Happy verticality in mathematics

Stefano Babini, Ivan Graziani

Abstract *"Happy verticality in mathematics" stems from the need to deploy how much anticipated in the vertical curriculum described in the National Indications for the curriculum of the school of the infancy and the 2012 education first cycle and pushing such verticality to the first two years of superior education and the relative Cultural Aces and Indications.*

We have thought about facing some particular conceptual knots that create difficulty in the students to all the scholastic levels, what the geometric transformations, isometric and not, the fractions and the theory of the probability.

Our principal purpose has been that to face such knots in different way and amusing, alternating to all the levels the mathematical rigorousness to the imagination and the game. We are looked for so to mostly make nice, but at the same time less loved by the greatest part of the students.

For such motive, this experience has seen involved for before the school of the infancy, with the children of 4 and 5 years, and subsequently all the classes of the primary school, those of the secondary school of The degree and, finally, those of the first two years of the secondary one of II degree.

Key-words *Verticality, fractions, transformations, probability.*

Sommario *"Happy verticality in matematica" nasce dall'esigenza di mettere in campo quanto previsto dal curricolo verticale descritto nelle Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione del 2012 e spingendo tale verticalità al primo biennio di istruzione superiore e ai relativi Assi Culturali e Indicazioni.*

Abbiamo pensato di affrontare dei particolari nodi concettuali che a tutti i livelli scolastici creano difficoltà negli studenti, quali le trasformazioni geometriche, isometriche e non, le frazioni e la teoria della probabilità.

Il nostro scopo principale è stato quello di affrontare tali nodi in modo diverso e divertente, alternando a tutti i livelli la rigorosità matematica alla fantasia e al gioco.

Si è cercato così di rendere maggiormente simpatica la disciplina più bella, ma al tempo stesso meno amata dalla maggior parte degli studenti.

Per tale motivo, questa esperienza ha visto coinvolte per prima la scuola dell'infanzia, coi bambini di 4 e 5 anni, e successivamente tutte le classi della scuola primaria, quelle della scuola secondaria di I grado e, infine, quelle del primo biennio della secondaria di II grado.

Parole-chiave *Verticalità, frazioni, trasformazioni, probabilità .*

Introduzione

La verticalità e la continuità nella scuola rischiano sempre di rimanere solo sulla carta e di non essere messe in pratica nella attività didattiche nelle varie aule.

"Happy verticality in matematica" è nato proprio per questo: per coinvolgere studenti e insegnanti in verticale su alcuni nodi concettuali affrontati in modo divertente e soprattutto cercando di utilizzare pochi termini, essenziali ma corretti, a tutti i livelli, fin dalla scuola dell'Infanzia, anche per evitare misconcezioni che una volta acquisite sono difficili da smantellare.

Per questo motivo, in questo primo anno di attività, abbiamo affrontato un tema legato ai numeri, quello delle frazioni e dei numeri razionali. Questo particolare argomento è stato scelto perché da sempre risulta ostico per un gran numero di studenti e spesso ci si chiede come mai un argomento affrontato fin dalla terza classe della scuola primaria non venga assimilato dagli alunni che continuano a fare gli stessi errori fino alla scuola secondaria di secondo grado e anche oltre.

Abbiamo quindi presentato le frazioni fin dalla scuola dell'infanzia, giocando con questi numeri particolari insieme ai bambini. Poi lo stesso argomento è stato proposto ai bambini di prima, seconda, terza e quinta primaria, agli studenti di prima e seconda “media” e a quelli della seconda classe di secondaria del liceo classico tradizionale. Sulle frazioni, purtroppo, si trovano misconcetti a tutti i livelli scolastici. Per questo è importante chiarirli fornendo, soprattutto ai bambini, poche informazioni semplici, ma corrette e rigorose.

Destinatari e tempi

L’attività è stata svolta durante l’anno scolastico 2014/2015 presso le scuole dell’Infanzia, Primaria e Secondaria di primo grado dell’Istituto Comprensivo di Santa Sofia (FC) di Santa Sofia e presso la quinta ginnasio del Liceo Classico “Rambaldi – Valeriani – A. Da Imola” di Imola (BO).

Gli incontri nelle classi della scuola dell’Infanzia e in quelle della Primaria sono stati due di due ore ciascuna insieme all’insegnante della classe. Nelle Scuole secondarie di I e II grado sono state effettuate cinque lezioni di due ore ciascuna.

Attività e sperimentazione

Le frazioni

L’introduzione delle frazioni ai bambini di 4 e 5 anni è avvenuta attraverso la piegatura della carta e la simulazione di una spartizione di torta di compleanno. I bambini hanno suddiviso prima a metà, poi in 4 parti, in 8 parti e in 16 parti, partendo da un foglio rettangolare dato a ciascuno di loro. Siamo poi passati all’introduzione di alcuni termini specifici a loro sconosciuti come “un mezzo” (non di trasporto …) , poi un quarto, un ottavo e un sedicesimo. Siamo poi passati a osservare diverse quantità partendo dalle frazioni unitarie e all’osservazione diretta, sempre dalle fette di torta, dell’equivalenza di frazioni semplici come $\frac{1}{2}$ con $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$ e $\frac{8}{16}$. Per questo livello di scuola ci sembra già abbastanza.

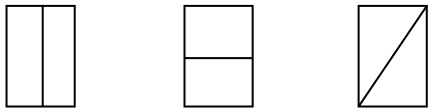
L’approccio con i bambini della prima classe della scuola Primaria è stato differente ed è partito dalla probabilità e dalla sua rappresentazione in alcuni casi, come ad esempio nel lancio di una moneta o di un dado a sei facce. Anche in questo caso abbiamo prima incontrato le frazioni unitarie, come la probabilità che esca una delle due facce della moneta, $\frac{1}{2}$, e come la probabilità che esca un determinato numero di un dado, $\frac{1}{6}$, per poi passare ad alcune frazioni equivalenti, come $\frac{3}{6}$ individuata come probabilità di ottenere un numero pari con il dado, che rappresenta anche la metà dei casi favorevoli e quindi $\frac{1}{2}$. Abbiamo incontrato altre frazioni utilizzando un sacchetto con 10 caramelle, prima tutte nere, poi sostituendo gradualmente alcune caramelle nere con altrettante verdi, potendo così ragionare anche sulle frazioni complementari.

Anche con i bambini della seconda classe primaria siamo partiti dalla probabilità e abbiamo costruito frazioni unitarie e equivalenti, come rappresentazione di casi probabili: uno su 2 (moneta testa o croce) $\frac{1}{2}$, uno su 6 (ottenere 2 col dado) $\frac{1}{6}$.

Abbiamo chiesto ai bambini se sapevano cos’era un numero pari e un numero dispari, perché di solito questo argomento si tratta solo in seconda. Visto che quasi tutti conoscevano già la differenza tra numero pari e numero dispari, compresi tra uno e sei, abbiamo chiesto: “*Qual è la probabilità, lanciando un dado di ottenere un numero pari?*”. Diversi bambini hanno subito alzato la mano e risposto: “*3 su 6*” e una anche “$\frac{3}{6}$”. Un bambino ha poi detto “*ma è la metà dei casi e allora è anche* $\frac{1}{2}$” e una bambina ha aggiunto “*il 50%*”, introducendo così un’altra rappresentazione semiotica dello stesso numero.

Anche in questa classe abbiamo utilizzato il sacchetto con le caramelle e la piegatura del foglio di carta formato A4 in 16 parti come avevamo già visto nella scuola dell’infanzia. Ci siamo soffermati sulla necessità di piegare con una certa precisione la carta per ottenere parti uguali.

È importante però definire insieme ai bambini in che cosa vogliamo che siano uguali le parti. Possiamo fare un esempio con un foglio di carta formato A4 e chiedere agli alunni di dividere tale foglio a metà. Otterremo tre tipologie di piegatura: due secondo gli assi del rettangolo e una secondo la diagonale come:



Abbiamo chiesto allora: "*Tutte queste parti che avete ottenuto rappresentano la metà del foglio?*". Una bambina ha detto: "*Ma non sono uguali!*". Qui si può dire che due o più parti possono essere uguali per forma, per dimensioni, per numero, per peso, ecc… è importante quando si parla di uguale specificare bene cosa si intende con questo termine utilizzato spesso in modo non corretto. Per tale ragione anche l'uso di torte o pizze per rappresentare le frazioni non è il modo migliore, secondo noi, per introdurre questo concetto.

Il passaggio alle frazioni unitarie e a quelle complementari, attraverso l'osservazione del foglio piegato, è stato più immediato se prima erano state esaminate le frazioni con moneta, dado e caramelle.

Nella classe terza della primaria, classe in cui solitamente si introducono le frazioni siamo partiti con la piegatura di un foglio formato A4. Abbiamo prima diviso il foglio con una piega in due parti uguali e poi, con una seconda piega, in ulteriori due parti uguali. Quindi abbiamo riaperto il foglio e abbiamo osservato che le parti in cui era stato diviso erano 4. Abbiamo richiuso il foglio nella condizione in cui era dopo la seconda piega e lo abbiamo piegato di nuovo per due volte di seguito sempre in parti uguali. Riaprendo poi il foglio si è notato che ora le parti erano diventate 16.

Abbiamo quindi scritto alla lavagna la relazione esistente tra numero di pieghe e parti:
1 piega – 2 parti; 2 pieghe – 4 parti; 3 pieghe – 8 parti; 4 pieghe – 16 parti. Una bambina ha notato "*Raddoppiano sempre*".

Allora ho chiesto quante parti sarebbero venute fuori piegando per la quinta volta il foglio e la risposta è stata in coro "*32 parti*". Quindi era intuitivo che ogni volta le parti raddoppiassero. Qui si poteva introdurre il concetto di potenza, ma era troppo presto perché le incontreranno solo in quarta o in quinta. Però abbiamo fatto notare che prima era solo 2, poi 2 x 2, poi 2 x 2 x2 e sono andati avanti loro fino a 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 64.

Abbiamo quindi ripassato con il pennarello le pieghe che si vedevano riaprendo il foglio e abbiamo scritto le <u>frazioni unitarie</u> aggiungendo anche $\frac{1}{32}$, facendo una piega sola sul rettangolino di $\frac{1}{16}$.

Anche in questo caso abbiamo potuto osservare le frazioni equivalenti di $\frac{1}{2}$ e una bambina ha notato che "*il numero sopra e il numero sotto raddoppiavano sempre*" e quindi siamo arrivati alle frazioni equivalenti e anche alla proprietà invariantiva delle frazioni.

In un altro incontro siamo ritornati alle frazioni partendo da un *Tangram*, spiegando che il *tan* è il triangolo più piccolo. E' stato chiesto qual era secondo loro la parte rappresentata da tale triangolo. Dopo alcuni tentativi un po' sbagliati, ho suggerito di vedere quante volte il triangolo stava nel quadrato piccolo e nelle altre figure più grandi. Una bambina ha risposto che ci stava "*16 volte nel tangram*" e quindi che era $\frac{1}{16}$. Allora ho chiesto quante volte ci stavano le altre figure e varie mani si sono alzate per dire che il quadrato, il parallelogramma e il triangolo medio ci stavano 8 volte equindi erano $\frac{1}{8}$ e, di conseguenza, i due triangoli più grandi erano $\frac{1}{4}$.

Ho chiesto "*proviamo a sommare queste parti perché insieme devono fare un intero cioè 1*". Sono rimasti un po' perplessi, ma abbiamo scritto alla lavagna tutte le frazioni del *tangram* sommate tra di loro.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=$$

Ho fatto notare, utilizzando le varie parti ottenute col foglio piegato precedentemente, che si riescono a sommare tra loro solo le frazioni che hanno il denominatore uguale e quindi $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$ poi $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ e $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{2}{16}$ perciò la somma ora era $\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{2}{16}=1$. Abbiamo notato che i denominatori 4 e 8 potevano diventare 16 con le frazioni equivalenti viste la volta precedente, mentre i numeri più grandi in questo caso non potevano diventare come quelli più piccoli. Per tale motivo abbiamo scritto sotto $\frac{2}{4}\left(\frac{8}{16}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{6}{16}\right)+\frac{2}{16}=\frac{16}{16}$ che è l'intero e quindi 1.

Per continuare a parlare di somme di frazioni abbiamo utilizzato una tabella costruita insieme ai ragazzi della prima secondaria di I grado con word e suddivisa prima in 2 poi in 3 in 4 ecc fino a 20 parti e abbiamo scritto e colorato le varie unità frazionarie in modo da evidenziare anche le parti equivalenti (fig.1).

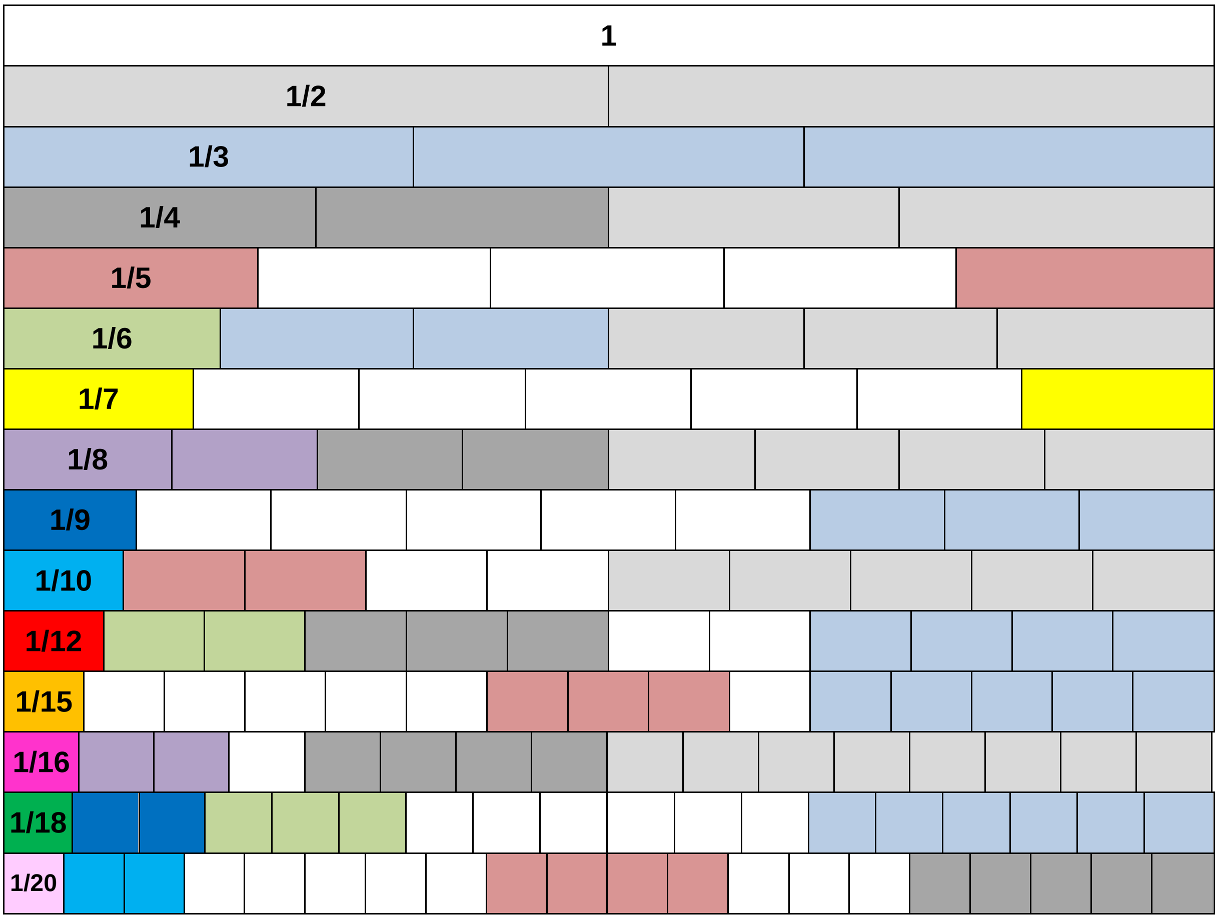


Fig. 1 – Tabella delle frazioni

In questo modo si evidenziano che frazioni come $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ si trovavano anche nella riga di $\frac{1}{6}$ e che quindi si vede che la loro somma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ lo troviamo nella riga del 12 e quindi si nota ancora che la loro somma $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ e cosi via. Nella classe quinta della scuola primaria abbiamo ripassato le frazioni che gli alunni avevano già incontrato a partire dalla classe terza: siamo partiti in questo caso con la piegatura di un foglio formato A4, suddividendolo prima a metà (alcuni alunni hanno piegato il foglio secondo l'asse più lungo e altri secondo quello più corto) poi in 4 parti. Poi abbiamo piegato nuovamente il foglio come avevamo già fatto con gli alunni della terza classe fino ad arrivare alla suddivisione in 16 parti.

Anche qui ho scritto alla lavagna la relazione esistente tra il numero di pieghe effettuate e le parti ottenute.

Ho poi chiesto ai bambini se osservavano qualche particolarità per quei numeri e due alunne hanno subito notato che erano "*potenze*". Io ho chiesto "*quali potenze?*" E una ha risposto "*di 2*" e quindi "$2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ *e* $2^4 = 16$". Ho chiesto allora se si poteva intuire quale fosse il numero successivo. Un alunno ha prontamente risposto "*32 perché è* 2^5 *e poi dopo c'è* 2^6 *che è 64 e così via*".

Abbiamo segnato con pennarelli di vario colore le varie pieghe che si erano formate e abbiamo scritto nei riquadri formati le varie frazioni unitarie.

Si sono potute poi osservare, come fatto precedentemente, le varie frazioni equivalenti.

Ho fatto notare che queste frazioni insieme dovevano dare l'intero, cioè il foglio A4 che avevamo piegato. Visto che qualcuno sembrava un po' scettico, lo abbiamo verificato attraverso la somma delle singole parti:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{2}{32}=1.$$

Osservando le varie parti ottenute piegano il foglio si evidenzia che le somme si possono fare solo se le frazioni hanno denominatori uguali. Perciò i denominatori più piccoli dovevano diventare come quelli maggiori attraverso il procedimento delle frazioni equivalenti già visto prima. Quindi il denominatore che tutte dovevano avere era 32.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{16}{32}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{8}{32}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{4}{32}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{2}{32}\right)+\frac{2}{32}=\frac{32}{32}=1$$

Anche in questa classe come già in terza, abbiamo poi fatto l'attività partendo dal tangram, che gli alunni avevano già incontrato con le loro docenti.

Questo secondo incontro è stato interamente dedicato a "**giocare a scopa con le frazioni"**. Abbiamo utilizzato il mazzo di carte particolare con la faccia delle figure e dei numeri sostituite da frazioni con denominatori 3, 4, 5 e 6. I numeratori sono invece tali da non formare frazioni che diventano numeri interi (quindi non $\frac{3}{3}, \frac{8}{4} o \frac{8}{2}$).

Il gioco inizia con la scelta di chi deve dare le carte: tale ruolo spetta a chi sceglie la carta più alta (si ripassa quindi il confronto tra le frazioni). Si parte poi dando 3 carte ai giocatori e mettendo 4 carte in tavola (come a scopa): si possono prendere dal tavolo solo le frazioni che con la propria carta diano numeri interi. Ad esempio: $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{4}{2}$ equivale a 2 punti $\frac{2}{3}+\frac{7}{3}=\frac{9}{3}$ equivale a 3 punti e così via (qui, oltre alle somme di frazioni con denominatori uguali, si ripassano i multipli e i divisori).

I punti ottenuti vanno segnati volta per volta. Se prendendo una carta dal tavolo non ne rimangono altre si raddoppia il punteggio per la scopa e si somma a quello già raggiunto.

Al termine l'ultimo che effettua l'ultima presa, prende anche le altre carte sul tavolo e, per calcolare quanto vale il punteggio di tali carte, si deve fare la loro somma (in questo caso la somma è tra frazioni con denominatori diversi e quindi abbiamo ricordato il procedimento seguito nell'incontro precedente).

Ai bambini è piaciuto molto questo gioco che esprime al meglio il concetto di divertirsi con la matematica.

Nella prima classe della scuola secondaria di I grado abbiamo introdotto le frazioni nello stesso modo della primaria, cioè attraverso la piegatura di un foglio di formato A4, ma anche di un foglio quadrato, e con il *tangram*.

Dopo aver in questo modo ripreso alcuni aspetti che gli studenti avevano affrontato nella scuola primaria, abbiamo cercato di realizzare una tabella che riassumesse in forma grafica alcuni concetti visti, come le frazioni equivalenti, la somma di frazioni, anche con l'intento di realizzare uno strumento da presentare agli studenti della scuola primaria. I ragazzi hanno così creato una tabella (quella mostrata nella quinta primaria) utilizzando un programma di scrittura e lasciando la prima riga della tabella intera, la seconda divisa in 2, la terza divisa in 3 e così via fino all'ultima divisa in 20. La tabella del programma di scrittura tramite la possibilità di dividere ogni riga in un numero stabilito di colonne ha permesso di realizzare delle strisce con le frazioni che interessavano.

I ragazzi hanno evidenziato frazioni con i colori utilizzando lo stesso per le frazioni equivalenti, in modo da ottenere un impatto visivo immediato.

Con le colorazioni diverse scelte è possibile soffermarsi anche su alcune somme tra frazioni come ad esempio $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ che troviamo nella riga di $\frac{1}{6}$ o $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$, ecc. Inoltre, "scendendo" lungo la tabella, si notano alcune regolarità.

Nelle lezioni successive abbiamo realizzato dei piccoli cartelloni in formati A3, lavorando a piccoli gruppi. Tali cartelloni sono stati poi assemblati in un unico cartellone grande che è stato presentato dai ragazzi della prima secondaria di I grado agli alunni delle classi quinte della scuola Primaria.

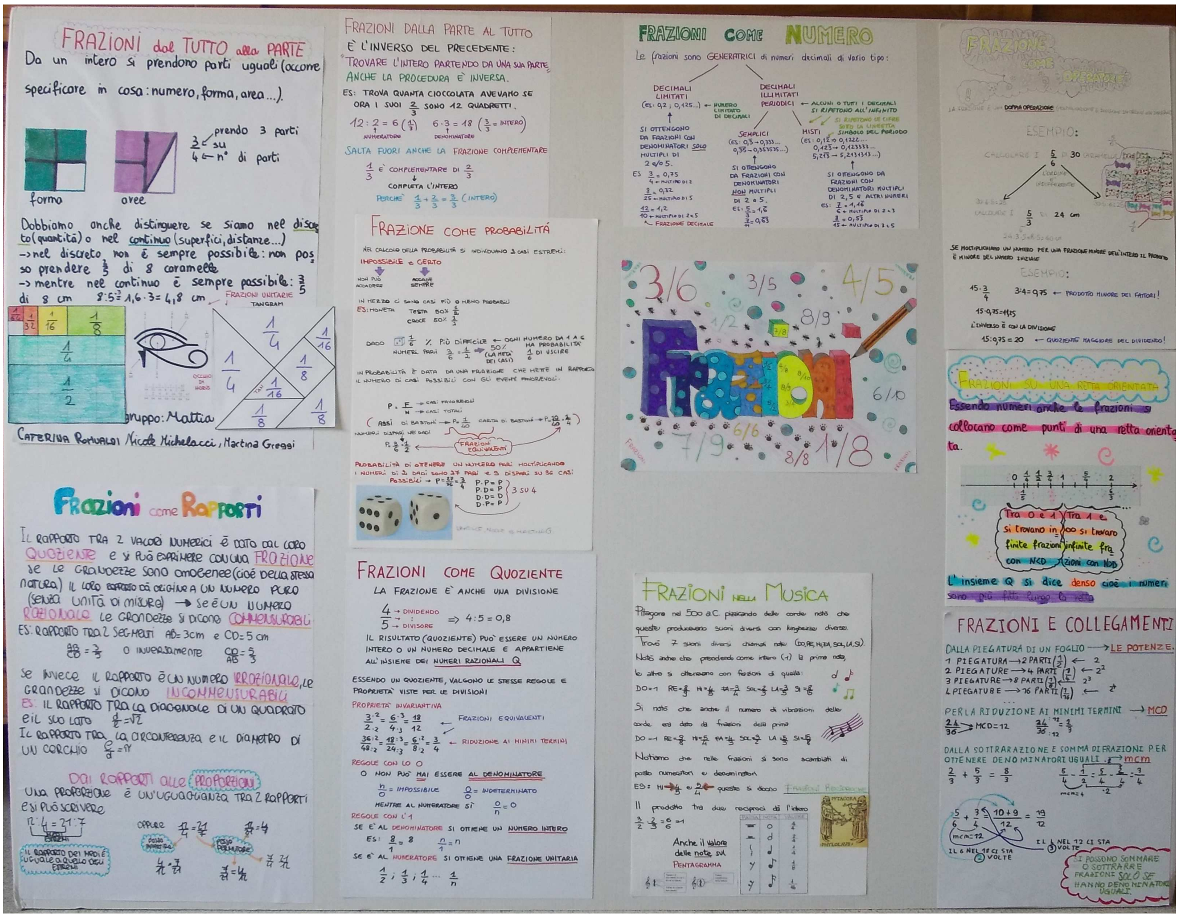


Fig. 2 – Cartellone realizzato dai ragazzi delle classi 1ª e 2ª della Secondaria di I grado.

I cartelloni realizzati sono stati: frazioni dal tutto alla parte, dalla parte al tutto, come quoziente, come operatore, come numero, come punti su una retta orientata, come collegamenti, come probabilità e frazioni e musica (fig.2).

La parte relativa alle frazioni come rapporto, è stata aggiunta dai ragazzi della classe seconda che in quel periodo stavano svolgendo le attività sulle proporzioni. Questa non è stata illustrata ai bambini di quinta primaria, ma è stata aggiunta al cartellone che ci accompagnerà anche nella classe seconda.

Anche in questa classe abbiamo poi giocato a scopa con le frazioni con le stesse modalità elencate per la quinta primaria.

Nella seconda classe delle “medie” siamo passati alle frazioni come rapporti e quindi alle proporzioni. Abbiamo ripassato le frazioni come rapporto tra due numeri e quindi anche il concetto di grandezze commensurabili e non commensurabili.

Siamo passati alle proporzioni come uguaglianza tra due rapporti e quindi tra due frazioni, siamo quindi ritornati alle frazioni equivalenti già note ai ragazzi.

Abbiamo affrontato le varie proprietà delle proporzioni partendo da quella fondamentale per poi arrivare alle altre.

Successivamente abbiamo considerato alcuni problemi risolvibili con le proporzioni in vari campi e notato quanto le proporzioni e la proporzionalità intervengano in tanti processi in ambito chimico, fisico e anche sociale. La ricerca delle varie relazioni tra le proporzioni, la conseguente estensione dell’ambito matematico ad altri ambiti scientifici (chimica, fisica, tecnologia) e sociali (ricette alimentari, sconti, ecc…) ha portato alla realizzazione di una mappa concettuale che è stata rappresentata su un cartellone (vedi Fig.3), realizzato in collaborazione con l’insegnante di Tecnologia e nelle ore di Scienze durante tutto il secondo quadrimestre. Questo ci ha consentito di realizzare numerosi collegamenti, anche con concetti come quello di rapporto aureo o con il teorema di Talete, solitamente non affrontati in questo segmento di scuola, ma che, a nostro avviso, se affrontati insieme a similitudine e proporzioni, sono più facilmente comprensibili dagli studenti già a partire dal secondo quadrimestre della seconda “media”.

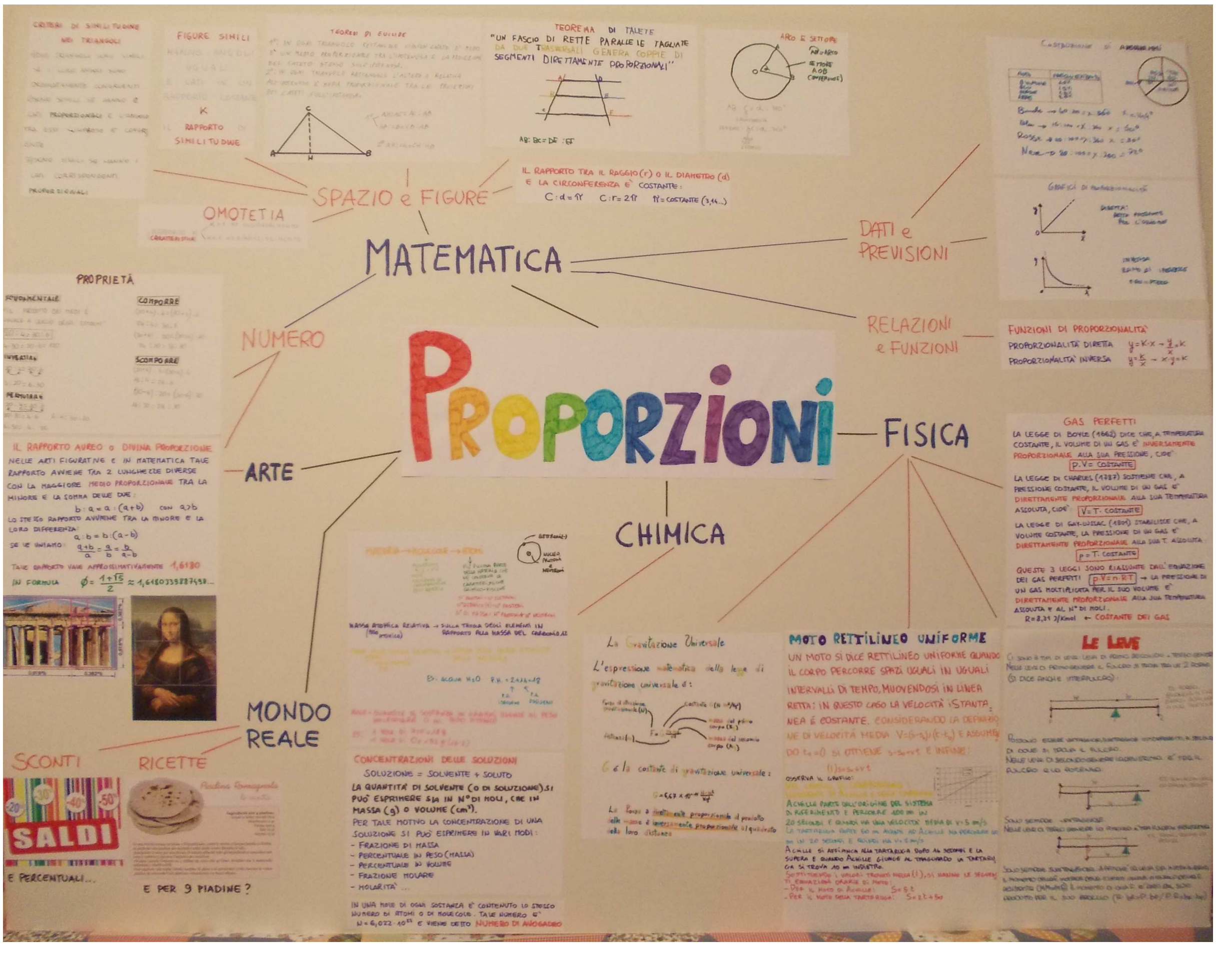


Fig. 3 – Cartellone realizzato dai ragazzi della classe 2ª della Secondaria di primo grado.

Nella scuola secondaria di secondo grado, in una quinta ginnasio del liceo classico e in una seconda di scienze umane, abbiamo affrontato il problema del passaggio dalle frazioni conosciute alle frazioni algebriche, osservando in particolare le analogie esistenti.

Abbiamo innanzitutto introdotto le frazioni algebriche come estensione di quelle numeriche.

La semplificazione delle frazioni e l'applicazione della proprietà invariantiva per ridurle ai minimi termini ci ha portato a confrontare le frazioni algebriche con quelle numeriche. Per quanto riguarda le frazioni algebriche vi è la complicazione di dover fattorizzare e semplificare polinomi anziché numeri. Abbiamo realizzato quindi una tabella (tab.1) di confronto per visualizzare meglio le analogie.

Tab. 1 – Confronto tra frazioni numeriche e algebriche.

	Frazioni Numeriche	Frazioni Algebriche
Frazioni di partenza	$\frac{25}{10}$	$\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$
Fattorizzazione	$\frac{5^2}{2\cdot 5}$	$\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}$
Semplificazione	$\frac{5}{2}$	$\frac{x-1}{x+1}$

Naturalmente nella semplificazione va detto che x – 1 deve essere diverso da 0 per non annullare il denominatore e che quindi si deve porre $x \neq 1$.

Si arriva così attraverso ragionamento e analogie alla definizione di frazione algebrica e alla definizione del campo di esistenza considerando il fatto che il denominatore di una frazione non può essere 0.

Successivamente abbiamo introdotto l'addizione e la sottrazione di frazioni algebriche ancora come estensione di tali operazioni con le frazioni numeriche.

Si ripete così come si ottiene il denominatore comune e come si comporta il numeratore una volta trovato il minimo comune multiplo fra i denominatori di due frazioni da sommare algebricamente dopo aver provveduto a fattorizzare i denominatori. Si osserva, in questo modo, che il procedimento è del tutto analogo, ma adesso con dei polinomi.

Si procede con l'introduzione di moltiplicazione, divisione e potenza sempre seguendo un parallelismo con le frazioni numeriche.

Si conclude passando alla risoluzione di espressioni contenenti frazioni algebriche, ancora nuovamente come estensione delle espressioni con le frazioni viste alle affrontate nelle scuole "medie".

Le trasformazioni geometriche

Il secondo nodo concettuale che abbiamo affrontato in verticale è stato quello delle trasformazioni geometriche, anche in questo caso partendo dalla scuola dell'infanzia.

Innanzitutto abbiamo introdotto la geometria: come "misurazione della terra", poi, verificato che i bambini conoscevano alcune forme acquisite come blocchi logici, siamo passati al riconoscimento di alcune figure geometriche standard, mostrate anche in posizioni non "convenzionali".

Siamo poi passati allo spostamento di tali figure, ma anche di oggetti e di persone (insegnanti e alunni) su un piano, rappresentato da una scacchiera realizzata con delle strisce adesive sul pavimento. Abbiamo chiesto ai bambini se le figure, spostandole, si modificavano. Hanno risposto tutti "*no*". Abbiamo colto l'occasione per precisare che lo spostamento di figure su un piano che non ne provochi una modifica viene definita traslazione. Abbiamo poi fatto spostare sulla scacchiera le varie figure fornendo dei comandi semplici.

Poi siamo passati alle simmetrie e in particolare alla simmetria assiale: attraverso un asse che divideva a metà la scacchiera sul pavimento, abbiamo posizionato prima dei poligoni e poi alcuni alunni in modo simmetrico rispetto a tale asse. Per mostrare cosa accadeva abbiamo anche simulato con una scenetta una persona davanti allo specchio per mostrare che le figure, come anche le persone, con la simmetria assiale cambiano: si visualizza bene ruotando i due alunni che hanno simulato lo specchio. Si dimostra così che per riportare le figure alla situazione iniziale occorre sollevarle dal piano e ruotarle.

Abbiamo poi fatto il gioco del *Twister* simmetrico: i bambini dovevano riprodurre simmetricamente quanto fatto dai compagni dall'altra parte dell'asse.

Nell'incontro successivo abbiamo ricercato insieme ai bambini la simmetria assiale nei poligoni, nelle lettere e nei numeri: utilizzando figure, lettere e numeri ritagliati su carta è stato chiesto ai bambini di fare delle pieghe in modo da dividere gli oggetti in modo uguale (sovrapponibile).

Nella classe prima della scuola primaria abbiamo effettuato le stesse attività della scuola dell'infanzia con l'aggiunta della ricerca di simmetrie assiali, oltre che nelle lettere e nei numeri anche in natura, come nella forma della farfalla. I bambini hanno poi realizzato delle forme con i colori a tempera e poi piegando il foglio realizzato i simmetrici per impronta-stampa.

Anche nella classe seconda della scuola primaria abbiamo ripetuto le cose precedenti viste per traslazione e simmetria centrale, ma abbiamo introdotto anche la particolarità del triangolo rettangolo, che rende più visibile il cambiamento della figura rispetto ai poligoni regolari che i bambini utilizzavano come blocchi.

Abbiamo mostrato che i due triangoli rettangoli ottenuti suddividendo un foglio A4 in due parti lungo la diagonale, anche se hanno i lati uguali, non sono sovrapponibili. Abbiamo allora chiesto ai bambini cosa bisognava fare per rendere uguali e sovrapponibili i due triangoli. Un bambino ha detto "*uno lo devi girare*").
Abbiamo quindi fatto osservare che la natura di una figura è indipendente dalla posizione: "Andrea, se lo giro o se si alza o si siede, rimane sempre Andrea". Abbiamo quindi mostrato la stessa figura vista da diverse angolazioni e poi abbiamo ripetuto lo stesso esperimento con un alunno. In questo caso il quadrato in posizione non convenzionale non viene subito riconosciuto. Allora abbiamo suggerito: "*se ci incliniamo possiamo vedere che si tratta sempre della stessa figura*" e i bambini, vedendo, hanno creduto.

Piegando poi un foglio A4 a metà secondo i due assi, in successione, abbiamo fatto notare che le due linee si incontrano in un punto. Passando poi al foglio quadrato abbiamo notato che questo si può piegare in quattro modi diversi, ma che tutte le linee formate si incontrano in un punto. Un'alunna dice "*nel centro*" e quindi abbiamo trovato il centro di simmetria.

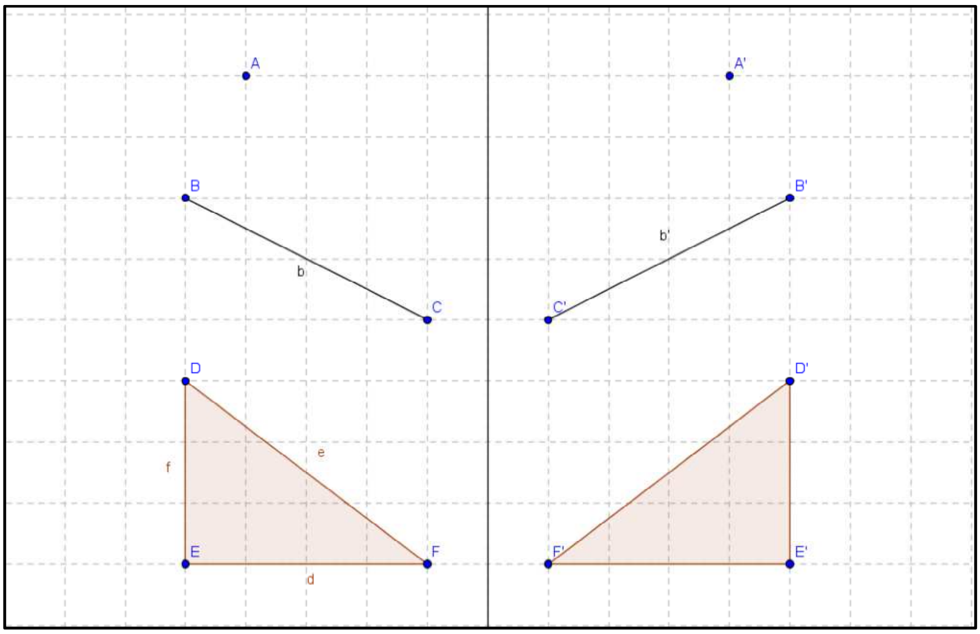


Fig. 4 – Simmetrie assiali

Esistono numeri e lettere con centro di simmetria? Subito viene individuato lo zero 0 tra i numeri e la O tra le lettere. Posizionando i fogli con le lettere alla finestra e osservandole in controluce abbiamo visto che alcune lettere come A, H, I, M, O, T, U, V, X e Y non cambiavano e che I, H, O e X non cambiavano nemmeno se venivano ribaltate. Abbiamo chiesto: "*E questo cosa significa?*" Una bambina ha risposto: "*Che le seconde hanno due assi e anche un centro*". Brava!

Poi siamo passati alle quarte della scuola primaria e qui le trasformazioni le abbiamo osservate in laboratorio con il software GeoGebra.

I bambini non avevano mai utilizzato il software, quindi abbiamo inizialmente introdotto GeoGebra e i suoi comandi per rappresentare punti, segmenti e poligoni.

Sì è poi proseguito richiamando le trasformazioni geometriche, che gli alunni avevano già affrontato con le loro insegnanti nei mesi precedenti, e abbiamo provato a realizzare, in particolare, quelle relative alle simmetrie, assiale e centrale, con l'uso del software.

Siamo partiti con la simmetria assiale: abbiamo potuto osservare, in particolare con il triangolo rettangolo che la simmetria assiale non lascia inalterata la figura, ma la modifica. Un bambino ha notato che "una va in senso orario e l'altra in senso antiorario". Abbiamo richiamato l'analogia con la nostra immagine riflessa da uno specchio.

Abbiamo quindi ricordato che la simmetria assiale è l'unica trasformazione isometrica che si facendo uscire la figura dal piano per effettuare un ribaltamento.

Abbiamo poi provato a vedere cosa succedeva con la simmetria centrale.

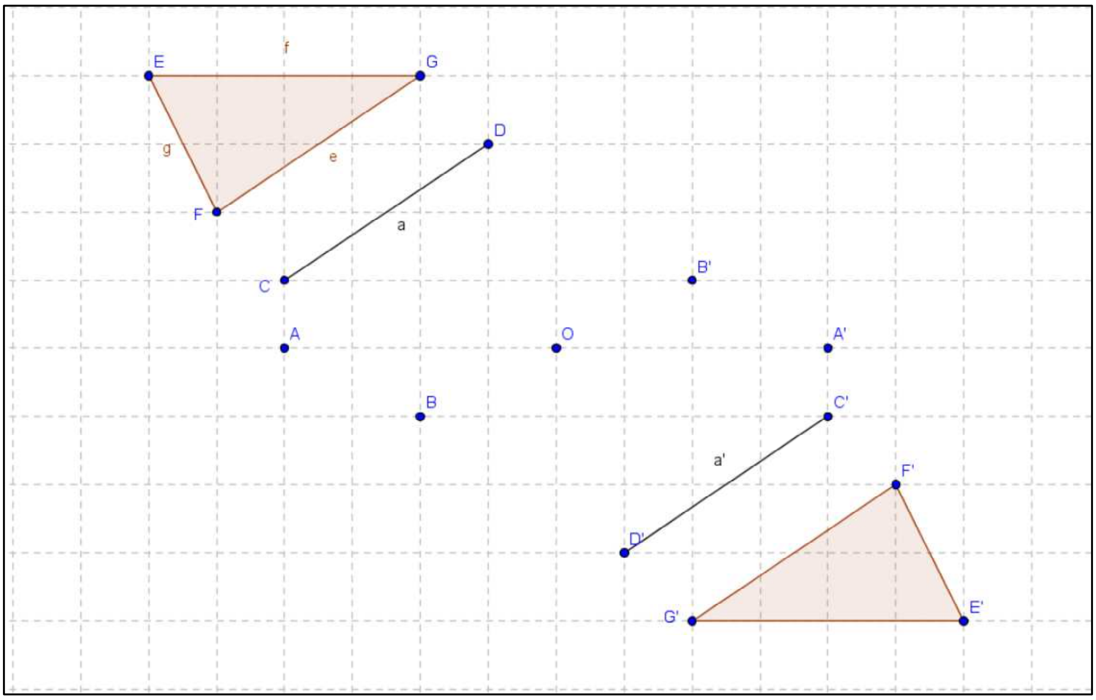


Fig. 5 – Simmetrie centrali

In questo caso abbiamo potuto osservare che, a differenza di quello precedente,le figure rimanevano uguali e sovrapponibili.

Nel successivo incontro abbiamo ripreso a utilizzare GeoGebra (vedi Fig.5), che nel frattempo qualche alunno aveva già scaricato e usato a casa, e anche le insegnanti avevano ripreso in classe nei giorni successivi al primo incontro.

Abbiamo quindi provato ad osservare che cosa succedeva con la traslazione. Gli alunni avevano già avuto esperienza con questa trasformazione nei giorni precedenti e ricordavano che per questa trasformazione era necessario introdurre un vettore. Abbiamo perciò richiamato le caratteristiche del vettore e, in particolare, quelle del modulo, del verso e della direzione.

Si è proseguito quindi con l'introduzione dei comandi di GeoGebra per realizzare la traslazione. Prima il comando per definire il vettore e poi quello per effettuare la traslazione.

Abbiamo provato a utilizzare tre vettori che differivano per direzione e verso; questo ci ha permesso di osservare che anche, come già verificato per la simmetria centrale, le figure traslate non venivano modificate da questa trasformazione (vedi Fig.6).

L'attività, svolta interamente nell'aula di informatica, ci ha permesso di introdurre l'uso del software di geometria dinamica fin da questa classe della primaria, questo contribuendo al raggiungimento del traguardo di competenze europee legato alle competenze digitali.

Ci ha inoltre permesso di visualizzare alcuni concetti, come quello delle trasformazioni geometriche, in una veste diversa dalla solita utilizzata per la scuola primaria, basata in genere sul lavoro nel quaderno, avendo anche la possibilità di modificare dinamicamente la posizione di punti e poligoni e di osservare che conseguentemente si muovevano gli elementi a loro legati dalle relazioni impostate.

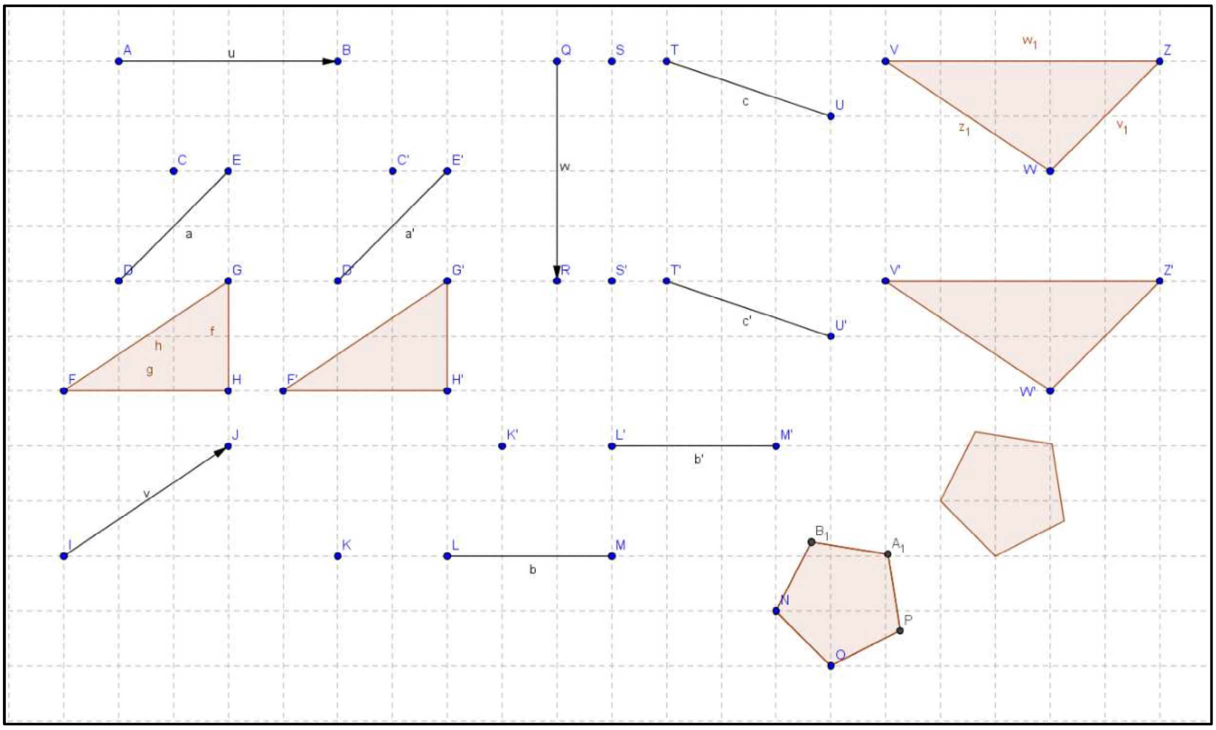


Fig. 6 – Traslazioni

Siamo poi passati agli alunni della classe seconda della secondaria di primo grado.

Abbiamo introdotto le trasformazioni geometriche iniziando da quelle isometriche, che hanno la proprietà di lasciare inalterate le misure degli oggetti.
Abbiamo utilizzato il piano cartesiano e spostato su di esso, con l'aiuto di GeoGebra, punti, segmenti e poligoni, le stesse operazioni venivano effettuate dagli alunni anche sul quaderno. Abbiamo simulato anche sulla cattedra e sul pavimento lo spostamento di oggetti, come astucci, penne e zaini. Abbiamo chiesto di osservare se dopo lo spostamento le figure avessero subito qualche modifica. La risposta è stata univoca: "*No*". Abbiamo quindi informato gli studenti che questa trasformazione in geometria si chiama traslazione e che viene realizzata secondo un vettore, già conosciuto in fisica e in tecnologia per la rappresentazione delle forze, ricordando che è composto da quattro elementi: il punto di applicazione (che coincide con il punto in cui si trova l'oggetto da spostare), la direzione (rappresentata dalla retta lungo la quale si muove l'oggetto) il verso (indicato dalla punta della freccia) e il modulo (rappresentato dalla lunghezza della freccia, indica la misura dello spostamento).

Abbiamo quindi affrontato le simmetrie: prima quella assiale, poi quella centrale.

L'attività è stata svolta sul quaderno utilizzando come assi di simmetria quelli del piano cartesiano. Ad esempio abbiamo spostato le figure dal primo quadrante al secondo assumendo l'asse *y* come asse di simmetria.

Abbiamo osservato come cambiavano le coordinate dei punti dopo questa operazione. I ragazzi hanno subito notato che cambia solo il segno della coordinata relativa all'asse di simmetria.

Spostando simmetricamente un rettangolo, un quadrato o altri poligoni regolari non si notano cambiamenti nelle figure. Applicando le stesse trasformazioni al triangolo rettangolo si nota che il suo simmetrico non è sovrapponibile. "*È come uno specchio*" osserva una ragazza, "*È come se fosse ribaltato*" aggiunge un ragazzo. "*Avete ragione entrambi. In questo caso diventa evidente che, con questo tipo di simmetria, gli oggetti cambiano. Escono dal piano e, come hai detto tu, si ribaltano*".

"*Accadrà la stessa cosa anche con la simmetria centrale*, *nella quale il riferimento è dato da un punto?*" Tale punto viene chiamato centro di simmetria.

Abbiamo provato prima sul quaderno e poi utilizzato la griglia di GeoGebra, escludendo questa volta gli assi cartesiani. Dopo aver applicato la trasformazione a punti e segmenti siamo passati ai poligoni, partendo però questa volta proprio dal triangolo rettangolo. Gli studenti hanno subito notato che "*questa volta la figura non cambia*" e si comporta "come *se ruotasse*". Quindi ho chiesto "*allora in questo caso esce dal piano?*". La risposta è stata immediata: "*No*".

"*E riguardo all'asse cartesiano come cambiano le coordinate?*". Hanno subito risposto "*Cambiamo segno tutte e due*".

Siamo poi passati alla ricerca di assi e centri di simmetria nei poligoni conosciuti. Ne abbiamo analizzati alcuni in classe utilizzando fogli di carta, poi siamo andati in laboratorio per lavorare con GeoGebra. I ragazzi hanno realizzato le varie figure, triangoli, quadrilateri, alcuni poligoni regolari, arrivando fino al cerchio.

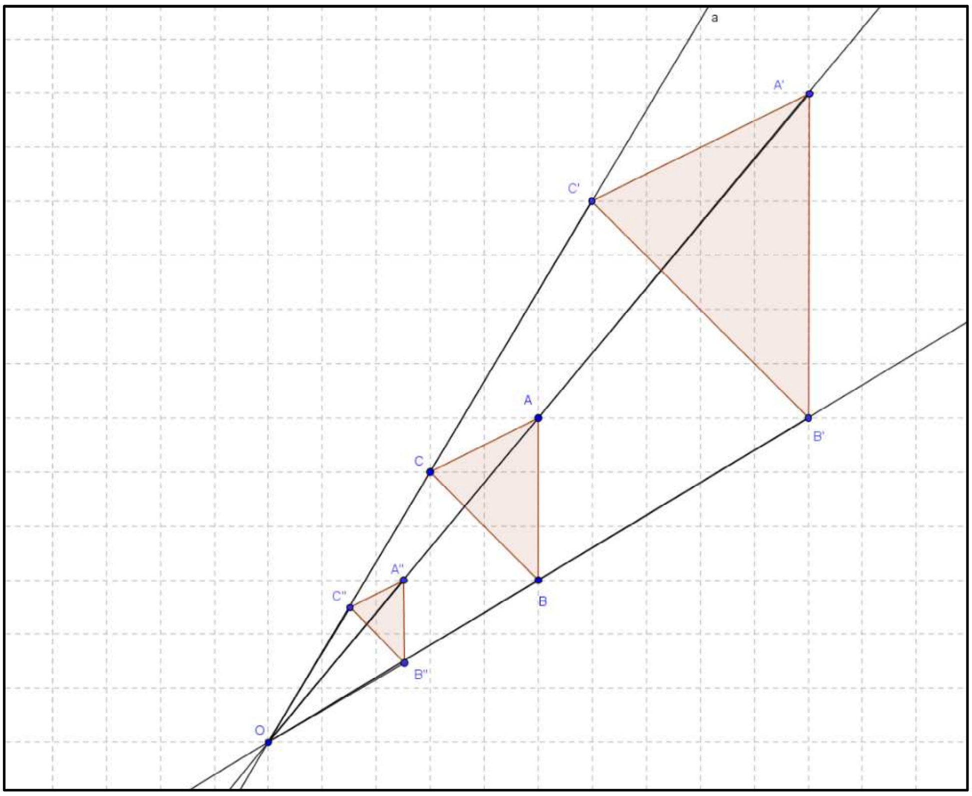


Fig. 7 – Omotetia diretta

È stato poi chiesto ai ragazzi di trovare immagini (in natura, in oggetti o in monumenti, ecc…) che presentassero traslazioni, o simmetrie assiali o centrali.

Siamo poi passati alle trasformazioni non isometriche, cioè quelle che lasciano inalterate solo le misure degli angoli, abbiamo parlato dell'omotetia diretta e inversa. Anche in questo caso è stato utile avvalersi del programma GeoGebra. Con questa trasformazione si spostano le figure, ma queste possono aumentare di dimensione oppure ridursi. "*Come con le fotocopie*" ha suggerito una ragazza.

"*Anche in questo caso abbiamo un punto di riferimento che si chiama centro di omotetia. Si ottiene l'effetto del proiettore del cinema o della nostra LIM. L'immagine inizialmente è piccola e poi diventa sempre più grande man mano che ci allontaniamo*".

I ragazzi hanno osservato che le distanze dei punti della figura iniziale dal centro di omotetia e quelli dei punti della trasformata, messe in rapporto, danno un valore costante, detto costante o rapporto di omotetia, oppure caratteristica e viene indicato con *k*. Il numeratore di tale rapporto è costituito dalla distanza dal centro di un punto della figura trasformata, il denominatore dalla distanza dal centro del punto corrispondente nella figura di partenza. Abbiamo indicato con le lettere A, B e C i vertici di un triangolo e con A', B' e C' quelli del triangolo trasformato con omotetia in base al centro di omotetia O (vedi Fig.7).

Abbiamo osservato che per ogni coppia di vertici, il rapporto della distanza dal centro di omotetia ha la seguente proprietà:

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{2}{1}$$

si può notare che, nel rapporto della prima trasformazione da ABC in A'B'C', il numeratore è maggiore del denominatore e che la figura è ingrandita.

Per il triangolo A''B''C'' i rapporti sono $\frac{OA''}{OA}=\frac{OB''}{OB}=\frac{OC''}{OC}=\frac{1}{2}$.

In questo caso N < D e la figura è ridotta.

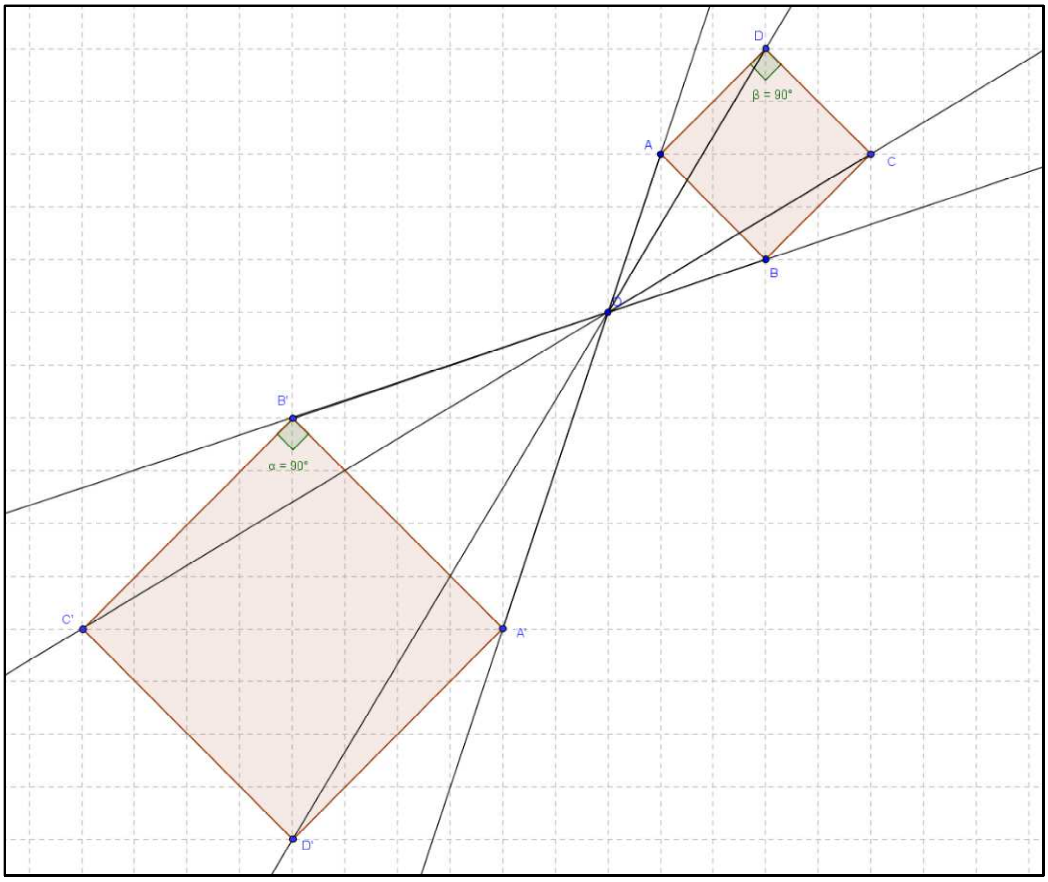


Fig. 8 – Omotetia inversa

Anche in questo caso pur trattandosi di un’omotetia inversa, cioè con spostamento dalla parte opposta rispetto al centro di omotetia, i rapporti risultano gli stessi del primo caso visto:

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{2}{1}$$

Quindi per valori di $k > 1$ (cioè se N > D) si ha un ingrandimento delle figura iniziale, mentre per $k < 1$ (cioè se N < D) si ha una riduzione della figura di partenza.

Abbiamo osservato, sempre con GeoGebra, che nelle omotetie le figure cambiano, ma rimangono uguali le ampiezze degli angoli (misurati con l’apposito comando) e eventuali parallelismi tra i lati delle figure, come abbiamo potuto notare con quadrato e rettangolo (vedi Fig.8).

In pratica le figure non sono più isometriche, ma diventano simili.

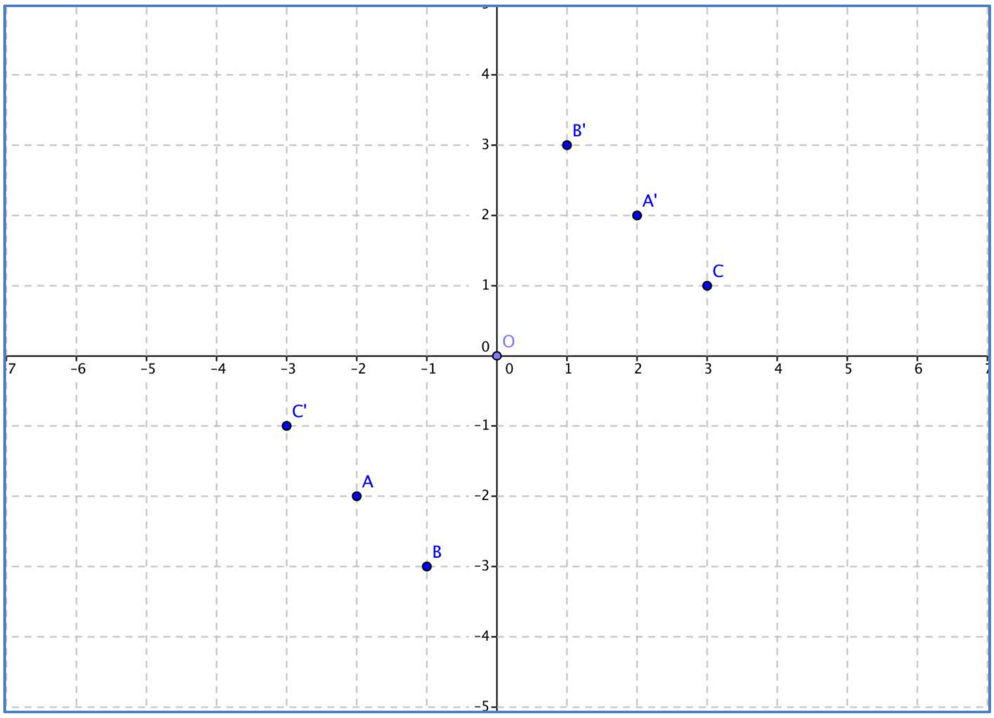


Fig. 9 – Simmetria centrale di punti sul piano cartesiano.

L’omotetia offre quindi lo spunto per parlare di similitudine, per riprendere in mano le frazioni e per addentrarsi nel mondo dei rapporti e delle proporzioni.

Inoltre porterà ad affrontare, in geometria, altri tre teoremi dopo quello di Pitagora: i due teoremi di Euclide e il teorema di Talete.

In una quinta ginnasio del liceo classico e in una seconda di scienze umane abbiamo affrontato la simmetria centrale: nella prima lezione abbiamo introdotto il concetto di simmetrico dei punti A, B, C rispetto all’origine O prima sul foglio di carta e poi con GeoGebra (vedi Fig.9).

Abbiamo chiesto ai ragazzi cosa potevano osservare relativamente alle coordinate dei tre punti e dei loro simmetrici.

I ragazzi hanno osservato che:

1 – le coordinate di A’, B’, C’ sono quelle di A, B, C cambiate di segno (vedi Fig. 10)

2 – i punti medi dei segmenti AA’, BB’, CC’ coincidono tutti con O.

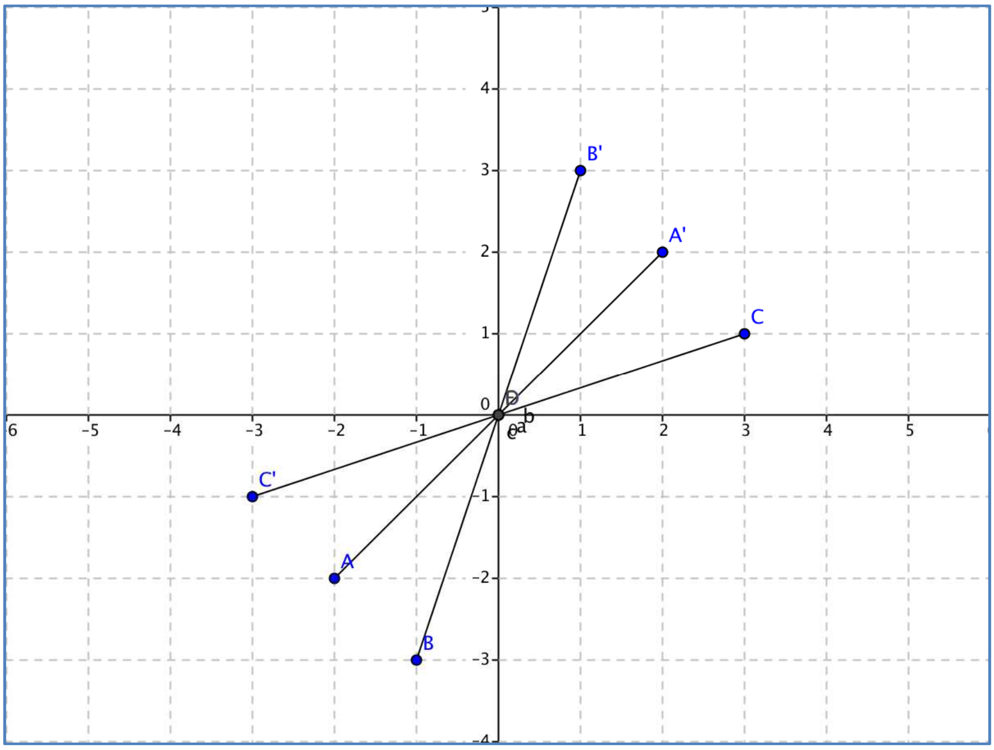


Fig. 10 – Simmetria centrale di segmenti sul piano cartesiano.

Abbiamo quindi potuto dedurre che:
le equazioni della simmetria di centro O sono:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

pervenendo poi alla definizione generale di simmetria rispetto all'origine.

Il passo successivo è stato quello di estendere a un qualunque punto P del piano quanto già appreso in questa prima lezione in modo da pervenire alla definizione generale di simmetria (sviluppata poi nella seconda lezione).

Nelle lezioni seguenti si sono poi sviluppate tutte le trasformazioni nel piano cartesiano utilizzando lo stesso metodo intuitivo.

La probabilità

Un altro tema affrontato nella scuola dell'infanzia è stato quello di probabilità, termine per loro ancora non troppo chiaro.

Siamo partiti dal concetto di impossibile chiedendo ai bambini di fare degli esempi su cosa intendessero per impossibile. Gli esempi proposti dai bambini non rappresentavano eventi impossibili, ma solo poco probabili, quindi ci siamo soffermati sulla differenza tra questi due termini.

Abbiamo visualizzato in modo concreto dei casi impossibili, certi e probabili attraverso un sacchetto con 10 caramelle inizialmente tutte nere, procedendo poi con la sostituzione di alcune caramelle nere con altrettante verdi. La richiesta iniziale è stata, quando il sacchetto conteneva solo caramelle nere: "*È possibile estrarre una caramella verde?*". I bambini hanno detto subito di no. Poi togliendo un a caramella nera dal sacchetto e sostituendola con una verde abbiamo riproposto la stessa domanda e una bambina ha detto "*è difficile*", mentre un bambino ha detto "*è poco probabile*".

Successivamente i bambini hanno effettuato estrazioni di una caramella in da un sacchetto contenente caramelle nere e verdi in varie situazioni: prima 8 nere e 2 verdi, poi 7 nere e 3 verdi, fino ad arrivare ad una stessa quantità dei due tipi. I bambini hanno così scoperto il concetto di probabilità variabile (meno probabile e più probabile). Quando siamo arrivati ad avere 5 caramelle nere e 5 verdi, una bambina ha detto “stessa probabilità”.

“*E se ne estraiamo due per volta?*” E' iniziata così la simulazione, con estrazione contemporanea di 2 caramelle per bambino, nella situazione di parità di caramelle (5 nere e 5 verdi). I bambini rimangono stupiti quando vedono che nei loro sorteggi non vengono regolarmente estratte una caramella nera e una verde come indicherebbe la probabilità teorica e questo è già un buon traguardo per questo livello di scuola.

Anche nella prima classe della primaria abbiamo chiesto cosa intendessero per impossibile. Anche in questo caso il concetto di impossibile si confondeva con quello di poco probabile, abbiamo quindi riproposto la stessa attività sperimentata per l’infanzia col sacchetto di caramelle.

Siamo poi passati ad esaminare la probabilità legata al lancio di una moneta: “*Se lanciamo una moneta quanti sono i casi possibili?*”. Risposta “*testa e croce*”. “*Qual è la probabilità di ottenere testa? E di ottenere croce?*”. Un bambino risponde “*metà e metà*”.

Abbiamo notato che in classe c’era un dado di peluche, abbiamo quindi chiesto “*Se ora lanciamo questo dado a sei facce che probabilità abbiamo di ottenere 2?*”. Una bambina ha detto “*una su sei*”. Allora abbiamo chiesto, dal momento che avevamo già parlato di frazioni: “*Quindi come indichereste questa probabilità usando una frazione?*”. La bambina ha risposto “*uno su 6 è* $\frac{1}{6}$”.

“*E con la moneta: la probabilità che esca testa?*”. Subito ha risposto “$\frac{1}{2}$”.

Allora abbiamo chiesto ai bambini se conoscevano la differenza tra un numero pari e uno dispari. Visto che la metà dei bambini erano in grado di distinguere tra i numeri compresi tra 1 e 6 quali erano pari e quali erano dispari, abbiamo chiesto: “*Qual è la probabilità di ottenere un numero pari lanciando il dado?*”. La risposta è stata $\frac{3}{6}$ ma un bambino ha fatto notare che era la metà dei casi e quindi anche $\frac{1}{2}$; la discussione procede spontaneamente portando ad affrontare tanti concetti importanti per le frazioni.

Nella seconda primaria abbiamo proposto lo stesso percorso seguito per la prima, ma abbiamo aggiunto alcune domande relative al lancio di monete e di due dadi. “*Se lanciamo due monete insieme qual è la probabilità maggiore di accoppiata: Testa-Testa, Croce-Croce o Testa -Croce?*”. I bambini hanno risposto subito “*è uguale*”. Allora abbiamo rappresentato alla lavagna le varie possibilità, verificando che era più probabile ottenere testa e croce perché si presenta in “*2 casi su quattro*”.

Domanda: “*Se lanciamo due dadi insieme qual è la somma più probabile?*”. Qui i bambini hanno risposto un po’ a caso e diversi di loro si sono orientati verso la somma più alta 12. Abbiamo allora simulato alla lavagna tutte le possibilità e i bambini si sono subito accorti che il 2 e il 12 si comportavano nello stesso modo e potevano uscire solo in un caso: il 2 con 1 + 1 e il 12 con 6 + 6. Quindi i due fanciulli che avevano proposto il 12 come somma più probabile non hanno avuto conferma. Esaminando gli altri casi si nota che esistono due possibilità di ottenere 3 e 11 (1+2 e 2+1…), tre possibilità di ottenere 4 e 10 (1+3, 3+1 e 2+2….), quattro possibilità per 5 e 9 (6+3, 3+6, 4+5, 5+4…), cinque possibilità per 6 e 8 (1+5, 5+1, 4+2, 2+4, 3+3…). Si scopre infine che il “vincitore” è il 7 con sei possibilità: 6+1, 1+6, 5+2, 2+5, 4+3, 3+4. “*Viene fuori un triangolo*” ha notato una bambina.

Per finire abbiamo chiesto: “*Se moltiplichiamo le due cifre: è più probabile che il prodotto sia pari o dispari? Oppure la probabilità di ottenere un numero pari o dispari è la stessa?*” Anche in questo caso i bambini hanno risposto tutti “*uguale*”, ma poi suggerendo di pensare meglio una bambina ha detto “*E' maggiore la probabilità di ottenere un numero pari, perché con un numero pari ed uno* *dispari viene pari*". Abbiamo quindi simulato la situazione indicando con *p* il numero pari e con *d* il dispari: $p \, x \, p = p \quad p \, x \, d = p \quad d \, x \, d = d$.

Una bambina ha detto: "*Ma allora per avere dispari devono essere entrambi dispari quindi la probabilità 1 su 3*".

Nella terza primaria abbiamo ripetuto la stessa attività, concentrandoci maggiormente sugli aspetti legati alle frazioni.

Nella prima "media" abbiamo analizzato sperimentalmente i casi impossibili, certi e probabili attraverso il lancio di un dado.

Domanda: "*È possibile che lanciando un dado a 6 facce esca un 7?*"

Risposta di tutta la classe "*No*".

Domanda: "*È possibile che lanciando lo stesso dado io ottenga un numero compreso tra 1 e 6?*".

Tutti: "*Sì*".

Utilizzando situazioni reali è più facile formulare una risposta corretta.

Si può osservare anche che alcune situazioni sono meno probabili o più probabili di altre e ci siamo collegati alle frazioni per rappresentare le situazioni.

Sempre con il dado:

Domanda: "*Qual è secondo voi la probabilità di ottenere col lancio di un dado un numero stabilito, ad esempio 5?*".

Risposta: "*una su sei, perché sei sono i numeri possibili*".

Domanda: "*Quindi in frazioni?*".

Risposta: "$\frac{1}{6}$".

Domanda: "*E qual è la probabilità di ottenere un numero pari oppure dispari?*"

Risposta: "*Sono entrambe 3 su 6, cioè* $\frac{3}{6}$", un alunno ha notato: "che poi è $\frac{1}{2}$".

Abbiamo proposto un quesito di una prova INVALSI che ha ottenuto un numero rilevante di insuccessi:*: Tre amici devono stabilire chi di loro deve lavare i piatti. Decidono di fare testa o croce lanciando due monete. Mario lava i piatti se escono due teste, Antonio se escono due croci e Paolo se escono testa e croce. Avranno tutti la stessa probabilità di lavare i piatti? Motiva la tua risposta*". Qualcuno ha risposto "*Uguale*". Allora ho chiesto di ragionare e magari di provare a simulare la situazione su un foglio. Un alunno è stato rapido e ha risposto "*è più probabile che li lavi Paolo. È più facile ottenere testa e croce perché si presenta in due casi su quattro, cioè* $\frac{1}{2}$, *mentre due teste o due croci sono entrambe solo una su quattro cioè* $\frac{1}{4}$". Giusta la risposta e anche la motivazione.

Abbiamo rivolto le stesse domande sulle somme e i prodotti possibili lanciano due dadi come avevamo già visto alla primaria.

Nella seconda classe delle "medie" dopo aver ripassato i concetti di certo, impossibile e probabile, anche con esempi pratici come il lancio di dadi, abbiamo analizzato i casi di eventi compatibili e incompatibili.

Abbiamo chiesto "*Lanciando un dado, qual è la probabilità che escano un numero pari o un multiplo di 3?*". I ragazzi hanno subito notato che tra i numeri pari c'è il 6 che è anche multiplo di 3 e quindi i due casi erano compatibili. Per cui la probabilità diventava:

$$\frac{3}{6}(pari)+\frac{2}{6}(multipli)-\frac{1}{6}(compatibile)=\frac{4}{6}.$$

Abbiamo proposto una prova analoga utilizzando carte da briscola (40 carte). La domanda qui è stata: "*Qual è la probabilità di estrarre a caso una carta di denari o un re?*". Anche in questo caso c'è una compatibilità perché uno dei 4 re del mazzo è anche di denari.

Quindi si ottiene:

$$\frac{10}{40}(denari)+\frac{4}{40}(re)-\frac{1}{40}(compatibile)=\frac{13}{40}.$$

Nella classe terza della secondaria di primo grado abbiamo richiamato i casi visti nelle classi precedenti e abbiamo aggiunto alcuni esempi di probabilità composta.

Abbiamo chiesto: "*qual è la probabilità, lanciando due dadi, di ottenere due 5?*". Dopo alcuni calcoli e ragionamenti uno studente ha risposto "$\frac{1}{36}$". Abbiamo controllato il suo procedimento e abbiamo notato che la sua risoluzione era grafica; aveva associato ad ogni numero del dado gli altri sei possibili del secondo dado e quindi, visivamente, aveva trovato la risposta corretta. Allora ho invitato i ragazzi a riflettere su come si poteva ottenere questo risultato partendo dalle due probabilità semplici. Una ragazza ha risposto "*Dal loro prodotto*".

Abbiamo voluto verificare se si otteneva lo stesso risultato calcolando la probabilità di ottenere due numeri pari. Utilizzando lo schema del primo studente è stato facile vedere che era $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

Nella quinta ginnasio del liceo classico e in una seconda di scienze umane abbiamo tenuto due lezioni sulla probabilità.

Nella prima lezione siamo partiti considerando un sacchetto contenente una pallina bianca e due palline rosse.

Abbiamo proposto:

"*Calcoliamo la probabilità di estrarre: una pallina bianca, una rossa, una verde o una qualsiasi*".

a) una pallina bianca ……………. P(B)= $\frac{1}{3}$
b) una pallina rossa ………………. P(R)= $\frac{2}{3}$
c) una pallina verde ……………… P(V) = $\frac{0}{3}=0$
d) una pallina qualsiasi ………….. P=$\frac{3}{3}=1$

Fig. 11 – Probabilità dei vari casi affrontati.

Siamo arrivati così a definire:

- la probabilità come il rapporto fra i casi favorevoli e i casi possibili
- evento impossibile (caso c)
- evento certo (caso d)

Abbiamo poi introdotto la probabilità dell'intersezione e dell'unione di due eventi: utilizzando un diagramma ad albero (fig.12) dove B rappresenta la pallina bianca e R la pallina rossa, ottenendo:

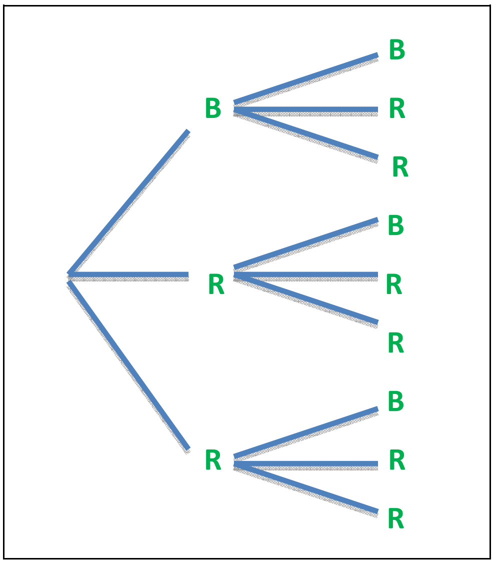


Fig. 12 – l'albero delle probabilità.

La probabilità di ottenere una pallina bianca alla prima estrazione e una bianca alla seconda (con reinserimento) risulta, osservando l'albero $\frac{1}{9}$ cioè esattamente $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}$ deduciamo quindi essa che coincide con il prodotto tra P(B) e P(B).

Si giunge poi alla definizione della probabilità dell'intersezione e dell'unione di eventi seguendo un procedimento simile per pervenire alla somma logica.

Nella seconda lezione abbiamo presentato la legge dei grandi numeri calcolando prima la probabilità teorica nel lancio di una moneta (testa o croce).

Abbiamo poi suddiviso la classe in gruppi di due studenti, assegnando ad uno il compito di lanciare la moneta e all'altro di registrare i dati su un foglio elettronico. Dopo 20 minuti di lanci abbiamo raccolto i dati per osservare la probabilità empirica.

I ragazzi hanno così potuto osservare che con l'aumentare dei lanci la probabilità empirica tende a coincidere con quella teorica.

Abbiamo quindi concluso presentando la legge dei grandi numeri.

Conclusione

Affrontare in verticale questi argomenti, opportunamente scelti, ci ha consentito innanzitutto di confrontarci e consigliarci costantemente sulle metodologie adottate e di analizzare di volta in volta quanto emerso nelle classi con i nostri studenti e con i docenti che abbiamo affiancato in questa esperienza.

Un dialogo tra ordini di scuola diversi, oltre ad aumentare la conoscenza dei rispettivi curricoli, arricchisce sicuramente la didattica degli insegnanti che sono disposti a mettersi in gioco.

Il fatto di affrontare alcuni argomenti particolarmente ostici in modo divertente e non del tutto usuale ha consentito ai bambini e ai ragazzi di iniziare a capire che la matematica può essere anche divertente. Ci ha permesso, inoltre, di iniziare a rimuovere alcuni luoghi comuni secondo i quali la matematica viene identificata quasi esclusivamente con l'esecuzione di calcoli.

Lavorare in modo laboratoriale riporta la matematica alla sua connotazione originale e cioè alla risoluzione di problemi di vario tipo.

Il progetto "Happy verticality in matematica" è servito a questo e a tanto altro. È un'attività che consigliamo a tutti gli insegnanti, dall'Infanzia alla secondaria di II grado, senza controindicazioni.

Deposito dei materiali dell’attività

Al seguente link sono depositati eventuali materiali inerenti a questo articolo. Nel tempo potranno essere modificati e arricchiti seguendo l’evoluzione delle idee sottostanti o/e future sperimentazioni svolte dall’autore dell’articolo.

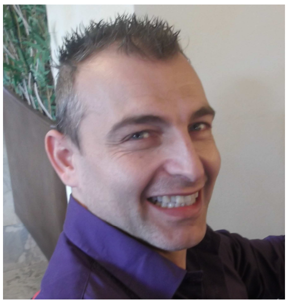
http://www.edimast.it/J/20150101/00050024BA/

Bibliografia

Montone Antonella, Fagiano Eleonora, Giuliano Fiorentino Michele, (2014). “I numeri razionali e le frazioni giocando a carte” al Convegno UMI-CIIM di Livorno 2014 www.umi-ciim.it/.../Montone_I-numeri-razionali-e-le-frazioni-giocando. (verificato in data 23/07/2015).

Fandiňo Pinilla Martha Isabel, (2005). *Le frazioni*, Pitagora editrice, Bologna.

Balsimelli Sergio, (2009). *La geometria con GeoGebra*, Matematicamente ed., Lecce.



Stefano Babini
Liceo “Rambaldi – Valeriani – A. Da Imola” di Imola (BO)
Via Guicciardini, 4 , 40026 Imola (BO)
stefano0011@libero.it
Italy

Professore a tempo indeterminato di matematica e fisica. Appassionato di problem solving, di comunicazione didattica e delle nuove tecnologie applicate alla didattica (docente da diversi anni in classi 2.0).
Si occupa inoltre di processi di apprendimento e di valutazione in vari contesti formativi e di sistema.
Collabora da anni con l’INVALSI (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione).

Ivan Graziani
Istituto Comprensivo di Santa Sofia – Scuola Secondaria di I grado “Galileo Galilei”
Via Arcangeli, 1, 47018 Santa Sofia (FC)
graziani.ivan@tin.it
Italy

Professore a tempo indeterminato di matematica. Formatore in didattica della matematica. Appassionato di ICT, di problem solving e di comunicazione didattica. Si occupa inoltre di processi di apprendimento e di valutazione in vari contesti formativi e di sistema.
Collabora da diversi anni con l’Università di Bologna, con l’INDIRE (Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa), con l’INVALSI (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione) e con l’USR Emilia Romagna (Ufficio Scolastico Regionale).

Received June 19, 2015; revised July 18, 2015; accepted August 10, 2015