Volume 3 Number 3 December 2017

EDiMaST

Experiences of Teaching with Mathematics, Sciences and Technology

Expériences pédagogiques avec les mathématiques, des sciences et de la technologie
Experiencias Educativas con Matemáticas, Ciencia y Tecnología
Esperienze Didattiche con Matematica, Scienze e Tecnologia

www.edimast.it

ISSN 2421-7247 (online)

Experiences of teaching
with Mathematics, Sciences and Technology

Esperienze Didattiche con Matematica, Scienze e Tecnologia
Experiencias Educativas con Matemáticas, Ciencia y Tecnología
Expériences pédagogiques avec les mathématiques, des sciences et de la technologie

Volume 3, Number 3, December 2017

EDiMaST

ISSN 2421-7247 (online)

The Journal is issued online three times per year (April, August and December).

EDIMAST is an Open Access Online publication. This means that everybody can free access online to abstracts and full-length articles.

Anyone involved in the teaching of mathematics, sciences and technology is welcome to contribute.

EDIMAST is an international scientific journal and welcomes articles in English, Italian, Spanish and French.

Publish on EDIMAST has no costs for the papers' author.

For more information visit
www.edimast.it

To the authors:
paper can be addressed to:
edimast@gmail.com

article

ISSN 2421-7247

Star polygons ... and beyond.
Path to a vertical curriculum in the first cycle of education

Antonella Castellini, Alfia Lucia Fazzino

Abstract*[1]*. *This document describes a path that can be reached in the first cycle of education proposed during a training course for primary and secondary teachers. The laboratory work of the proposal allows an approach to polygons that crosses different themes: from space and figures to numbers and also relationships and functions.*

Key words. *Regular polygons, stellar polygons, modular arithmetic, tessellation of the plane, chamber of mirrors.*

Sommario. (Poligoni stellati ... e oltre. Percorso per un curricolo verticale nel primo ciclo). *Si riferisce di un percorso realizzabile nel primo ciclo di istruzione proposto durante un corso di formazione per i docenti di primaria e secondaria di primo grado. La laboratorialità della proposta permette un approccio ai poligoni che attraversa diversi temi: da spazio e figure a numeri e anche relazioni e funzioni.*

Parole chiave. *Poligoni regolari, poligoni stellati, aritmetica modulare, tassellazione del piano, camera di specchi.*

Introduzione

L'attività è stata svolta all'interno del corso residenziale "Matematica del concreto" tenutosi a Bisceglie il 3- 4 e 5 novembre 2017 e destinata ai docenti della scuola primaria e secondaria di 1° grado nell'ottica della verticalità del curricolo. L'impostazione del corso è stata simile al lavoro di classe perché non ci può essere consapevolezza delle difficoltà degli alunni se non si sperimenta noi stessi in modo diretto. Gli insegnanti, dunque, sono stati messi in situazione problematica, così come si fa con i ragazzi e lasciati liberi di discutere fra loro argomentando le proprie congetture e di scoprire direttamente le competenze sottese delle attività. Tenendo presente che la matematica non si fa a compartimenti stagni, abbiamo proposto attività concrete, facilmente spendibili in classe, che permettessero di attraversare più nuclei tematici spaziando dalla geometria all'aritmetica passando anche dalle funzioni.

Inizio del percorso

L'attività inizia da un modello molto semplice ma molto versatile: due sbarrette in plastonda o cartoncino rigido uniti con fermacampione e il terzo lato in elastico (vedi Fig. 1).

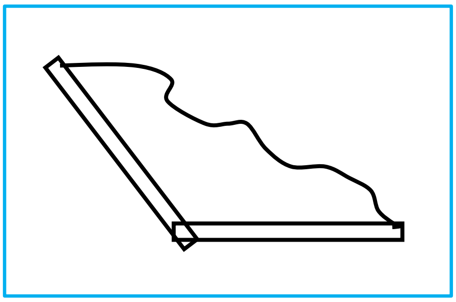


Fig.1 – modello dinamico.

Il modellino è dinamico e muovendolo si vede che variando un angolo cambia anche la lunghezza del lato in elastico a conferma del fatto che il triangolo è una struttura rigida. Il modello permette di discutere anche sulla somma degli angoli interni di un triangolo perché nel caso limite quando l'angolo fra le due sbarrette è di 180° gli altri due sono entrambi zero.

La camera di specchi

Siamo passati poi ad utilizzare una camera di specchi (due specchietti rettangolari uniti tra loro per mezzo di un lato in modo da potersi muovere l'uno rispetto all'altro e quindi di formare angoli diversi). Mettendo un triangolo isoscele in modo che l'angolo di apertura dei due specchi sia uguale all'angolo al vertice, vediamo che in base all'angolo varia il numero delle immagini riflesse.

Tabulando i valori dell'angolo e il corrispondente numero di immagini, si vede subito che si tratta di una relazione di proporzionalità inversa (Fig. 2) $x \cdot y = 360$ dove x è l'ampiezza dell'angolo e y il corrispondente numero di immagini. Rappresentando i valori su un piano cartesiano otteniamo un ramo d'iperbole "tronco"; infatti lo specchio ha un limite perché ci permette di "vedere" solo uno degli asintoti della curva.

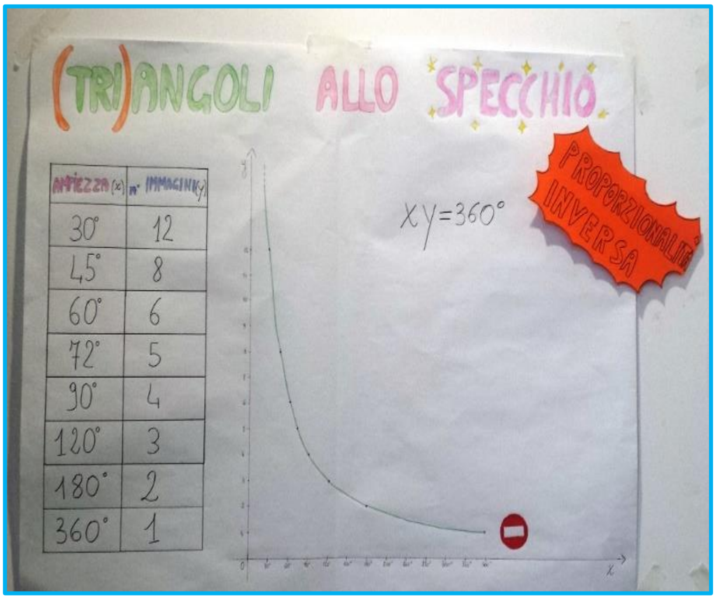


Fig. 2 – Costruzione del ramo di iperbole.

Se l’angolo tende a zero, le immagini vanno all’infinito:

quindi abbiamo per asintoto l’asse *y* ma non possiamo avere l’asse *x* come asintoto perché non si potrà avere un angolo infinito (la massima apertura possibile è di 360°) quindi il ramo si ferma al punto (360°, 1).

Inserendo tra gli specchi i triangoli isosceli otteniamo tutti e soli poligoni regolari il cui numero dei lati dipende dall’angolo che è inserito tra gli specchi (vedi Fig. 3).

Fig. 3 – Camera di specchi e poligoni.

Fig. 4-5-6-7 – Geometria e natura.

Gli specchi rappresentano gli assi di simmetria del poligono, ma questi assi sono le diagonali? O le mediane? E quanti sono? C'è una relazione con il numero dei lati?

L'osservazione permette di congetturare e in seguito, usando lo strumento, si può verificare l'esattezza delle ipotesi e di argomentare sulle scoperte fatte.

Gli specchi ci permettono di visualizzare gli assi e di stabilire una prima relazione: sono tanti quanti il numero dei lati del poligono (Fig. 4-5-6-7). Per capire cosa rappresentano per il poligono stesso può aiutare l'inserimento di uno stuzzicadenti a rappresentare l'altezza relativa alla base del triangolo inserito (Fig. 8).

Fig. 8 – Assi di simmetria.

Fig. 9 – Tabella riassuntiva degli assi di simmetria

Se il poligono ha un numero pari di lati gli assi di simmetria sono per metà "mediane" (apotema del poligono) e per metà diagonali. Se il poligono ha un numero dispari di lati allora gli assi di simmetria sono solo mediane (Fig. 9).

Lo strumento "visualizza concretamente" che tutti i poligoni regolari sono scomponibili in triangoli isosceli uguali che sono tanti quanti sono i lati. È molto facile dedurre l'area del poligono come somma delle aree dei triangoli in cui è scomposto.

Si può trovare anche un legame tra il numero dei triangoli, quindi dei lati, e la somma degli angoli interni. Si vede bene che se n sono i lati di un poligono, abbiamo n triangoli isosceli quindi $n \cdot 180°$ è la somma di tutti gli angoli da cui dobbiamo sottrarre l'angolo al centro ottenendo $n \cdot 180° - 360°$

La tassellazione

Lavorando con i poligoni regolari non si può non trattare il problema della tassellazione del piano. Ricordiamo che un poligono tassella se ricopre il piano senza lasciare spazi vuoti tra essi e senza sovrapposizioni.

Abbiamo consegnato dei poligoni regolari in cartoncino con la stessa misura di lato per provare delle pavimentazioni utilizzando inizialmente solo poligoni di uno stesso tipo e abbiamo predisposto uno schema dove riassumere le osservazioni fatte. I risultati sono contenuti nel seguente schema completo.

Tab. 1: Poligoni e Tassellazione

Poligoni regolari	Misura di ciascun angolo interno	Numero di angoli aventi un vertice comune nella piastrellatura ottenuta	Somma degli angoli con il vertice comune	I poligoni ricoprono tutta la superficie ?
triangolo	60	6	360	si
quadrato	90	4	360	si
pentagono	108	5	324	no
esagono	120	3	360	si
ettagono	128,57	7	899,99	no
ottagono	135	8	405	no
decagono	144	10	1440	no
dodecagono	150	12	1800	no
pentadecagono	156			no

Dalla tabella (Tab.1) emerge che non tutti i poligoni regolari tassellano. È importante chiedere agli alunni quando ciò diventa possibile.

Se utilizziamo un solo poligono regolare, la misura dell'angolo del poligono regolare dovrà essere un divisore intero di 360° e quindi i poligoni regolari che possono tassellare il piano sono solo il triangolo equilatero (60·6), il quadrato (90·49 e l'esagono (120·3). Di conseguenza (vedi Fig. 10) abbiamo 3 sole configurazioni possibili (tassellazione regolare).

Fig. 10 – Tassellazione regolare

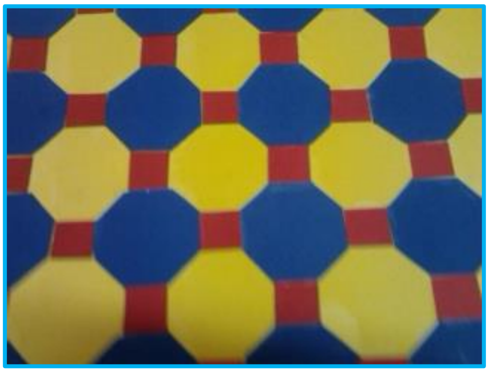
Con più tipi di poligoni regolari, perché sia possibile tassellare, è necessario che ogni vertice abbia intorno a sé lo stesso numero e lo stesso tipo di poligoni regolari disposti nello stesso ordine.

Proponiamo l'attività di scoperta seguendo le regole:

a) ciascun lato sia comune con un lato di un poligono
b) da ciascun vertice di un poligono esca uno stesso tipo e uno stesso numero di poligoni disposti nello stesso ordine
c) la somma degli angoli dei poligoni aventi il vertice in comune sia 360°.

In questo caso parleremo di tassellazioni semi-regolari.

Dopo diversi tentativi ed errori i docenti hanno scoperto che esistono solo 11 tipi di tassellazioni: 3 regolari e 8 semi–regolari (vedi Fig. 11-12).



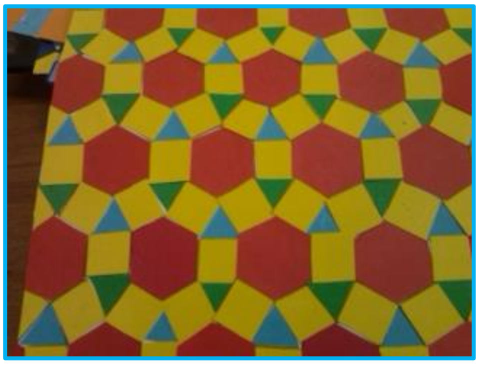


Fig. 11-12 – Tassellazioni semi-regolari.

Veder ... gli stellati!

I poligoni regolari che abbiamo incontrato finora sono tutti poligoni convessi; ma esistono anche dei particolari poligoni non convessi regolari che hanno lati uguali, angoli concavi e convessi uguali, detti poligoni stellati.

Tra questi ultimi poligoni possiamo distinguere gli stellati semplici ottenuti con una sola linea spezzata che si chiude nel punto di partenza; gli stellati composti invece sono formati dalla sovrapposizione di due o più poligoni regolari ruotati di un angolo costante.

Abbiamo utilizzato dei rettangoli in plastonda (Fig. 13) sui quali sono stati disegnati dei poligoni regolari e disposto dei ferma-campioni in ogni vertice del poligono. Legando un filo a uno qualunque dei vertici e facendolo passare saltando regolarmente uno o più vertici, ci siamo chiesti cosa avremmo ottenuto.

Il triangolo e il quadrato non generano nessun poligono stellato.

Nel triangolo equilatero ottengo la figura di partenza mentre nel quadrato, saltando un vertice, si ottiene una diagonale e saltandone due si ottiene il quadrato di partenza.

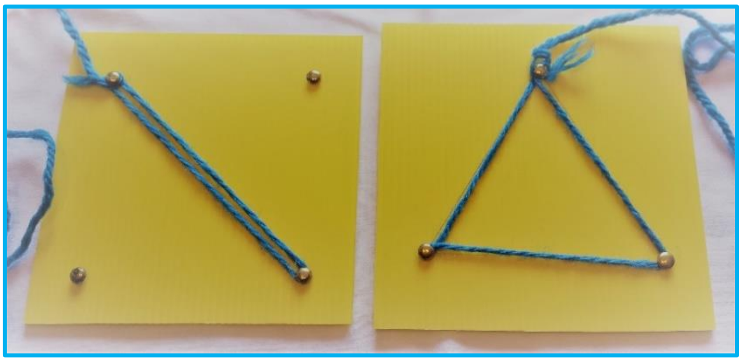


Fig.13 – Triangolo e quadrato non generano poligoni stellati

Nel pentagono (vedi Fig. 14). Fissato il filo ad un vertice proviamo a saltarne uno, genericamente diciamo passo due perché un vertice si salta e sul secondo leghiamo il filo, matematicamente lo indichiamo (5,2). Otteniamo, con un unico giro, un poligono stellato semplice.

Fig.14 – Pentagono, passo 2: si ottiene uno stellato semplice

Se rifacciamo il percorso partendo dall'inizio, facendo passo 3 si ottiene ancora un poligono stellato (5,3) identico al primo ma percorso in senso opposto. Quindi dal pentagono si ottiene un solo poligono stellato.

Facciamo osservare e descrivere il poligono stellato ottenuto: come sono i lati? come sono gli angoli? Cosa otteniamo al centro?

La domanda che ne consegue è se qualunque poligono regolare darà origine a un poligono stellato. I docenti hanno eseguito molte prove, fatto congetture, cercato analogie argomentano le loro proposte per arrivare a stabilire una regola: la stella si forma quando il numero dei vertici e il numero del passo sono primi tra loro.

Dai poligoni agli orologi con l'aritmetica modulare

Se numeriamo i vertici dei poligoni regolari partendo da 0 come fosse un orologio possiamo eseguire somme "strane". Ad esempio abbiamo proposto sul pentagono l'operazione 1 + 7. Partendo da 1 percorriamo i vertici contandone 7 e arriviamo al 3. Riflettiamo:

1 + 7 = 8 ma nell'aritmetica finita del pentagono significa che faccio un giro e mi fermo a 3. Cosa rappresenta il 3? Eseguendo 8:5 abbiamo 1 come quoziente (il giro) con il resto di 3.

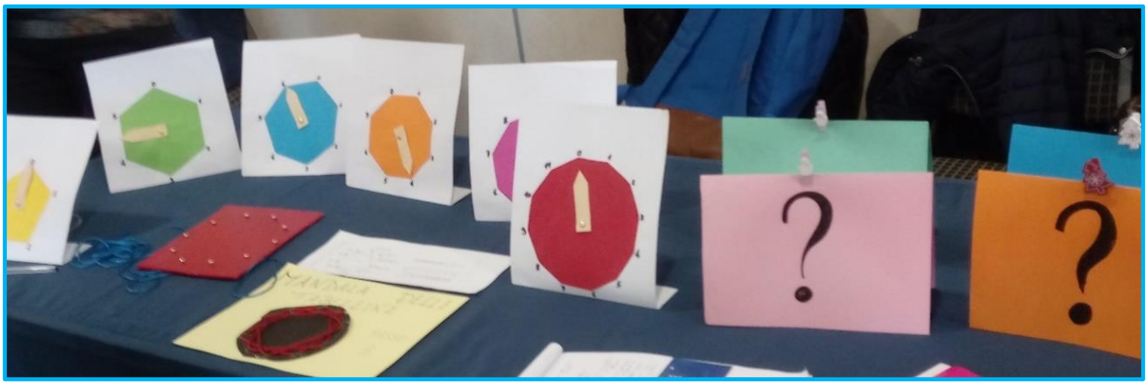


Fig.15 – dai poligoni regolari all'aritmetica modulare al mandala delle tabelline.

Lavorando con l'aritmetica modulare (vedi Fig. 15) possiamo risolvere situazioni reali oltre ovviamente a comprendere l'orologio analogico e digitale. Per esempio possiamo chiederci se oggi è sabato che giorno sarà tra 47 giorni. Questo problema diventa facilmente risolvibile attraverso l'aritmetica modulare: modulo 7.

L'ultima attività su cui abbiamo lavorato è stata il Mandala delle tabelline in altre parole: i poligoni stellati in un semplice contesto aritmetico. In tal caso si costruisce un poligono a 10 vertici numerati da 0 a 9. Consideriamo come esempio la tabellina del 3; partendo con il filo da 0 ci si ferma al 3, poi al 6, al 9 eccetera. Mentre si ripete la tabellina compare la stella in questo caso a 10 punte!

Pillole di didattica

Il percorso è stato presentato in forma laboratoriale dove il "*laboratorio*" è inteso esattamente come riportato nelle Indicazioni Nazionali:

> *"momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive."*

Le Indicazioni Nazionali (I.N.) si rivolgono agli alunni ma in questo caso noi abbiamo cambiato il punto di vista: il docente in formazione si è trasformato in alunno! D'altro canto Emma Castelnuovo diceva che la cosa fondamentale per un docente, è mettersi allo stesso livello degli allievi!

Il gruppo di docenti, eterogeneo per provenienza (da tutta Italia) per formazione e per livello scolare di appartenenza, simulava perfettamente una classe delle nostre scuole. Tutti hanno lavorato gomito a gomito per tre giorni, ritagliando, incollando, ideando e costruendo modelli (Fig. 16).

Fig.16 – I docenti del gruppo al lavoro.

Un ambiente che

> "*è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti*"

(http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica).
Nel laboratorio si costruiscono significati grazie alle interazioni tra le persone che si creano svolgendo l'attività. Sempre citando Emma Castelnuovo:

> "*Costruire insieme mette tutti allo stesso livello, mentre la testa crea maggiori diversità.*"

Fig.17 – I docenti del gruppo GeometricaMente

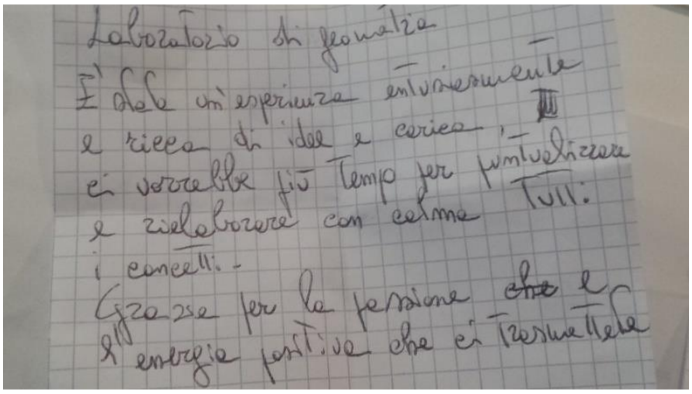
Conclusioni

Riportiamo alcuni messaggi lasciati dai docenti che hanno seguito il corso (Fig. 17): sicuramente molto più espliciti di un qualunque commento personale.

Esperienza bellissima! Queste sono le cose che ti fanno venire voglia di andare avanti su questa strada. Grazie

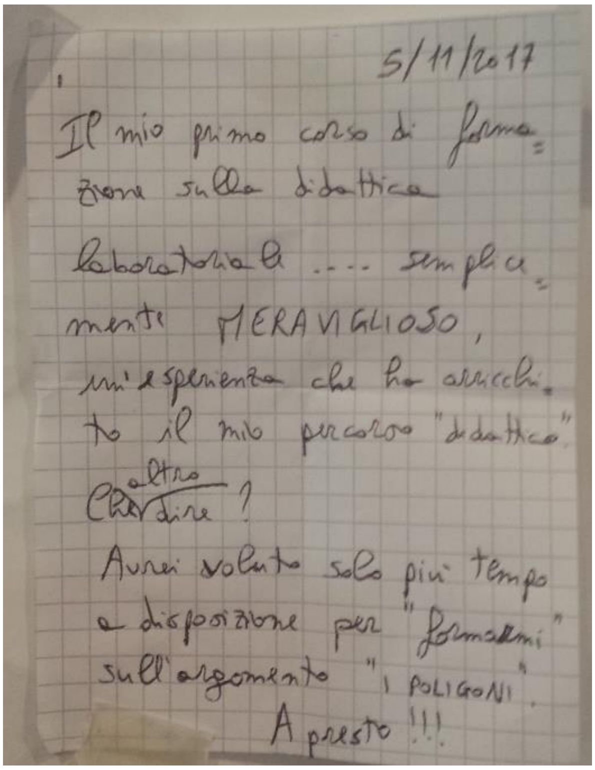
Corso perfetto da fare, disfare, rifare, strafare. Brave! Portare competenze spalancando lo sguardo su molteplici aspetti della matematica che a scuola non sono mai portati.

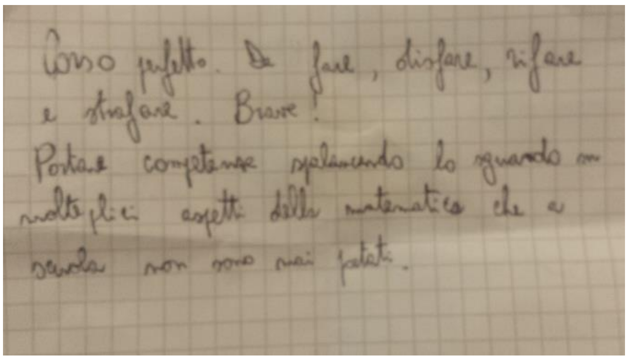
Il mio primo corso di formazione della didattica laboratoriale ... semplicemente "meraviglioso". Un'esperienza che ha arricchito il mio percorso didattico.

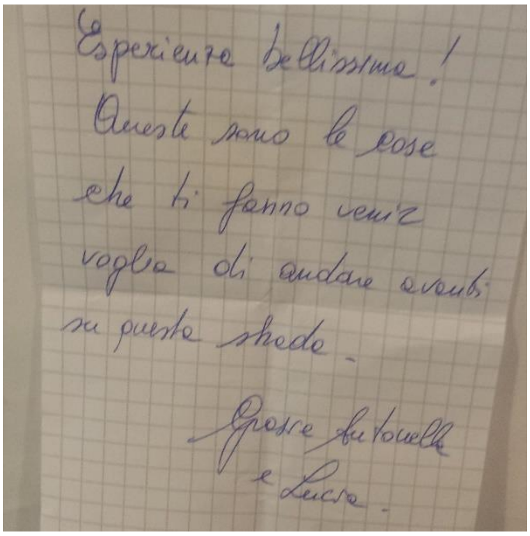

Laboratorio di geometria
È stata un'esperienza entusiasmante
e ricca di idee e carica,
ci vorrebbe più tempo per puntualizzare
e rielaborare con calma tutti
i concetti. -
Grazie per la passione e
l'energia positiva che ci trasmettete

Che altro dire? Avrei voluto solo più tempo a disposizione per formarmi sull'argomento poligoni

È stata un'esperienza entusiasmante ricca di idee e carica. Ci vorrebbe più tempo per rielaborare con calma tutti i concetti. Grazie per la passione e l'energia positiva che ci trasmettete.


5/11/2017
Il mio primo corso di forma=
zione sulla didattica
laboratoriale .... sempli=
mente MERAVIGLIOSO,
un'esperienza che ha arricchi=
to il mio percorso "didattico".
Che altro dire ?
Avrei voluto solo più tempo
a disposizione per "formarmi"
sull'argomento "I POLIGONI".
A presto !!!


Corso perfetto. Da fare, disfare, rifare
e strafare. Brave!
Portare competenze spalancando lo sguardo su
molteplici aspetti della matematica che a
scuola non sono mai trattati.



Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Nota

1. L'esperienza descritta prende spunto dalle attività svolte durante il primo corso di "matematica laboratoriale" tenuto al Nicotel di Bisceglie in Puglia, dal 3 al 5 novembre 2017. Convegno per insegnanti, organizzato da Margherita Ambrosini in collaborazione con il Centro Orientamento "Don Bosco" e con l'Asilo nido e Scuola dell'Infanzia Paritaria "Stella Stellina" di Bisceglie.

Bibliografia e sitografia

Castelnuovo E., (1993), *Pentole, ombre, formiche. In viaggio con la matematica*, La Nuova Italia, Firenze.

Castelnuovo E., Barra M., (1976 e 2000), *Matematica nella realtà*, Boringhieri, Torino.

Castelnuovo E, (2003), *Emmatematica – insegnamento di Emma Castelnuovo*, Edifir Edizioni, Firenze.

Castelnuovo E., (1990), *Didattica della matematica*. La nuova Italia, Firenze.

D'Amore B., (2001), *Didattica della matematica*. Edizioni Pitagora, Bologna.

http://giocosamente.weebly.com/blog-di-luisa/altri-poligoni-stellati

https://elenapenati.wordpress.com/2009/11/08/intervista-a-emma-castelnuovo/

http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica/

http://online.scuola.zanichelli.it/sammaronedisegno/wp-content/uploads/Zanichelli_Sammarone_Poligoni_Stellati.pdf

http://www.cidi.it/cms/doc/open/item/filename/672/poligoni-stellatifusani2012.pdf

https://www.matematicamente.it/magazine/luglio2007/Centomo_poligoni_stellati.pdf http://specchi.mat.unimi.it/matematica/specchi/Specchi_27_1_11.pdf

Le autrici

Antonella Castellini
MIUR Istituto Comprensivo 1, Viale Garibaldi 30-32
53036 Poggibonsi (SI)
e-mail antocastellini@gmail.com
Italy

Laureata in matematica, insegna nella scuola secondaria di primo grado. Si interessa di didattica della matematica e di formazione docenti. Ha collaborato con Indire nei progetti nazionali m@t.abel e PQM. ha conseguito due master in didattica della matematica. Ha ricoperto il ruolo di tutor coordinatore nel TFA per l'Università di Siena. Autrice per una rivista nazionale di didattica per la scuola primaria. Svolge attività di ricerca-azione anche a livello internazionale nell'ARMT. Coautrice di diverse pubblicazioni su esperienze didattiche. Ha svolto il ruolo di esperto per la costruzione di curricoli verticali per diversi istituti e per un progetto triennale della Regione Toscana.

Alfia Lucia Fazzino
Istituto Comprensivo 1, Poggibonsi - Scuola secondaria di primo grado "Plesso Marmocchi"
Viale Garibaldi, 30/32 - 53036 Poggibonsi (SI)
aluciafazzino@gmail.com
Italy

Laureata in matematica, ha conseguito un master in didattica della matematica.
Insegna nella scuola secondaria di primo grado.
Docente formatore in didattica della matematica.
Appassionata di Problem-solving e di comunicazione didattica.
S'interessa di formazione dei docenti. Svolge da diversi anni attività di ricerca azione per il Rally Matematico Transalpino. Coautrice di diverse pubblicazioni su esperienze didattiche.

Received April 23, 2017; *revised* June 29, 2017; *accepted* August 19, 2017; *published online* July 30, 2018 article

ISSN 2421-7247

The early algebra and the ArAl project[1]

Giancarlo Navarra

***Abstract*[2].** *The paper introduces the Early Algebra and the 'ArAl Project, Arithmetic pathsways towards favouring pre-algebraic thinking'. Three workshops are presented, dedicated to three Teaching Units (Pitagora Editrice Bologna): Numbers pyramids, Numbers grids, Matematòca & other mathematical games.*

Key words. *Early algebra, ArAl Project, Algebraic babbling, Numbers pyramids, Numbers grids, Matematòca.*

Sommario. (L'early algebra e il progetto ArAl). *Nell'articolo si introducono l'Early Algebra e il Progetto ArAl, Percorsi nella matematica per favorire il pensiero prealgebrico. Si presentano poi tre laboratori dedicati ad altrettante Unità della Collana ArAl (Pitagora Editrice Bologna): Le piramidi di numeri, La griglia di numeri, Il gioco della Matematòca*.

Parole chiave. *Early algebra, Progetto ArAl, Balbettio algebrico, Piramidi di numeri, Griglie di numeri, Matematòca.*

Il corso

Il *progetto ArAl* è stato presentato all'interno del corso residenziale "*Matematica del concreto*" per docenti della scuola primaria e secondaria di 1° grado tenutosi a Bisceglie dal 3 al 5 novembre 2017 nell'ottica della verticalità del curricolo. Poiché la maggior parte dei docenti non conosceva il progetto, in un primo intervento l'ho introdotto collocandolo nella cornice teorica dell'*early algebra* e ho sviluppato poi tre laboratori attraverso i quali i corsisti hanno potuto riflettere sulle relazioni fra il quadro teorico e le attività d'aula.

Presentazione del progetto ArAl

La ricerca internazionale sull'educazione matematica si occupa molto, dagli anni '80, delle principali difficoltà degli studenti fra i 12 e i 15 anni, quando devono fare i conti con le loro conoscenze aritmetiche nel momento in cui incontrano l'algebra - tradizionalmente dalla terza secondaria di primo grado in poi - e devono passare da forme di ragionamento aritmetico a forme di ragionamento algebrico proiettate verso lo studio di relazioni e strutture e verso la generalizzazione. Si è cominciato quindi ad esplorare delle attività che permettessero di capire quali aspetti, di ciò che compete al pensiero algebrico, potessero essere resi accessibili a studenti giovani e potessero quindi aiutarli nella transizione verso lo studio dell'algebra nei suoi aspetti più formali. È da queste premesse che negli anni '90 inizia a svilupparsi l'*early algebra*, che contrappone alla didattica tradizionale, che fa cominciare l'algebra verso i 12-13 anni di età, l'idea che sia non solo possibile, ma anche opportuno, spostare questo inizio ai 6 anni, con un'attenzione crescente verso i grandi della scuola dell'infanzia (5 anni).

Il *progetto ArAl* si colloca in questa prospettiva; le radici epistemologiche del suo quadro teorico, che lo differenziano dalle altre ricerche in questo ambito disciplinare, sono intimamente connesse ad un approccio linguistico alla matematica, che trova la sua espressione più significativa in quello che abbiamo chiamato balbettio algebrico, in analogia con il lento apprendimento degli aspetti semantici e sintattici del linguaggio naturale.

La prospettiva del progetto è quella di devolvere agli allievi l'esplorazione di situazioni problematiche opportunamente costruite dalle quali, attraverso la riflessione sui processi, l'argomentazione, la discussione, possano emergere e affinarsi le conoscenze matematiche e si possano costruire solide premesse per la loro oggettivazione, cioè per la costruzione di traghetti semantici verso la generalizzazione e la modellizzazione. Questo richiede agli insegnanti competenze nuove accanto a quelle che già possiedono e pone in primo piano il problema della formazione e dello sviluppo professionale.

Per approfondire ed esemplificare questi aspetti ho scelto di proporre ai docenti del corso (scuola primaria e secondaria) tre laboratori facenti riferimento ad altrettante Unità della Collana ArAl:

1. Le piramidi (Unità 5 - Le piramidi di numeri)
2. La griglia (Unità 4 - Ricerca di regolarità: la griglia dei numeri)
3. La Matematòca (Unità 3 - Verso il numero sconosciuto: il gioco della matematòca).

Pannello 1: alcuni punti chiave del quadro teorico del Progetto ArAl

Insegnare l'aritmetica con l'obiettivo di favorire lo sviluppo del pensiero algebrico significa guidare gli alunni a spostare l'attenzione dal pensiero *procedurale* che caratterizza la didattica tradizionale – centrata sull'ottica del fare, del calcolare, dello svolgere operazioni, del risolvere problemi cercando risultati – verso il pensiero *relazionale* – centrata sull'ottica del riflettere e dell'argomentare sugli oggetti matematici, del rappresentare relazioni, del porre attenzione ai processi più che ai prodotti.

Anche il segno '=', nel modo in cui viene concepito dalla didattica tradizionale alla scuola primaria, è un veicolo semanticamente povero: non possiede un significato relazionale, nel senso che non indica l'equivalenza fra due quantità.

Fig.1 – punti chiave del quadro teorico del Progetto ArAl.

È la pura traduzione della voce verbale ‘fa’, per esempio: 3 + 5 = 8 viene interpretato come ‘3 più 5 fa 8’. La scrittura inversa 8 = 3 + 5 disorienta gli alunni più giovani perché 8 ‘non fa’ 3 + 5: non capiscono come il risultato possa stare a sinistra del segno uguale. Questo imprinting che ricadute ha sull’interpretazione di scritture come $12 + 5 = x$ o $23 + x = 16$?

Per superare questo punto di vista – aritmetico - è necessario costruire, dalla prima primaria, il concetto di rappresentazione di un numero, che porta a vedere ai lati dell’‘=’ (visto nel suo significato algebrico di ‘indicatore di simmetria’) due rappresentazioni differenti dello stesso numero; nell’esempio:

‘8’ è la rappresentazione canonica, opaca, del prodotto, ‘3+5’ la rappresentazione *non canonica*, *trasparente*, del *processo*.

La costruzione di questi concetti avviene in un ambiente in cui si esaltano gli aspetti linguistici che promuovono una costruzione sociale della conoscenza: la verbalizzazione, l’argomentazione, la discussione collettiva.

Pannello 2: Laboratorio ‘Piramidi di numeri’

Attraverso l’esplorazione di ‘piramidi’ formate da mattoni contenenti dei numeri si giunge alla rappresentazione della rete di legami fra i numeri stessi. L’attività inizia in un ambiente aritmetico con le mini-piramidi per ampliarsi gradualmente verso l’algebra e la scoperta ingenua dell’uso delle lettere e delle equazioni. La prima scoperta per gli alunni (dalla prima primaria in poi) riguarda la ‘regola delle piramidi’; quando si chiede di verbalizzarla la prima definizione è quasi sempre procedurale:

“Per trovare il numero in alto bisogna sommare i due numeri nei mattoni in basso”. Opportunamente guidati, gli alunni giungono ad un’enunciazione relazionale, che spiega cioè non come si trova ma cos’è il numero in alto in relazione ai due numeri alla base (Fig. 2):

“In una mini-piramide il numero in alto è la somma dei numeri scritti nei mattoni alla base”.

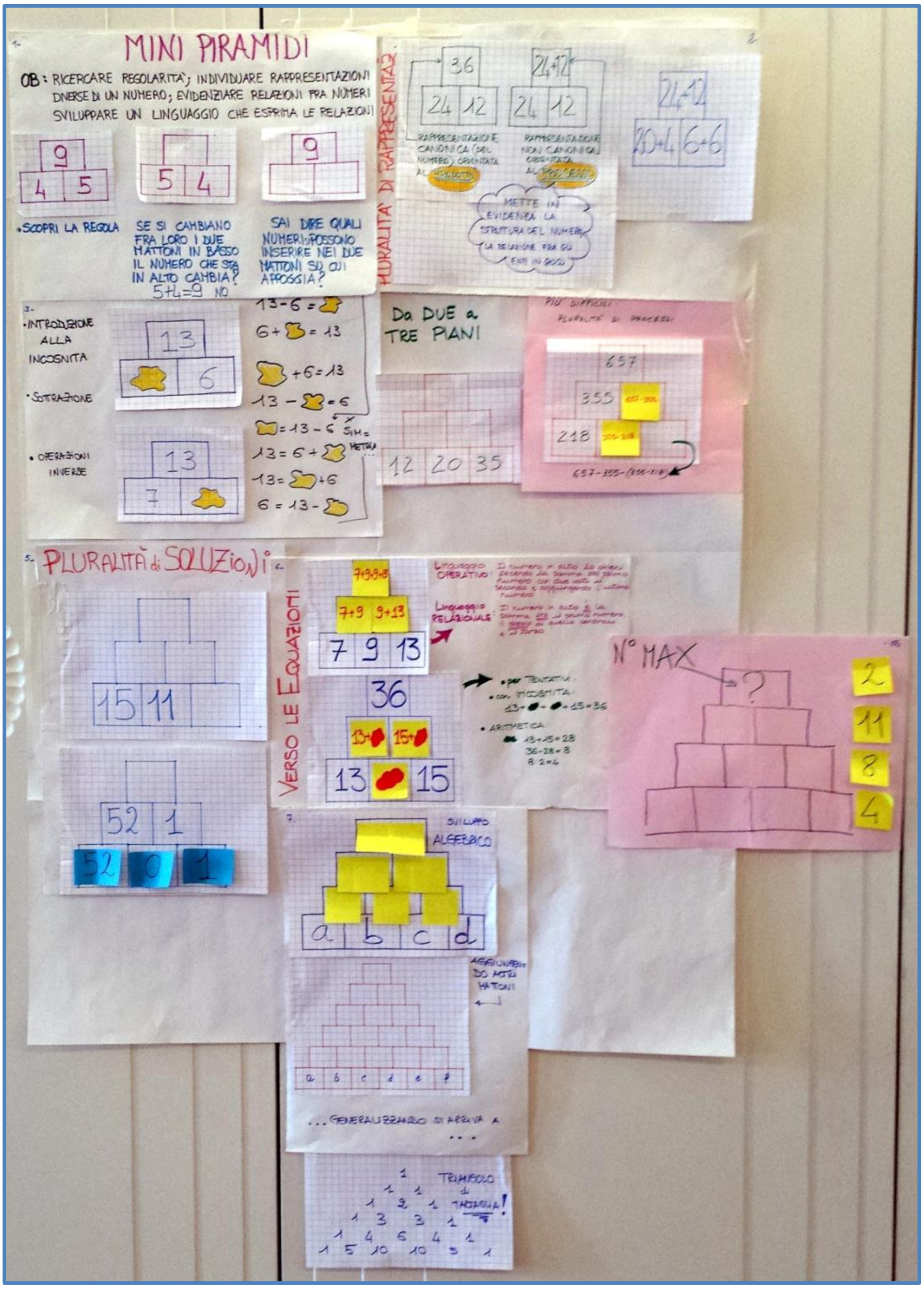


Fig.2 – Piramidi di numeri.

Dalla traduzione in linguaggio matematico della regola (es: 9 = 4 + 5) si passa alla scoperta che una situazione problematica si può rappresentare anche se non si conoscono tutti i numeri; gli alunni propongono macchie e altri simboli sino a conquistare la lettera, ed è in questi lenti passaggi che si manifesta l'evoluzione del balbettio algebrico.

Attraverso l'aumento dei piani della piramide e un susseguirsi di esperienze sempre più evolute gli alunni si avvicinano alla generalizzazione.

Pannello 3: Laboratorio 'La griglia dei numeri'

Il laboratorio si sviluppa attorno all'esplorazione di un quadrato di cento caselle (10×10) numerate da 0 a 99. Attraverso la scoperta di regolarità (Confrontando righe, colonne, diagonali come cambiano i numeri? Cosa cambia e cosa rimane costante?) si giunge all'individuazione delle 'regole' che esprimono quanto misurano gli otto 'spostamenti' da una qualsiasi casella interna alla griglia in quelle adiacenti (Vedi Fig. 3).

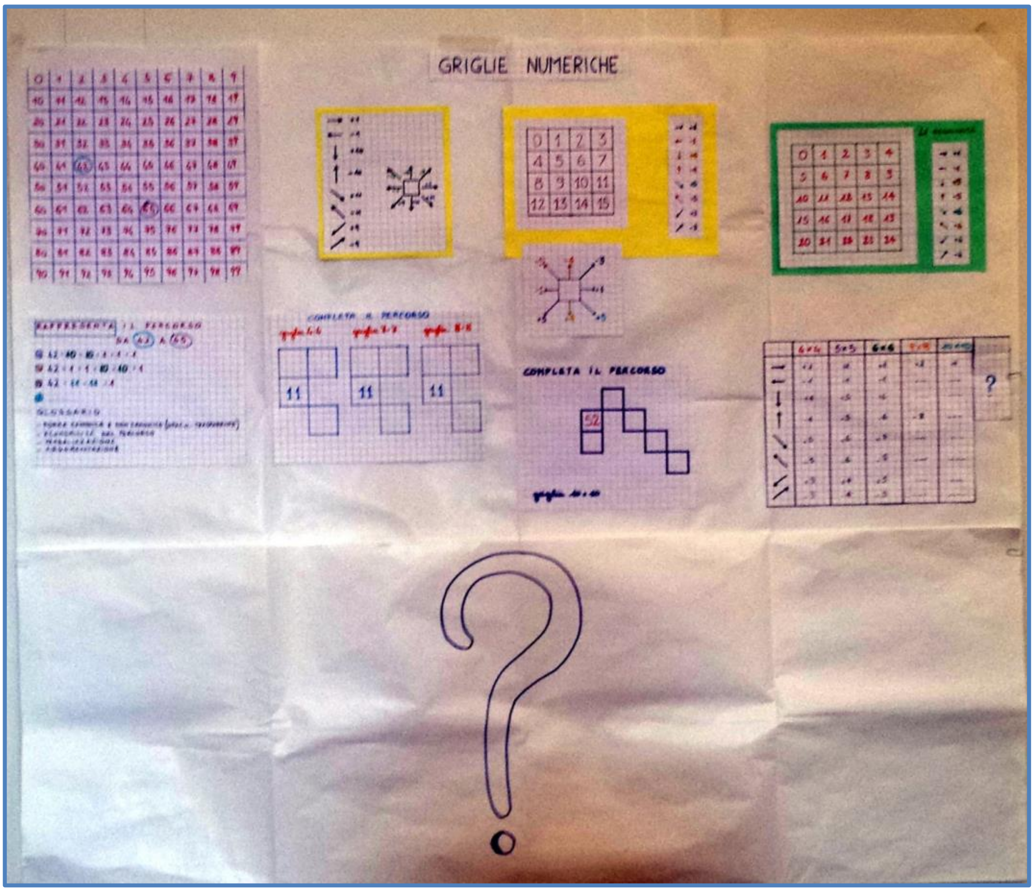


Fig. 3 – La griglia dei numeri.

Le regole vanno esplicitate:

verso destra +1, verso sinistra –1, verso il basso +10, verso l'alto –10 e così via.

Utilizzando le regole così trovate si rappresentano in linguaggio matematico vari percorsi numerici su griglie complete e su frammenti di griglia.

Il confronto tra griglie di dimensioni differenti porta poi ad esplorare, con il supporto di una rappresentazione tabulare, come cambiano di volta in volta le ‘regole’; si giunge così alle loro rappresentazioni generali, valide comunque, indipendentemente dalla dimensione della griglia, sino a giungere alla griglia $n \times n$, ad esempio:

‘Lo spostamento verso il basso è uguale alla dimensione della griglia’, che viene poi tradotto con ‘$+n$’;

‘Lo spostamento verso il basso-destra è uguale alla dimensione della griglia più 1’, tradotto con ‘$n+1$’; e così via.

Pannello 4: Laboratorio ‘La Matematòca’

Fig. 4 – La Matematòca.

Il Gioco si articola in due versioni: in una prima fase gli alunni esplorano la *Matematòca aritmetica* per spostarsi in una seconda fase verso la *Matematòca algebrica* (vedi Fig. 4).
Le tessere aritmetiche (colorate) contengono delle frasi di tipo procedurale (ad es: 'Aggiungi 5 al punteggio del dado e moltiplica per 2') oppure relazionale (ad es: 'La somma di 3 con il prodotto fra 4 e il punteggio del dado'); gli alunni devono interpretarle, lanciare il dado, sostituire nella frase della tessera il punteggio uscito, effettuare il calcolo e spostarsi lungo il percorso di un numero di caselle uguale al risultato ottenuto.
Nella fase successiva devono riconoscere nel pacchetto delle tessere algebriche (bianche, contenenti delle frasi scritte in simboli) le traduzioni in linguaggio algebrico delle frasi corrispondenti delle tessere colorate:

le traduzioni dei due esempi precedenti sono: '$(d + 5) \times 2$' e '$3 + 4 \times d$'.

Le fasi più evolute del gioco portano a situazioni problematiche costruite attorno ad episodi di ipotetiche partite; dal punto di vista dell'early algebra, questi episodi costituiscono delle occasioni in cui gli alunni si misurano con la dualità risolvere/rappresentare una situazione problematica.
Un esempio è riportato in figura (Fig.5):

Fig.5 – Una situazione del gioco *Matematòca*.

Conclusioni

I laboratori che ho proposto fanno parte di un ampio insieme di attività che sviluppano i principali temi dell'*early algebra* e riguardano principalmente la costruzione graduale del linguaggio algebrico e di conseguenza l'affinamento della capacità degli alunni di studiare regolarità, relazioni, proprietà e di esprimerle in linguaggio naturale e in linguaggio matematico. Attualmente, assieme ai docenti degli istituti che collaborano con il progetto ArAl, stiamo sperimentando:

a) in prima primaria: un approccio che inverta l'impostazione classica dell'insegnamento dell'aritmetica di tipo *procedurale* e favorisca lo sviluppo del pensiero *relazionale* (Cannucce & Bicchieri);
b) dall'infanzia alla terza secondaria:
l'esplorazione di situazioni problematiche centrate su incognite e variabili, lo studio di relazioni e la loro rappresentazione in linguaggio matematico lungo un percorso che porta dalle cosiddette 'equazioni per gioco' alle equazioni (Scatole & Biglie);
c) nella primaria-secondaria: vari filoni nell'area dei problemi nella prospettiva del *rappresentare*, superando quella del *risolvere*.

Dichiarazione di conflitti di interesse

L'autore dichiara di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Nota

1. Il *Progetto ArAl, Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero prealgebrico* nasce dai lavori condotti dai primi anni '80 dal GREM (Nucleo di ricerca in Educazione Matematica) operante presso il Dipartimento di matematica dell'Università di Modena e Reggio Emilia, sotto la direzione scientifica di Nicolina A. Malara.

2. L'esperienza descritta prende spunto dalle attività svolte durante il primo corso di "*matematica laboratoriale*" tenuto al Nicotel di Bisceglie in Puglia, dal 3 al 5 novembre 2017. Convegno per insegnanti, organizzato da Margherita Ambrosini in collaborazione con il Centro Orientamento "Don Bosco" e con l'Asilo nido e Scuola dell'Infanzia Paritaria "Stella Stellina" di Bisceglie.

Bibliografia e sitografia

AA.VV. (2003-2018). Collana Progetto ArAl. Pitagora Editrice, Bologna.

Cusi A., Malara N.A. & Navarra G. (2011). *Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Promoting a Linguistic and Metacognitive Approach to the Teaching and Learning of Mathematics*. In J. Cai, J. & Knuth, E. (Eds.), Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives, 483-510. Advances in Mathematics Education, Berlin: Springer.

Malara N.A., Navarra G., (2016). *Dai risultati ai significati. Mutamenti di prospettiva nell'insegnamento dell'aritmetica: il progetto ArAl*. La vita scolastica, la rivista per la scuola primaria. N.3. Giunti Scuola. Firenze. http://www.giuntiscuola.it/lavitascolastica/. pp.15-17.

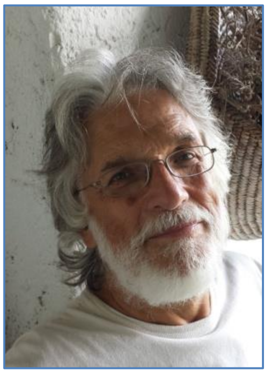
Navarra G. (2008). L'early algebra: una prospettiva per una didattica dell'aritmetica e dell'algebra che favorisca il superamento delle difficoltà nell'insegnamento / apprendimento delle due discipline. In Baldi G. e Moriani F. (Eds.), Atti del Convegno nazionale '*Il piacere di insegnare, il piacere di imparare la matematica*'. Pitagora Editrice Bologna. 133-142.

Navarra G. (2016). "Cinque per tre fa quin…?" "… dici" "Bravo!" La metodologia delle trascrizioni pluricommentate come strumento per lo studio dei comportamenti linguistici dei docenti di matematica e la promozione di sensibilità e competenze in tale ambito. Atti del Convegno Nazionale GISCEL 2014. Roma. 239-252.

www.progettoaral.it

Gruppo progetto ArAl in Facebook

L' autore



Giancarlo Navarra
e-mail giancarlonavarra@gmail.com
Italy

Ha insegnato matematica nella scuola secondaria. È stato professore a contratto presso il dipartimento di matematica dell'università di Modena e Reggio Emilia, dove ha svolto attività di ricerca dal 1986. Dal 1994 si occupa di *early algebra*. È co-responsabile scientifico assieme a N. Malara e coordinatore nazionale del *Progetto ArAl*. Dirige gruppi di studio e ricerca composti da insegnanti impegnati sul versante delle innovazioni metodologiche e curricolari in matematica. Interviene come relatore in convegni e seminari in ambito sia nazionale che internazionale. È autore di un centinaio di pubblicazioni.

Received April 26, 2017; *revised* July 21, 2017; *accepted* September 11, 2017; *published online* October 07, 2018

EDiMaST

ISSN 2421-7247

article

Basic geometric-trigonometric equalities and problem-solving: Linear and angular elements

Panagiote Ligouras

Abstract. *This paper presents some equalities that we consider useful for the resolution of general high school level geometry problems. The presented equalities involve the use of linear elements and angular elements at the same time. The objective of this work is to monitor, on a small scale, the skills and knowledge acquired by students in the eleventh and twelfth school year (L11 & L12) in an Italian region named Apulia. This goal has been achieved by mean of different exercises where we asked 27 students:*

- *recognise the structure of proposed equality;*
- *resolve expressions with equalities.*

Results are reported and discussed.

Key words. *Mathematics, Teaching, Geometric equalities, Trigonometric equalities, Angular elements, Linear elements, Problem solving.*

Sommario. *In questo lavoro si presentano alcune uguaglianze che riteniamo utili per la risoluzione di problemi di carattere geometrico a livello di scuola secondaria superiore di secondo grado. Le uguaglianze presentate coinvolgono elementi lineari ed elementi angolari contemporaneamente. L'obiettivo del lavoro è quello di monitorare, in scala molto ridotta, il grado di competenze acquisite dagli studenti dell'undicesimo e del dodicesimo anno di scolarità (L11 & L12) nella regione italiana denominata Puglia. Questo obbiettivo è stato raggiunto tramite diversi esercizi nei quali è stato chiesto a 27 studenti di:*

- *riconoscere la struttura di uguaglianze proposte;*
- *risolvere espressioni con uguaglianze.*

In conclusione, i risultati sono stati presentati e discussi.

Parole chiave. *Matematica, Didattica, Uguaglianze trigonometriche, Uguaglianze geometriche, Elementi angolari, Elementi lineari, Problem-solving.*

Introduction

This article is part of two phase research previously presented (Ligouras, 2017a; Ligouras, 2017b). The first and second phase of the research considered the learning of groups of students who attended a course on geometric equalities concerning only linear elements or only angular elements. The current paper initially presents a collection of equalities that, if used correctly, can facilitate the resolution of many problems of geometry and trigonometry. In this third phase, geometrical and trigonometric equalities, involving linear and angular elements at the same time, were investigated.

In general, the learning process of angular elements' concepts represents a higher difficulty for students with the respect of the ones that uses only linear elements.

Concepts and problems that simultaneously involve linear elements and angular elements represent a greater difficulty for students than learning and consciously applying concepts involving only linear elements or only angular elements.

The equalities have been experimented with groups of students of the third (L11) and of the fourth year (L12) of some high schools of the Apulia region, during their preparation for the mathematical competitions, in the last five years.

The students of the course attended different studies.

The course lasted 8 hours, distributed over two consecutive weeks.

We presented to the students only equations with linear and angular elements. The purpose of the research that we describe in this paper is to explore the skills acquired and the degree of self-regulation achieved by the pupils during their studies in Italian schools. We believe that these two factors stand out better on problematic issues not studied at school.

The primary purpose of the research was to understand if the Italian school:

- prepares students for the acquisition of skills related to problem-solving;
- offers an adequate degree of acquisition of skills related to problem-solving;
- offers the opportunity for students to build meaningful learning in mathematics.

Furthermore, the students' aptitude to work in small groups of three monitored in tasks requiring knowledge not studied at school.

The difference in performance between male and female pupils is also observed.

The students involved in the experimentation described below are different from those involved in the first and second article already presented (Ligouras, 2017a & 2017b).

All the students who participated in the experimentation have a passion for mathematics, high performances and the right motivation to improve them.

Description

Below is a summary of the activities performed and evaluated for this experimentation. To allow a fair comparison of the previous experiment outcomes (Ligouras, 2017a & 2017b) and the ones described in this paper, the experiment content is the same amongst the different publications.

Notations

The figure (Fig.1) shows the annotations useful for reading the basic geometric equations that follow. The annotations provided to each student who participated in the experience.

notations

A, B, C	vertices of a triangle *ABC*	***s***	Semi-perimeter of a triangle
a, b, c	sides *BC, CA, AB*	**[*ABC*]**	Area of triangle *ABC*
$\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma}$	angles of a triangle *ABC*	h_a , h_b , h_c	Altitudes of a triangle *ABC*
R	Radius of circumcircle	m_a , m_b , m_c	Medians of a triangle *ABC*
r	Radius of incircle	w_a , w_b , w_c	Angle-bisectors of a triangle *ABC*
r_a , r_b , r_c	Radii of excircles of a triangle *ABC*	***O***	Circumcentre of a triangle *ABC*
I	Incentre of a triangle *ABC*	***H***	Orthocentre of a triangle *ABC*
I_a , I_b , I_c	Excentres of a triangle *ABC*	***G***	Centroid of a triangle *ABC*

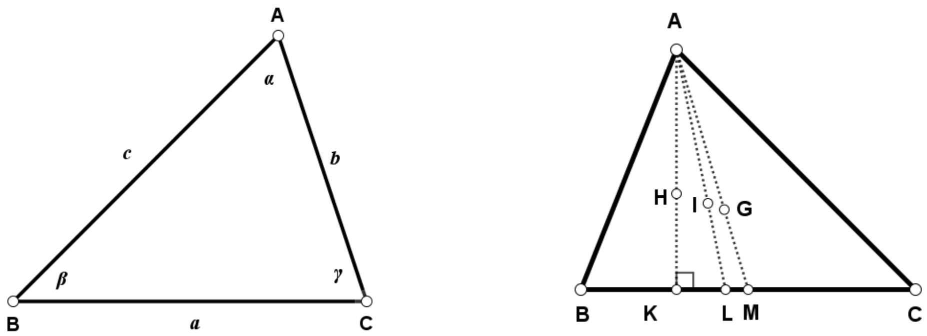


Fig. 1 – Notations

Linear and Angular elements

To perform the experimentation, we used the following 98 geometric equations as a material. This collection has been created over the past five years by examining the formulas used to create the problems of national and international mathematical competitions. For their collection it was very useful Internet but also some documents, articles and books (Andreescu & Feng, 2004, Anonymous, 1904, Altshiller-Court, 2007; Bottema et All., 1969; Engel, 1998; Hang & Wang, 2017; Hobson, 2005; Larson, 1983; Ligouras, 2008; Prasolov & Tikhomirov, 2001; Shariguin, 1989; Zeitz, 2006; Todhunter, 2016).

basic linear and angular elements		
c.1	$a = 2R \cdot \sin\alpha$	
c.2	$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$	(Law of sines)
c.3	$a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$	
c.4	$a = \dfrac{b \cdot \cos\beta + c \cdot \cos\gamma}{\cos(\beta - \gamma)}$	

c.5 $$a=\frac{b\cdot\sin\beta-c\cdot\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)}$$

c.6 $$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$$ (Law of cosines)

c.7 $$\sin\alpha=\frac{2}{bc}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

c.8 $$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

c.9 $$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

c.10 $$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{r}{s-a}$$

c.11 $$\cot\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}=\frac{s-a}{r}$$

c.12 $$a=s\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}$$

c.13 $$\frac{b+c}{a}=\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

c.14 $$\frac{b+c}{a}=\frac{2\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-1$$

c.15 $$\frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

c.16 $$\frac{b-c}{a}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

c.17 $$\frac{b-c}{a}=\frac{\cos\gamma-\cos\beta}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

c.18 $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}=\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}$$ (Neper)

c.19 $$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$$

c.20	$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}$
c.21	$a\cdot\sin(\beta-\gamma)+b\cdot\sin(\gamma-\alpha)+c\cdot\sin(\alpha-\beta)=0$
c.22	$\frac{a^2\cdot\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}+\frac{b^2\cdot\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\beta}+\frac{c^2\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}=0$
c.23	$\frac{a\cdot\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{b\cdot\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{c\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}=0$
c.24	$\frac{a\cdot\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{b\cdot\sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}}+\frac{c\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\gamma}{2}}=0$
c.25	$\frac{a^2\cdot\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta+\sin\gamma}+\frac{b^2\cdot\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma+\sin\alpha}+\frac{c^2\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}=0$
c.26	$\frac{1}{a}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{b}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}+\frac{1}{c}\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}=\frac{s^2}{abc}$
c.27	$(a-b)\cdot\tan\frac{\alpha+\beta}{2}+(b-c)\cdot\tan\frac{\beta+\gamma}{2}+(c-a)\cdot\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}=0$
c.28	$(a+b)\cdot\tan\frac{\alpha-\beta}{2}+(b+c)\cdot\tan\frac{\beta-\gamma}{2}+(c+a)\cdot\tan\frac{\gamma-\alpha}{2}=0$
c.29	$\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{s-c}+\frac{\cos\beta-\cos\gamma}{s-a}+\frac{\cos\gamma-\cos\alpha}{s-b}=0$
c.30	$R=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{abc}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}}$
c.31	$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{2R}{r}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$
c.32	$a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma=4R\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$
c.33	$a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma=\frac{abc}{2R^2}$
c.34	$(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)=\frac{s^2}{2R^2}$
c.35	$a^2+b^2+c^2=4R^2\cdot\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\right)$
c.36	$\frac{a\cdot\sin\alpha+b\cdot\sin\beta+c\cdot\sin\gamma}{a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma}=R\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$
c.37	$a^2+b^2+c^2=2\left(bc\cdot\cos\alpha+ca\cdot\cos\beta+ab\cdot\cos\gamma\right)$

c.38 $\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{s}$

c.39 $\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{4R}$

c.40 $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{4R}$

c.41 $\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{r}$

c.42 $\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{4R+r}{s}$

c.43 $\frac{R}{r}=\frac{a+b+c}{a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma}$

c.44 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{R}$

c.45 $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\frac{sr}{2R^2}$

c.46 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}+1=\frac{r}{R}+1$

c.47 $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma=\frac{s^2-\left(2R+r\right)^2}{4R^2}$

c.48 $a\cdot\cot\alpha+b\cdot\cot\beta+c\cdot\cot\gamma=2\left(R+r\right)$

c.49 $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}=1-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=1-\frac{r}{2R}$

c.50 $h_a=\frac{bc\sin\alpha}{a}=\frac{a\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}$

c.51 $h_a=2s\cdot\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

c.52 $AH=2R\cdot\cos\alpha=a\cdot\cot\alpha$

c.53 $HK=2R\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$

c.54 $a^2+b^2+c^2=R\cdot\left(h_a\cdot\cos\alpha+h_b\cdot\cos\beta+h_c\cdot\cos\gamma\right)$

c.55 $w_a=2\cdot\frac{bc}{b+c}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$

c.56 $w_{1a}=2\cdot\frac{bc}{b-c}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$

c.57 $AI=\frac{bc}{s}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$

c.58 $IL = \dfrac{abc}{s(b+c)} \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}$

c.59 $r_a = s \cdot \tan\dfrac{\alpha}{2}$

c.60 $r_a = 4R \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\gamma}{2}$

c.61 $r_a + r = 4R \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}$

c.62 $r_a - r = 4R \cdot \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

c.63 $r_a + r_b = 4R \cdot \cos^2\dfrac{\gamma}{2}$

c.64 $r_a - r_b = 4R \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

c.65 $r = a \cdot \dfrac{\sin\dfrac{\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$

c.66 $r_a = a \cdot \dfrac{\cos\dfrac{\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$

c.67 $r_a = r \cdot \cot\dfrac{\beta}{2} \cdot \cot\dfrac{\gamma}{2}$

c.68 $r = \dfrac{h_a}{2} \cdot \dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\gamma}{2}}$

c.69 $r_a = \dfrac{h_a}{2} \cdot \dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\gamma}{2}}$

c.70 $\dfrac{h_a - 2r}{h_a} = \dfrac{h_a}{h_a + 2r_a} = \tan\dfrac{\beta}{2} \cdot \tan\dfrac{\gamma}{2}$

c.71 $AI = \dfrac{s-a}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{r}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

c.72 $II_a = \dfrac{a}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = 4R \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2}$

c.73 $I_aI_b = \dfrac{c}{\cos\dfrac{\gamma}{2}} = 4R\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}$

c.74 $[ABC] = \dfrac{bc}{2}\cdot\sin\alpha$

c.75 $[ABC] = \dfrac{a^2}{2}\cdot\dfrac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}$

c.76 $[ABC] = \dfrac{abc^2}{2\left(a^2-b^2\right)}\cdot\sin\left(\alpha-\beta\right)$

c.77 $[ABC] = \dfrac{\left(a^2-b^2\right)}{2}\cdot\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\left(\alpha-\beta\right)} = \dfrac{a^2-b^2}{2\left(\cot\alpha-\cot\beta\right)}$

c.78 $[ABC] = s^2\cdot\tan\dfrac{\alpha}{2}\cdot\tan\dfrac{\beta}{2}\cdot\tan\dfrac{\gamma}{2}$

c.79 $[ABC] = \dfrac{abc}{s}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}$

c.80 $[ABC] = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4\left(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma\right)}$

c.81 $[ABC] = \dfrac{a^2\cdot\sin\left(2\beta\right)+b^2\cdot\sin\left(2\alpha\right)}{4}$

c.82 $[ABC] = R\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$

c.83 $[ABC] = 2R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$

c.84 $[ABC] = 4Rs\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\gamma}{2}$

c.85 $[ABC] = \dfrac{1}{2}R\cdot\left(a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma\right)$

c.86 $[ABC] = Rr\cdot\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)$

c.87 $[ABC] = R\cdot h_a\cdot\sin\alpha$

c.88 $[ABC] = \dfrac{{m_a}^2+{m_b}^2+{m_c}^2}{3\left(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma\right)}$

c.89 $[ABC] = \dfrac{2}{3}\cdot\left({m_b}^2-{m_a}^2\right)\cdot\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\left(\alpha-\beta\right)}$

c.90 $[ABC] = \dfrac{1}{2}\cdot w_a\cdot\left(b+c\right)\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot w_a\cdot a\cdot\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}$

c.91 $[ABC] = r^2\cdot\cot\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cot\dfrac{\beta}{2}\cdot\cot\dfrac{\gamma}{2}$

c.92	$[ABC] = r_a{}^2 \cdot \cot\frac{\alpha}{2} \cdot \tan\frac{\beta}{2} \cdot \tan\frac{\gamma}{2}$
c.93	$[ABC] = r^2 \cdot \cot\frac{\alpha}{2} + 2Rr \cdot \sin\alpha$
c.94	$[ABC] = rr_a \cdot \cot\frac{\alpha}{2}$
c.95	$[ABC] = r_b r_c \cdot \tan\frac{\alpha}{2}$
c.96	$[ABC] = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}$
c.97	$[ABC] = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\cot\alpha}$
c.98	$[ABCD] = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$

Fig.2 – Basic geometric-trigonometric equalities with linear and angular elements

Activities and experimentation

As a first activity, the students practised recognising if a specific expression is an immediate consequence of one of those illustrated in the figure (Fig.2). The following figure (Fig.3) presents one of the cards used for the exercise.

Each student had 10 minutes to answer the question.

Proposal n. 4	
la.01	$r_a = 2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} + \frac{s}{2} \cdot \tan\frac{\alpha}{2}$
la.02	$\tan\frac{\beta}{2} \cdot \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{h_a - 2r}{2h_a} + \frac{h_a}{2h_a + 4r_a}$
la.03	$a + b = (a+b) \cdot \cos\gamma + c \cdot (\cos\beta + \cos\alpha)$
<u>la.04</u>	$R \cdot \left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{r}{2}$
la.05	$[ABC] = rr_a \cdot \frac{r_b - r_c}{b - c}$
la.06	$\frac{b+c}{a} = \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{2\sin\alpha} + \frac{\cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2}$

la.07	$a^2\cos\gamma + c^2\cos\alpha = \frac{a+c}{2b}\left[b^2 + (a-c)^2\right]$
<u>**la.08**</u>	$a = \dfrac{r\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}$
la.09	$[ABC] = r^2\cdot\cot\frac{\alpha}{2} + 2Rr\cdot\sin\alpha$
la.10	$r_a = a\cdot\sec\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$
Identify any expressions that are immediate consequences of one of the ninety-eight *basic trigonometric equalities*. Indicate below their ID.	
Answers:	

Fig. 3 – recognition questionnaire

Subsequently, students were offered some cards with problems to verify their ability to recognise the expressions that are constructed by combining two or three geometrical equalities between the 98 of the figure (Fig. 2). The following figure (Fig. 4) presents one of the boards used for the exercise.

Each student had 10 minutes to answer the question.

Proposal n. 6	
k.01	$[ABC] = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4\tan\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}$
k.02	$\sqrt{(ab)^2-4[ABC]^2} + \sqrt{(bc)^2-4[ABC]^2} + \sqrt{(ca)^2-4[ABC]^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$
k.03	$[ABC] = rr_a\cdot\sqrt{\dfrac{4R-(r_a-r)}{r_a-r}}$
<u>**k.04**</u>	$r_a{}^2 - r_b{}^2 = 16R^2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}$
k.05	$w_a = 2R\cdot\dfrac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$
Identify any expressions that are a consequence of two or three of the ninety-eight expressions provided. Indicate below their ID.	
Answers:	

Fig. 4 – Combination of *basic geometric equalities*

Finally, the students were asked to demonstrate one of the five expressions proposed using their knowledge and the 98 equalities (see Fig. 2). The following figure (Fig.5) presents one of the boards used for group exercise.

Survey n. 2	
m.1	$[ABC]=\dfrac{(s-a)^2\sin\alpha+(s-b)^2\sin\beta+(s-c)^2\sin\gamma}{2\left(\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\beta}{2}+\sin^2\dfrac{\gamma}{2}\right)}$
m.2	$\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\cdot\tan\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{r}{s-b}\cdot\tan\dfrac{\gamma}{2}+\dfrac{r_c}{s}\cdot\tan\dfrac{\alpha}{2}=1$
m.3	$a\cdot(\cos\beta+\cos\gamma)(1+2\cos\alpha)=(b+c)\cdot\left(1+\cos\alpha-2\cos^2\alpha\right)$
m.4	$2s=\dfrac{a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}$
m.5	$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\beta}{2}+\sin^2\dfrac{\gamma}{2}+2\cdot\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\dfrac{r}{CI}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}=1$
Solve, in groups, one of the following geometric equalities. Basic geometric-trigonometric equalities can use without demonstration.	
Resolution:	

Fig. 5 – Resolution, in groups, geometric equalities

We provided, to perform this exercise, the cards with the equations presented in the two previous works of the author (Ligouras, 2017a, Fig.2 & Ligouras, 2017b, Fig.2). These equalities, if used, must be demonstrated. We made this choice because the information provided in Fig.2 is not sufficient to solve the proposed problems. Furthermore, this research does not intend to measure knowledge but to appreciate the pupils' skills.

Each group had 20 minutes to answer the question.

Finally, the figure (Fig. 6) presents one of the worksheets used, at the end of the path, to monitor the skills acquired (acquired and previous) individually.

Also for the performance of this task the two cards, described above, have been provided to each candidate (Ligouras, 2017a, Fig.2 & Ligouras, 2017b, Fig.2).

Each student has had 35 minutes to answer the question.

Proposal n. 1	
prob.1	$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=\dfrac{4[ABC]}{R}\cdot\sin\alpha$

prob.2 $b\cdot\sin(\gamma-\alpha)+c\cdot\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{s\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}}\cdot\sin(\gamma-\beta)$

prob.3 $\dfrac{\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\beta+\sin\gamma}\cdot\tan\dfrac{\beta}{2}\cdot[ABC]=\dfrac{rr_b r_a}{s}$

Solve, individually, one of the three previous equalities. Basic geometric-trigonometric equalities can use without demonstration.

Resolution:

Fig. 6 – Individually final test. Solution of geometric equalities

Discussion and results

27 students from L11 and L12 school year participated in this research. Of these, 15 were males and 12 females. During the course topics and insights were discussed that are generally not carried out at school during the period of study in Italy.

The first figure (Fig.7) presents the percentages of the exact answers achieved by the students during the first exercise.

- 77.78% of students have identified that question la.04 is an immediate consequence of c.49 of fundamental geometric equalities. This question had a correct answer from 86.67% of the 15 male students, which corresponds to 13 students and 66.67% of the 12 female students corresponding to 8 people.
- 88.89% identified that question la.08 is a consequence of equality c.65. This question was answered correctly by 93.33% of males, which corresponds to 14 students and 83.33% of female students who correspond to 10 people.

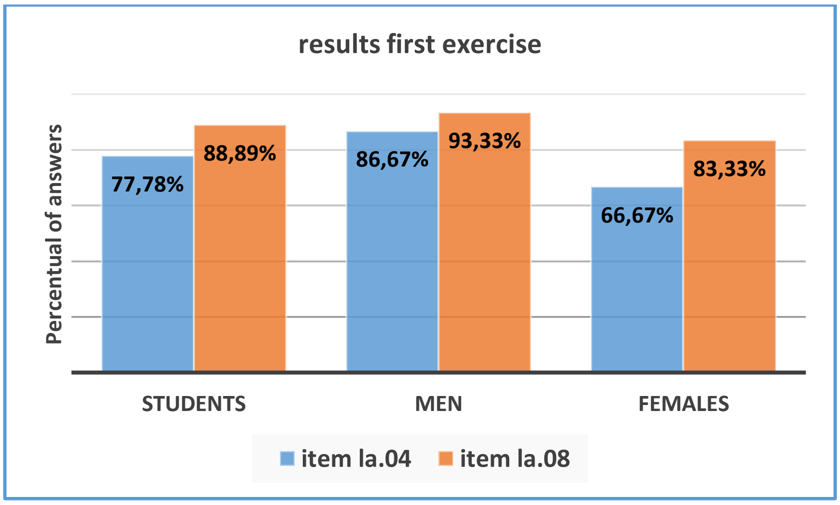


Fig. 7 – Results first exercise

The percentage of responses cannot be considered a good result. The task was only to observe and decide to use only the four fundamental operations of arithmetic. Also, the results of the percentages of correct answers of the other cards were similar and included in a range of ±1.96% compared to the values presented in the graph.

The figure (Fig.8) shows the percentages of the correct and non-correct answers for the second exercise.

The exercise asked to identify the equalities that would result in combinations of two or three basic expressions.

- 7.41% of the students have identified that question k.1 is a consequence of the equality c.97 (see Fig.2). Only two students answer incorrectly.

  To obtain the identity k.1 I need the equality c.97 and the goniometric expression $\cot\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. The item is not included in the correct answers.

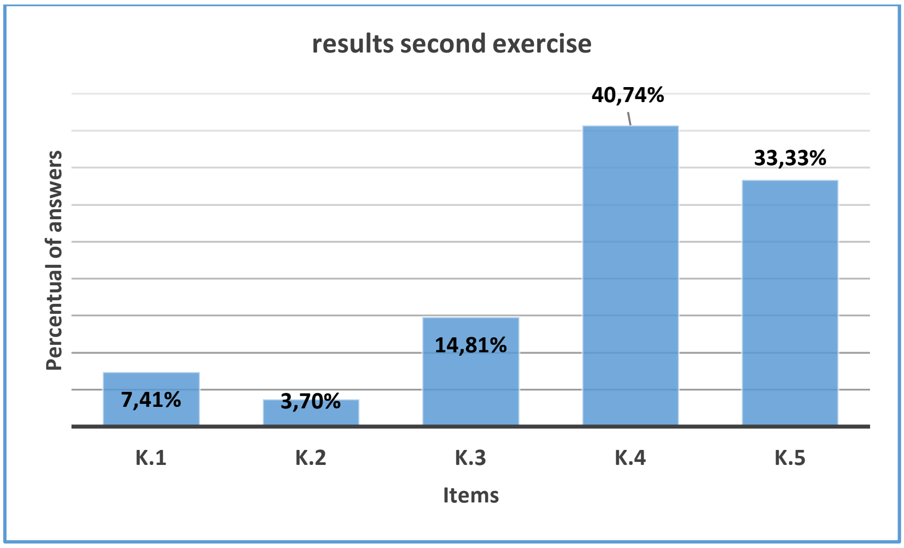


Fig. 8 – Results second exercise

- 3.70% of the students indicated that the question k.2 is a consequence of the question c.80 and c.97. The student answered incorrectly. Item k.2 to be verified needs the following equalities: c.74 and $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.
- 14.81% of the students identified that question k.3 is a consequence of questions c.64 and c.94. These four students answered incorrectly. The equality of item k.3 to be verified needs c.64, c.94 and the fundamental expression $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$.
- 40.74% of the students indicated that the question k.4 is a consequence of the questions c.64 and c.65. These eleven students answered correctly. The equality can achieve by following simple algebraic operations using items c.64 and c.65.

- 33.33% of the 27 students identified that question k.5 is a consequence of question b.13. These nine students answered correctly. To demonstrate the equality of item k.3 it is sufficient to use the expressions c.82 and c.90.

Only three students out of twenty-seven (which corresponds to 5%) indicated that there are two correct answers. Everyone else has indicated only one solution.

We can think, after reading these results, that even the students of the second phase of experimentation like those of the first phase, cannot read carefully and consequently understand the deliveries of the tasks to be performed. Our conjecture could further deepen (with subsequent research) extending the statistical sample to other Italian students of school age L11 and L12. The exercise asked to identify the equalities that would result in combinations of two or more basic expressions.

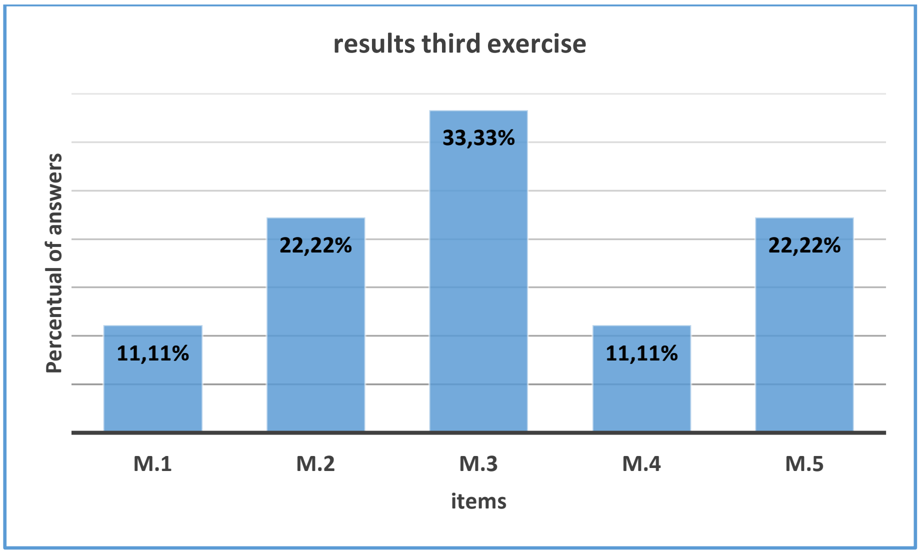


Fig. 9 – Results third exercise

Figure (figure 9) presents the percentages of the nine groups of students who have solved a specific item of the third exercise.

- 11.11% of the groups, which corresponds to 1 group of the nine formats, solved the question m.1. The question presents a medium-high difficulty.
- 22.22% which corresponds to 2 groups, solved the question m.2. The question presents a medium difficulty.
- The 33.33% that corresponds to 3 groups solved the question m.3. The question presents a medium difficulty.
- 11.11% which corresponds to 1 group, solved the question m.4. The question has a medium difficulty.
- 22.22% (corresponds to 2 groups) solved the question m.5. The question presents a medium-high difficulty.

It is important to stress that all the groups have solved one of the five proposed questions successfully.

As can be seen in the last figure (Fig. 10):

- 22.22% of the students, which corresponds to 6 people, solved the question prob.1. The application presents a medium-high level of difficulty. The c.82 is the fundamental equation to be used to solve the proposed problem.
- 48.15% of the students, which corresponds to 13 people, solved the question prob.2. The question does not present a high level of difficulty. The largest number of students chose this question. The c.21 is the fundamental equation to be used to solve the proposed problem.
- The 18.52% that corresponds to 5 students solved the question prob.3. The question presents a higher level of difficulty with than the other two proposed. c.38 and c.95 are the fundamental equations to be used to solve the proposed problem.

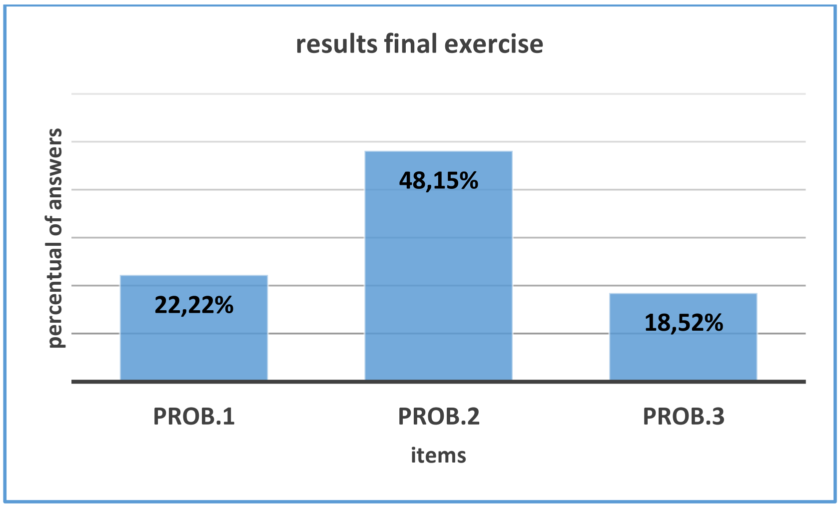


Fig. 10 – Results final exercise

Finally, it should note that the 11.11% that corresponds to 3 students, has not been able to completely or correctly solve any item of those proposed.

Also in the second phase, we did not intervene with the students to understand the motivations of the decision-making process that guided their response choices.

Conclusion

The results presented in this article are in line with the results presented in the papers (Ligouras, 2017a) and (Ligouras, 2017b). The three experiments have shown that the more self-regulated, motivated and more grit (Duckworth, 2016) L11 and L12 students can exploit their knowledge and skills to improve the skills already in their possession and extend them faster, guided by other amongst the most competent peers in the group or the teacher. As demonstrated by researchers, there is a new zone of proximal development outside the student's current area of development. This zone is called (ZPD) *Zone of Proximal Development* (Vygotsky, 2012). Our experiments, as we just said, have shown that, in the groups of more self-regulated pupils, the transition between the *current development zone* and the *proximal development zone* of the student would seem quicker.

The author intends to continue the research following the same basic methodology. This new experiment that will involve a new group of students will have two phases. In the first phase, there will be exercises with the following different types of geometric equality: equalities with linear elements; equality with angular elements and equality with linear and angular elements together. The first phase will create the basis for developing the next phase. The second phase will involve geometric inequalities. In this way - by gradually inserting linear elements, angular elements, linear and angular elements and geometric inequalities - the information field provided is expanded and the requests to the students become more complex. This way of proceeding seems to the authors an excellent path to evaluate the degree of ability of the students in managing an increasing amount of information on increasingly complex problematic situations. Problem solving skills will be tested on topics closer to the world of abstraction then to the factual world but always within the ZPD. Students will be prepared before the final evaluation to have solid bases in the domain of geometric equality and will learn the essential techniques to solve inequalities. Students will not be prepared to solve geometric inequalities before the final evaluation.

None of the students in the group highlighted particular heuristic skills.

Declaration of Conflicting Interests

The author declared that they had no conflicts of interest concerning their authorship or the publication of this article.

References

Andreescu T., Feng Z., (2004). *103 Trigonometry Problems: From the Training of the USA IMO Team*, Birkhauser, Boston.

Anonymous, (1904). *Relations entre les éléments d'un triangle*. Vuibert et Nony, Éditeurs, Paris.

Altshiller-Court N., (2007). *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, Dover Publications.

Bottema O., Djordjevic R.Z., Janic R.R., Mitrinovic D.S., Vasic P.M., (1969). *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordho Publishing Groningen.

Duckworth A., (2016). *Grit. The power of passion and perseverance*, Scribner.

Engel A., (1998). *Problem Solving Strategies*, Springer Verlang.

Hang K.H., Wang H., (2017). *Solving Problems in Geometry: Insights and Strategies*, World Scientific Pub Co Inc.

Hobson E.W., (2005). *A Treatise on Plane and Advanced Trigonometry*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York.

Larson L.C., (1983). *Problem-Solving Through Problems*, Springer-Verlag.

Ligouras P., (2017a). *Basic Geometric Equalities and Problem-Solving: Linear Elements*, Experiences of Teaching with Mathematics, Sciences and Technology — ISSN 2421-7247, vol. 3, n. 1, 475-487.

Ligouras P., (2017b). *Basic Geometric Equalities and Problem-Solving: Angular Elements*, Experiences of

Teaching with Mathematics, Sciences and Technology — ISSN 2421-7247, vol. 3, n. 2, 515-526.

Ligouras P., (2010). 1691 *Algebraic Inequalities: Problem Solving – Old and New Problems for the Mathematical Olympiads*, AGA editrice.

Ligouras P., (2008). *Geometrical Olympiad 2008*, AGA editrice, ISBN: 88-95089-11-9 (Italian).

Prasolov V.V., Tikhomirov V.M., (2001). *Geometry*, American Mathematical Society.

Shariguin I., (1989). *Problemas de Geometría Planimetría*. Editorial Mir.

Todhunter I., *Problems and Solutions in Plane Trigonometry (LaTeX Edition): For the use of Colleges and Schools*, Ancient Science Publishers, 2016.

Vygotsky L.S., (2012). *Thought and Language*, 2nd Edition, The MIT Press.

Zeitz P., (2006). *The Art and Craft of Problem Solving*, Wiley International Student edition.

About the Author

Panagiote Ligouras
I.I.S. "Leonardo da Vinci – Galileo Galilei" - Noci (BA)
Currently in service at the Regional School Office (USR-Puglia)
Via Col di Lana, 33, 70011 Alberobello (BA)
ligouras@alice.it
Italy

Teacher of mathematics and computer science. Passionate about mathematical problem-solving, ICT, didactic communication and online and Blended educational activities. It also deals with learning and evaluation processes in various training and system contexts.

Collaborates for years with the Italian Ministry of Education, University and Research (MIUR), with the INDIRE (National Institute of Documentation, Innovation and Educational Research, Italy), with INVALSI (National Institute for the Evaluation of the Educational System of Education and training, Italy) and with the USR Puglia (Regional School Office, Italy).

Trainer accredited in "Evaluation of learning and system" - SNV.

He is the author of numerous scientific papers.

Website: www.takismath.eu

LinkedIn: http://it.linkedin.com/pub/ligouras-panagiote/33/113/a02

Received April 17, 2017; *revised* June 22, 2017; *accepted* October 6, 2017; *published online* December 04, 2018

Volume 3, Number 3, December 2017 ISSN 2421-7247 (online)

Reviewers

MIUR: Ministry for Education, University and Research – Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
INDIRE: National Institute for Documentation, Innovation and Educational Research – Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa
INVALSI: National institute for the evaluation of the education and training system – Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione.

Experiences of teaching with Mathematics, Sciences and Technology

Volume 3, Number 3, December 2017 ISSN 2421-7247 (online)

Tutors

Simone **Banchelli**
MIUR, Ravenna (RA), Italy

Nicola **Chiriano**
MIUR, Cosenza, Italy

Titti **D'Acunto**
University of Salerno, Italy

Umberto **Dello Iacono**
University of Salerno, Italy

Flora **Del Regno**
University of Salerno, Italy

Alessandra **Faniuolo**
MIUR, Putignano (BA), Italy

Laura **Lombardo**
University of Salerno, Italy

Maria **Piccione**
MIUR, Firenze, Italy

Grazia Patrizia **Raciti**
MIUR, Riposto (CT), Italy

Fiorenza **Turiano**
MIUR, Savigliano (CN), Italy

Dario **Zuccato**
MIUR, Due Ville (VI), Italy

Vincenzo **Palumbo**
MIUR, Rutigliano (BA), Italy

MIUR: Ministry for Education, University and Research – Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

INDIRE: National Institute for Documentation, Innovation and Educational Research – Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa

INVALSI: National institute for the evaluation of the education and training system – Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione.

EDiMaST

Volume 3, Number 3 ISSN 2421-7247 (online) December 2017

Contents

Experiens & Research Articles