

Some remarks on braid and pure braid groups

Filomena Pisani

Abstract. *In this paper some properties valid for the Artin braid group, the pure braid group and the left and right braid groups are proved. We present relationships between the braid group and the pure braid group and the braid group and the left and right braid group.*

Key words. *Braid, symmetric group, braid group, pure braid group, left and right braid group.*

Sommario. *In questo lavoro si provano alcune proprietà valide del gruppo treccia di Artin, del gruppo treccia pura e dei gruppi treccia sinistra e destra. Si presentano relazioni tra il gruppo treccia e il gruppo treccia puro e il gruppo treccia e il gruppo treccia sinistro e destro.*

Parole chiave. *Treccia, gruppo simmetrico, gruppo treccia, gruppo treccia pura, gruppo treccia sinistra, gruppo treccia destra.*

Preliminari

In questa sezione riportiamo alcuni concetti utili che ci permetteranno di descrivere le seguenti sezioni di questo lavoro.

Sia X un insieme arbitrario.

Ogni applicazione biettiva di X in sé, $f: X \rightarrow X$, si chiama *permutazione* di X .

Denotiamo con $S(X)$ l'insieme di tutte le applicazioni biettive di X in sé.

$$S(X) = \{f \mid f: X \rightarrow X, f \text{ biettiva}\}.$$

L'insieme $S(X)$ prende anche il nome di insieme di tutte le *permutazioni* o *corrispondenze biunivoche* di X in sé.

Sia \circ l'operazione binaria della composizione di applicazioni:

$\circ: S(X) \times S(X) \rightarrow S(X)$, tale che per ogni $f, g \in S(X)$ e per ogni $x \in X$ risulta

$$(f \circ g)(x) = fg(x) = f(g(x)).$$

Sia $id: X \rightarrow X$ l'applicazione identità dell'insieme $S(X)$ per l'operazione \circ :

per ogni $f \in S(X)$ e per ogni $x \in X$ risulta

$$(id \circ f)(x) = id(f(x)) = f(x) = f(id(x)) = (f \circ id)(x).$$

Proposizione 1. La terna ordinata $(S(X), \circ, id)$ è un gruppo.

Il gruppo $(S(X), \circ, id)$ si chiama *gruppo delle permutazioni* di X o *gruppo simmetrico* su X .

Se l'insieme $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ è finito e di cardinalità n (cioè, $|X| = n$), lo si può identificare per semplicità con l'insieme $I_n = X = \{1, 2, \dots, n\}$.

In questo particolare caso dove X è finito e di cardinalità n scriviamo S_n al posto di $S(X)$.

Il gruppo (S_n, \circ, id) prende il nome di *symmetric group* di grado n .

Proposizione 2. Il gruppo S_n ha la seguente presentazione:

$$S_n = \left\langle s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \left| \begin{array}{ll} s_i^2 = 1 & \text{per ogni } i \in \{1, \dots, n-1\} \\ s_i s_j = s_j s_i & \text{per ogni } |i-j| > 1 \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} & \text{per ogni } i \in \{1, \dots, n-2\} \end{array} \right. \right\rangle.$$

Il concetto di trasposizione può essere definito come segue:

Una trasposizione è una permutazione che scambia solo due oggetti e lascia il resto fisso.

In questo documento, con il termine *trasposizione* si intendono quelle che lo scambio avviene solo tra due elementi consecutivi che indichiamo $s_i := (i, i+1)$ con $1 \leq i \leq n$ e che chiamiamo *trasposizioni semplici*.

Definizione 3. Il gruppo *treccia di Artin* su n lettere, B_n , è un gruppo finito generato da $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ come segue

$$B_n := \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & |i-j|=1 \quad i, j \in \{1, \dots, n-1\} \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & |i-j| > 1 \quad i, j \in \{1, \dots, n-1\} \end{array} \right. \right\rangle.$$

Gli elementi $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ prendono il nome di *generatori* di B_n , mentre gli elementi di B_n si chiamano *trecce*. Una treccia che per la sua formazione utilizza solo generatori positivi si chiama *positiva*. L'insieme delle trecce positive, che si indica B_n^+ , è un monoide. Una treccia positiva si chiama *treccia semplice* se ogni coppia dei suoi fili si intreccia al massimo una sola volta. Una treccia che non è semplice si chiama *treccia composta*.

Definizione 4. Il nucleo della proiezione naturale $\pi: B_n \rightarrow S_n, \sigma_i \mapsto s_i := (i, i+1)$, si chiama *gruppo treccia pura* e si denota con P_n :

$$P_n := \ker(\pi: B_n \rightarrow S_n).$$

Ogni elemento dell'insieme P_n si chiama *treccia pura su n stringhe* o *treccia pura*.

Un *diagramma a treccia pura* è un diagramma che rappresenta un elemento di P_n .

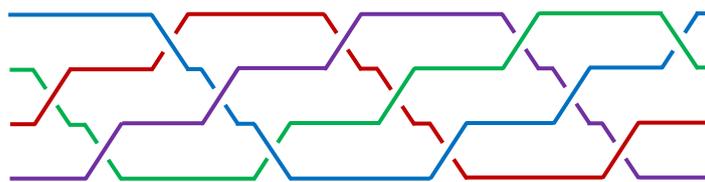


Fig. 1 – Treccia pura del gruppo P_4

Esempio 5. La figura (vedi Fig. 1) presenta una treccia pura dell'insieme P_4 .

Nota 6. Il significato della treccia pura è che ogni suo filamento con estremo di partenza i dopo gli intrecci il suo estremo di arrivo si posiziona di nuovo al posto i .

Definizione 7. Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *normale* se per ogni elemento $x \in G$ vale $xH = Hx$. Per indicare che il sottogruppo H del gruppo G è normale si scrive $H \trianglelefteq G$.

Definizione 8. Un sottogruppo H di un gruppo G si dice *indice di H in G* il numero $(G : H) = |\{Hx\}_{x \in G}| = |\{xH\}_{x \in G}|$.

Proposizione 9 ([8, p.27]). Siano P_n , con $n \geq 1$, l'insieme delle trecce pure su n stringhe, B_n il gruppo delle trecce di Artin su n stringhe ed S_n il gruppo simmetrico. Allora

- 1) P_n è un sottogruppo normale di B_n :

$$P_n \trianglelefteq B_n.$$

- 2) il gruppo quoziente B_n/P_n è isomorfo al gruppo S_n :

$$B_n/P_n \cong S_n.$$

- 3) L'indice $(B_n : P_n)$ del sottogruppo P_n in B_n è uguale al fattoriale $n!$:

$$(B_n : P_n) = n!.$$

Definizione 10 ([7, p.102]). Siano l'intero positivo n , il gruppo trecce B_n , il gruppo derivato B_n' , il gruppo derivato di ordine superiore $B_n^{(m)}$ e il gruppo trecce pure P_n . Si chiama *sottogruppo commutatore puro* o *sottogruppo derivato puro* di B_n il sottogruppo

$$P_n' = P_n \cap B_n'.$$

Si chiama *sottogruppo commutatore puro di ordine superiore* o *sottogruppo derivato puro di ordine superiore* di B_n il sottogruppo

$$P_n^{(m)} = P_n \cap B_n^{(m)} \quad \text{per ogni } m > 1.$$

Se $\pi: B_n \rightarrow S_n$ è l'epimorfismo naturale di B_n in S_n , la sua restrizione in B_n'

$$\pi' = \pi|_{B_n'}: B_n' \rightarrow S_n$$

si chiama *omomorfismo naturale* o *omomorfismo canonico* di B_n' in S_n .

Per approfondimenti inerenti l'algebra astratta e i braid groups utili per comprendere meglio questo lavoro il lettore può consultare [1, 2, 5, 6].

Alcune proprietà dei gruppi B_n e P_n

In questa sezione presentiamo alcuni risultati che coinvolgono i gruppi $B_n, P_n, B_n', P_n', B_n'', P_n''$.

Proposizione 11. Siano un intero $n \geq 3$, B_n il gruppo trecce, B_n' il sottogruppo derivato di B_n , P_n il gruppo treccia pura di B_n e P_n' il sottogruppo derivato di P_n . Allora:

$$(P_n : P_n') \leq ((P_n \cup B_n') : B_n').$$

Dim. La tesi ha senso se gli indici sono finiti. Sia $P_n = \bigcup_{i=1}^m P_n' \cdot h_i$ la partizione di P_n in classi laterali

di P_n' . Se $B_n' \cdot h_i = B_n' \cdot h_j$, allora $h_i = k \cdot h_j$ con $k \in P_n'$ e di conseguenza $P_n' \cdot h_i = P_n' \cdot h_j$. Dalla precedente relazione ne segue che B_n' ha almeno m classi laterali in $P_n \cup B_n'$.

Siano $P_n \cup B_n' = B_n' g_1 \cup B_n' g_2 \cup \dots \cup B_n' g_r$ e $B_n' = P_n' h_1 \cup P_n' h_2 \cup \dots \cup P_n' h_m$. Per $i = 1, 2, \dots, r$ risulta $B_n' g_i = P_n' h_1 g_i \cup P_n' h_2 g_i \cup \dots \cup P_n' h_m g_i$.

Se $ah_j g_i = bh_p g_q$ ed essendo $ah_j, bh_p \in B_n'$ risulta $B_n' g_i = B_n' g_q$. Questo fatto indica che i laterali di P_n' ottenuti come descritto prima sono disgiunti al variare di $B_n' g_i$. Dunque, il gruppo $P_n \cup B_n'$ è l'unione di tutti i termini $P_n' h_j g_i$ che sono numericamente $rm = (P_n \cup B_n') : B_n' (B_n' : P_n')$.

Ne segue che $((P_n \cup B_n') : P_n') = ((P_n \cup B_n') : B_n') (B_n' : P_n') = ((P_n \cup B_n') : P_n) (P_n : P_n')$,

per cui $((P_n \cup B_n') : B_n')$ divide il prodotto $((P_n \cup B_n') : P_n) (P_n : P_n')$ e di conseguenza $(P_n : P_n') \leq ((P_n \cup B_n') : B_n')$. \square

Proposizione 12. Siano un intero $n \geq 3$, B_n il gruppo trecce, P_n il gruppo treccia pura di B_n e S_n il gruppo simmetrico. Allora,

$$\text{Aut}(B_n/P_n) \cong \text{Aut}(S_n) = \text{Inn}(S_n).$$

Dim. È ben noto che gruppi isomorfi hanno gruppi di automorfismi isomorfi. È ben noto [8] che B_n/P_n e S_n sono isomorfi e che gli automorfismi di S_n sono tutti interni. \square

Lemma 13. Siano intero $n \geq 3$ e il gruppo B_n . Allora

$$(\sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1)^{n-1} = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}) (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2})^{n-1}.$$

Dim. Proviamo la validità della relazione induttivamente verificando i casi $n = 3$, $n = 4$ ed $n = 5$ e si lascia al lettore la verifica dei casi per $n > 5$.

Se $n = 3$ la relazione risulta $(\sigma_2 \sigma_1)^2 = (\sigma_1 \sigma_2)(\sigma_1)^2$. Verifichiamo la veridicità:

$$(\sigma_2 \sigma_1)^2 = (\sigma_2 \sigma_1)(\sigma_2 \sigma_1) = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 = (\sigma_1 \sigma_2)(\sigma_1)^2.$$

Se $n = 4$ la relazione risulta $(\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1)^3 = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)(\sigma_1 \sigma_2)^3$. Verifichiamo la veridicità:

$$\begin{aligned} (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)(\sigma_1 \sigma_2)^3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \\ &= \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \\ &= \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = (\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1)(\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1)(\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1) = (\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1)^3. \end{aligned}$$

Se $n = 5$ la relazione risulta $(\sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1)^4 = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4)(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^4$. Verifichiamo la veridicità:

$$\begin{aligned} (\sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1)^4 &= \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \\ &= \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \\ &= \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \\ &= \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \\ &= \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_4 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \\ &= \sigma_4 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_4 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \\ &= \sigma_4 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \\ &= \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4) \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4) \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \\
 &= (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4) (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4) (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \\
 &= (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4) (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4) (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \\
 &= (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4) (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4) (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \\
 &= (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4) (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^4. \quad \square
 \end{aligned}$$

Corollario 14. Siano intero $n \geq 3$, il gruppo B_n e la treccia $v_{1,n} = \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$. Allora

$$(\sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1)^n = v_{1,n} (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2})^{n-1}.$$

Definizione 15 ([4]). Si chiama *treccia fondamentale o treccia fondamentale di Garside*, la seguente parola:

$$\Delta := (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}) (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-3} \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1.$$

Si fa notare che per ogni $1 \leq k \leq n$ vale la notazione

$$\Delta_k := (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{k-2} \sigma_{k-1}) (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{k-3} \sigma_{k-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1.$$

La treccia fondamentale di Garside Δ in B_n è definita induttivamente come segue:

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \sigma_1 \Delta_1, \quad \Delta_3 = \sigma_1 \sigma_2 \Delta_2, \quad \dots, \quad \Delta \equiv \Delta_n = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1} \Delta_{n-1} \quad \text{per ogni } n \geq 2.$$

Proposizione 16. Siano intero $n \geq 3$, il gruppo B_n^+ , la parola fondamentale di Garside Δ_n e la treccia $v_{1,n} = \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$. Allora, risulta

$$\Delta_n^2 = v_{1,n} (\Delta_{n-1}^2) = (\Delta_{n-1}^2) v_{1,n}.$$

Dim (Tak). È noto [8] che

$$\Delta_n^2 = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n = (\sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1)^n \text{ e di conseguenza risulta}$$

$$\Delta_{n-1}^2 = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2})^{n-1} = (\sigma_{n-2} \dots \sigma_2 \sigma_1)^{n-1}.$$

Dalle due relazioni precedenti e dal Corollario 14 si ha

$$\Delta_n^2 = v_{1,n} (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2})^{n-1} = v_{1,n} (\Delta_{n-1}^2).$$

Dalla ben nota proprietà $\sigma_i (\Delta_{n-1}^2) = (\Delta_{n-1}^2) \sigma_i$, vedi [8], segue $v_{1,n} (\Delta_{n-1}^2) = (\Delta_{n-1}^2) v_{1,n}$ e la dimostrazione è completa. \square

Corollario 17. Siano intero $n \geq 3$ e il gruppo B_n^+ . Allora

$$\Delta_n^2 = v_{1,n} v_{1,n-1} \dots v_{1,3} v_{1,2} = v_{1,2} v_{1,3} \dots v_{1,n-1} v_{1,n}.$$

Dim. Per la proposizione precedente si ha

$$\Delta_n^2 = v_{1,n} (\Delta_{n-1}^2) = v_{1,n} v_{1,n-1} (\Delta_{n-2}^2) = \dots = v_{1,n} v_{1,n-1} \dots v_{1,3} (\Delta_2^2)$$

$$= v_{1,n} v_{1,n-1} \dots v_{1,3} v_{1,2} (\Delta_1^2) = v_{1,n} v_{1,n-1} \dots v_{1,3} v_{1,2}.$$

Analogamente si prova che $\Delta_n^2 = v_{1,2} v_{1,3} \dots v_{1,n-1} v_{1,n}$. \square

Gruppi treccia sinistra lB_n e treccia destra rB_n

Sia un numero reale positivo k . Con il simbolo $\lfloor k \rfloor$ si indica la parte intera del numero k .

Definizione 18. Siano numero intero $n \geq 3$ e il gruppo B_n .

Si denota con lB_n il sottogruppo di B_n formato dai suoi primi $\lfloor n/2 \rfloor$ filamenti e prende il nome *gruppo treccia sinistra* di Artin.

Si denota con rB_n il sottogruppo di B_n formato dai suoi ultimi $n - \lfloor n/2 \rfloor$ filamenti e prende il nome *gruppo treccia destra* di Artin.

Proposizione 19. I gruppi lB_n e rB_n hanno le seguenti presentazioni:

$$lB_n := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \left| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad |i-j|=1 \quad i, j \in \left\{ 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i-j| > 1 \quad i, j \in \left\{ 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \end{array} \right. \right\rangle$$

e

$$rB_n := \left\langle \sigma_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad |i-j|=1 \quad i, j \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \dots, n-1 \right\} \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i-j| > 1 \quad i, j \in \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \dots, n-1 \right\} \end{array} \right. \right\rangle.$$

Osservazione 20. Se n è il numero dei fili del gruppo B_n , il gruppo lB_n ha $n/2$ fili e $n/2-1$ generatori. Se il numero n di B_n è pari il gruppo rB_n ha $n/2$ fili e $n/2-1$ generatori. Se n è dispari, rB_n ha $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ fili e $\lfloor n/2 \rfloor$ generatori.

Proposizione 21. Siano un numero intero pari $n \geq 4$ e i gruppi lB_n e rB_n . Allora, i gruppi lB_n e rB_n sono isomorfi:

$$lB_n \cong rB_n.$$

Dim. I gruppi lB_n e rB_n hanno lo stesso numero $n/2$ di fili. Si considera $h : lB_n \rightarrow rB_n$ tale che $h(\sigma_i) = \sigma_{i+\lfloor n/2 \rfloor + 1}$ per $i = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor - 1$. Non presenta difficoltà verificare che h è un isomorfismo. \square

Corollario 22. Siano un numero intero pari $n \geq 4$, i gruppi lB_n e rB_n e i sottogruppi derivati lB_n' , rB_n' di lB_n e rB_n rispettivamente. Allora, i gruppi lB_n' e rB_n' sono isomorfi:

$$lB_n' \cong rB_n'.$$

Proposizione 23. Siano un numero intero pari $n \geq 4$, i gruppi lB_n e rB_n e i gruppi delle trecce pure lP_n , rP_n di lB_n e rB_n rispettivamente. Allora, i gruppi lB_n/lP_n e rB_n/rP_n sono isomorfi:

$$lB_n/lP_n \cong rB_n/rP_n.$$

Dim. È ben noto che sia lB_n/lP_n che rB_n/rP_n sono isomorfi al gruppo simmetrico $S_{\lfloor n/2 \rfloor}$ e la prova è completa. \square

Proposizione 24. Siano un numero intero pari $n \geq 6$, un endomorfismo non banale $\varphi : B_n' \rightarrow B_n'$ e i sottogruppi derivati $lP_n' = lP_n \cap B_n'$, $rP_n' = rP_n \cap B_n'$. Allora risulta

$$\varphi^{-1}(lP_n') \cong \varphi^{-1}(rP_n').$$

Dim (Tak). Lin ha provato [7, p.9] che $\varphi^{-1}(P_n') \cong P_n'$ e di conseguenza $\varphi^{-1}(lP_n') \cong lP_n'$ e $\varphi^{-1}(rP_n') \cong rP_n'$. Inoltre, il Corollario 22 afferma che $lP_n' \cong rP_n'$ e la prova è completa. \square

Osservazione 25. Se il numero dei fili n è dispari non è valido l'isomorfismo della proposizione precedente.

Proposizione 26. Siano numero intero $n \geq 3$, il gruppo treccia B_n e lB_n , rB_n i sottogruppi di B_n di cui lB_n generato dai primi $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ generatori e rB_n dagli ultimi $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ generatori di B_n .

Se $u \in lB_n$ e $v \in rB_n$, allora $uv = vu$.

Dim. La relazione di definizione di B_n afferma che $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ per $|i - j| > 1$. Per la definizione di lB_n e rB_n , se σ_p e σ_q sono due qualsiasi generatori di lB_n e rB_n rispettivamente, allora $|p - q| > 1$. La treccia u è formata con generatori di lB_n e v con generatori di rB_n . Di conseguenza i generatori di u possono commutare con i generatori di v per cui si può ottenere $uv = vu$. \square

Lemma 27 ([3]). Siano un numero intero pari $n \geq 3$, il gruppo B_n e il suo centro $Z(B_n)$. Allora, gli automorfismi di B_n e $B_n/Z(B_n)$ sono isomorfi:

$$\text{Aut}(B_n) \cong \text{Aut}(B_n/Z(B_n)).$$

Proposizione 28. Siano un numero intero pari $n \geq 4$, i sottogruppi lB_n , rB_n di B_n e i centri $Z(lB_n)$, $Z(rB_n)$. Allora,

$$\text{Aut}(lB_n/Z(lB_n)) \cong \text{Aut}(rB_n/Z(rB_n)).$$

Dim. Utilizzando la Proposizione 21 risulta che $\text{Aut}(lB_n) \cong \text{Aut}(rB_n)$. Per il Lemma 27 la tesi è provata. \square

Proposizione 29. Siano intero $n \geq 3$, il monoide treccia positiva B_n^+ , i sottomonoidi lB_n^+ , rB_n^+ di B_n^+ , gli elementi $\alpha \in rB_n$, $\beta \in lB_n$ e la parola $v_{1, \lfloor n/2 \rfloor} = \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$. Se β è una treccia semplice e non contiene il generatore $\sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$, allora risulta che

$$\alpha \beta v_{1, \lfloor n/2 \rfloor} = v_{1, \lfloor n/2 \rfloor} \beta \alpha,$$

e $\beta v_{1, \lfloor n/2 \rfloor}$ e $v_{1, \lfloor n/2 \rfloor} \beta$ sono trecce composite.

Dim. Per primo proviamo che per ogni $1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - 2$ risulta $\sigma_i v_{1, \lfloor n/2 \rfloor} = v_{1, \lfloor n/2 \rfloor} \sigma_i$.

$$\begin{aligned} & \sigma_i \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \\ &= \sigma_i \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \\ &= \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \dots \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \\ &= \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \\ &= \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \\ &= \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \\ &= \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \dots \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \\ &= \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \sigma_i \\ &= \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \sigma_i. \end{aligned}$$

La treccia β è formata da una combinazione di generatori σ_i con $1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - 2$. Ripetendo la procedura descritta in precedenza per ogni singolo generatore di β in sequenza e da sinistra verso destra l'uguaglianza della proposizione è verificata. Dall'altra parte, il generatore con l'indice minore del monoide rB_n è $\sigma_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$, mentre quello con l'indice maggiore della parola $v_{1, \lfloor n/2 \rfloor}$ è $\sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$ ed essendo $|\lfloor n/2 \rfloor + 1 - (\lfloor n/2 \rfloor - 1)| = 2$ tutti i generatori della parola α possono attraversare la parola $v_{1, \lfloor n/2 \rfloor}$ sia da sinistra verso destra che da destra verso sinistra utilizzando solo la prima relazione di definizione di B_n . Quindi, per il nostro caso si ha $\alpha\beta v_{1, \lfloor n/2 \rfloor} = v_{1, \lfloor n/2 \rfloor} \alpha\beta$ e grazie alla Proposizione 26 risulta $\alpha\beta v_{1, \lfloor n/2 \rfloor} = v_{1, \lfloor n/2 \rfloor} \beta\alpha$.

Per il modo in cui è stata costruita la treccia $v_{1, \lfloor n/2 \rfloor} = \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \dots \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \dots \sigma_{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$ risulta composita. Infatti, in questa treccia ogni filo incontra gli altri fili due volte. Di conseguenza anche $v_{1, \lfloor n/2 \rfloor} \beta$ e $\beta \cdot v_{1, \lfloor n/2 \rfloor}$ che $\alpha\beta v_{1, \lfloor n/2 \rfloor}$ e $v_{1, \lfloor n/2 \rfloor} \beta\alpha$ sono trecce composte. \square

Conclusione

Riteniamo che i gruppi treccia siano adatti per ulteriori ricerche teoriche e applicative, ma anche per scopi didattici, soprattutto nelle università e per gli studenti del triennio delle scuole superiori.

Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Nota dell'editore

EDiMaST rimane neutrale per quanto riguarda le rivendicazioni giurisdizionali nelle mappe pubblicate e nelle affiliazioni istituzionali.

Finanziamento

Questo lavoro non è stato sostenuto da alcun fondo pubblico o privato.

Bibliografia

- [1] Birman J.S., (1974). *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Annals of Math. Studies 82, Princeton Univ. Press.
- [2] Bogopolski O., (2008). *Introduction to Group Theory*, European Mathematical Society Publishing House, Zürich.
- [3] Dyer J.L., Grossman E.K., (1981). *The automorphism group of the braid groups*, Amer. J. of Math. 103, 1151-1169.
- [4] Garside F.A., (1969). *The braid group and other groups*, Quart. J. Math. Oxford Ser. 20, 235-254.
- [5] Kassel C., Turaev V., (2008). *Braid Groups*, Grad. Texts in Math. 247, Springer-Verlag, New York.

- [6] Ligouras P., (2020). *Semigroups, monoids and free groups*, Experiences of Teaching with Mathematics, Sciences and Technology, ISSN 2421-7247, Vol. 5, pp. 515-526.
- [7] Lin, V., (2004). *Braids and Permutations*, [Arxiv: math.GR/0404528](https://arxiv.org/abs/math/0404528).
- [8] Murasugi K., Kurpita, B.I., (1999). *A Study of Braids*, Math. Appl. 484, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [9] Rotman, J.J., (1995). *An introduction to the theory of groups*, 4th ed., Springer-Verlag New York, Inc,

L'Autore

	<p>Filomena Pisani A.S.L. Bari Via Cesare Battisti, 114, 70011 Alberobello Italy Email Address: fi.pisani@tiscali.it</p>
---	---

Received October 11, 2020; revised December 27, 2020; accepted August 19, 2021; published online November 11, 2021

Open Access This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)



Open Access This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License, which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons licence, and indicate if changes were made. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons licence, unless indicated otherwise in a credit line to the material. If material is not included in the article's Creative Commons licence and your intended use is not permitted by statutory regulation or exceeds the permitted use, you will need to obtain permission directly from the copyright holder. To view a copy of this licence, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.