale in Matematica (2012)
- Abilitazione all'insegnamento della Matematica e della Fisica, con TFA, nella scuola secondaria di secondo grado (2013)
- Supplente in varie scuole secondarie di secondo grado dal 2014 al 2016.
- Docente di Ruolo, dal 2016, di Matematica e Fisica nella scuola secondaria di secondo grado.
- Responsabile di un progetto Erasmus+ di robotica educativa nell'anno scolastico 2017/2018.

Received November 11, 2018; *revised* July 18, 2019; *accepted* October 9, 2019; *published online* November 18, 2019

Experiences of teaching with Mathematics, Sciences and Technology

Volume 4, January - December 2018 ISSN 2421-7247 (online)

Reviewers

MIUR: Ministry for Education, University and Research – Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

INDIRE: National Institute for Documentation, Innovation and Educational Research – Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa

INVALSI: National institute for the evaluation of the education and training system – Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione.

EDiMaST

Volume 4 ISSN 2421-7247 (online) January - December 2018

Contents

Experiens & Research Articles