

Student's Amletic doubt: Do I get it right or don't I get it right?

Stefano Babini, Ivan Graziani

Abstract. *The aim of our research was to study and analyse the possible main reasons of errors in the answers of some INVALSI questions proposed to first and second cycle students on Data and Uncertainty items. Three questions taken from Invalsi tests of different years (2012-2017) were administered. We chose one question referred to Probability and two questions to Statistics.*

In our research we analysed the errors and also their recurrence, by arguing the possible causes linking them in a vertical perspective.

We observed a very diversified situation in the solving strategies and in the types of errors, both among the various school levels and among students in the same years but who attend different type of schools.

Key words. *Statistics, Probability, Verticality, Data and Uncertainty, Analysis of errors.*

Sommario. *Lo scopo del nostro lavoro è stato quello di ricercare e analizzare quali fossero le principali cause di errore nelle risoluzioni di alcuni quesiti proposti a studenti del primo e secondo ciclo su degli item di Dati e Previsioni, da noi selezionati sulla piattaforma di Gestinv.*

Sono stati somministrati tre quesiti tratti da Prove Invalsi di vari anni (2012-2017).

Abbiamo cercato di differenziare le tipologie: un quesito riferito al Calcolo delle probabilità, semplice e due alla Statistica (lettura dei dati per estrapolarne le informazioni in termini di frequenza e di media aritmetica e calcolo di una media "particolare").

In questa ricerca siamo andati ad analizzare gli errori anche nella loro ripetitività, analizzando le probabili cause, relazionandole sempre in ottica verticale.

Abbiamo potuto osservare una situazione molto diversificata nelle strategie risolutive e nelle tipologie di errore, sia tra i vari ordini di scuola, sia tra i diversi indirizzi a parità di anno frequentato.

Parole chiave. *Statistica, Probabilità, Verticalità, Dati e previsioni, Analisi degli errori.*

Introduzione

Nei libri di testo usati a scuola purtroppo troviamo spesso molti esercizi ripetitivi e pochi veri problemi. Questo può portare gli studenti a perdere o non acquisire mai la capacità di affrontare situazioni problematiche seguendo adeguate strategie risolutive.

La risoluzione di un esercizio prevede che si debbano utilizzare regole e procedure già apprese (eventualmente in corso di consolidamento), da cui si rileva un comportamento automatico.

La risoluzione di un problema prevede che si debbano utilizzare anche regole o procedure che non sono ancora bagaglio cognitivo del solutore e comunque fare delle scelte legate ad un comportamento strategico.

Per questo motivo, con la nostra ricerca, abbiamo voluto indagare su quali fossero le tipologie e le cause degli errori ricorrenti tra le varie soluzioni fornite dagli studenti a particolari quesiti riguardanti la risoluzione di problemi.

Abbiamo selezionato alcuni item da Gestinv e li abbiamo somministrati a un campione di 715 studenti del primo e del secondo ciclo di istruzione di alcune province dell'Emilia Romagna.

La cosa che ci ha colpito in modo particolare è stata che, tranne per il terzo quesito, l'andamento dei risultati del nostro campione non sia stata in linea con le nostre aspettative iniziali che prevedevano un andamento crescente e migliorativo in verticale. In particolare nei primi due quesiti il risultato è stato migliore nelle terze secondarie di I grado rispetto alle seconde del II grado. Probabilmente questo è legato al fatto che venga fatta poca "manutenzione" nel biennio di secondo grado su argomenti trattati durante il primo ciclo di istruzione (D'Amore, 2003).

Col termine "manutenzione", si intende proprio quel consolidamento e approfondimento degli argomenti affrontati nel corso del primo ciclo, che caratterizzano una didattica attenta alla gestione degli opportuni elementi di continuità e dei necessari elementi di discontinuità da parte del secondo grado con i cicli scolastici precedenti (Invalsiopen).

Attività e sperimentazione

L'attività è stata svolta durante il primo quadrimestre dell'anno scolastico 2019/2020 presso alcune scuole dell'Emilia Romagna, nelle Province di Bologna, Forlì-Cesena e Parma, grazie alla preziosa collaborazione dei docenti dei vari istituti.

Il campione era così composto:

- 228 appartenenti a 10 classi terze, secondaria di primo grado
- 245 appartenenti a 12 classi seconde, secondaria di secondo grado
- 242 appartenenti a 12 classi quarte, secondaria di secondo grado.

In particolare, per la scuola secondaria di II grado le classi sono state scelte tra vari indirizzi: Liceo scientifico e artistico, Istituti tecnici tecnologico, economico e chimico-biologico, nonché Istituto Professionale ad indirizzi meccanico e alberghiero

Lo scopo della nostra ricerca è stato quello di analizzare risposte, prodotte da studenti di diversi ordini e gradi, a quesiti INVALSI dell'ambito "Dati e previsioni". Volevamo verificare come certe competenze specifiche legate ai valori medi di un campione, come media aritmetica, moda e mediana, venissero acquisite e, soprattutto, consolidate e mantenute con il passare degli anni scolastici.

Per la nostra ricerca abbiamo quindi composto un fascicolo con 10 quesiti di Dati e Previsioni e Relazioni e Funzioni presi dalle prove di grado 5, 8 e 10, grazie alla piattaforma di Gestinv.

Abbiamo quindi selezionato i tre quesiti di Dati e Previsioni, sia per la tipologia di risposta "cloze" del primo sia per il tipo di richiesta degli altri due che indagavano su valori medi particolari. Gli

abbiamo scelti anche perché offrivano maggiori possibilità di analisi viste soprattutto le strategie risolutive esplicitate dagli studenti.

Oltre ai risultati ottenuti dagli studenti nei singoli quesiti, abbiamo raccolto altre informazioni grazie alla collaborazione dei docenti somministratori che hanno analizzato in classe con gli studenti le prove svolte e ci hanno riportato in intervista le impressioni e i feedback degli studenti.

Discussione e risultati

Primo quesito

Il primo quesito selezionato (Fig. 1), composto di tre item di una prova di Grado 5 dell'anno 2017:

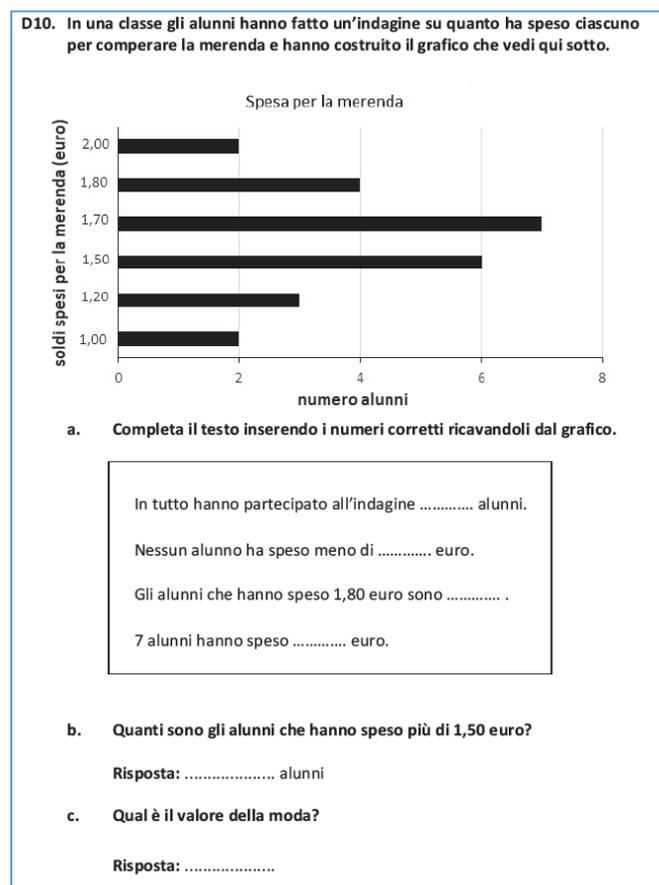


Fig. 1 – Quesito grado 5 anno 2017

questo quesito ci è sembrato interessante anche per la tipologia di risposta del primo item, in quanto è di tipo “cloze” (cioè un tipico “testo bucato”) e per gli altri due che sono a Risposta Univoca (RU).

Per tutti gli item di questo quesito, i risultati del nostro campione sono stati migliori di quelli ottenuti nel campione Nazionale analizzato da INVALSI, che era composto da studenti di Grado 5.

La nostra analisi si è soffermata, in particolare, sui risultati dei singoli item per i diversi ordini di scuola esaminando anche le differenti tipologie di errore.

Risultati

Item 1a

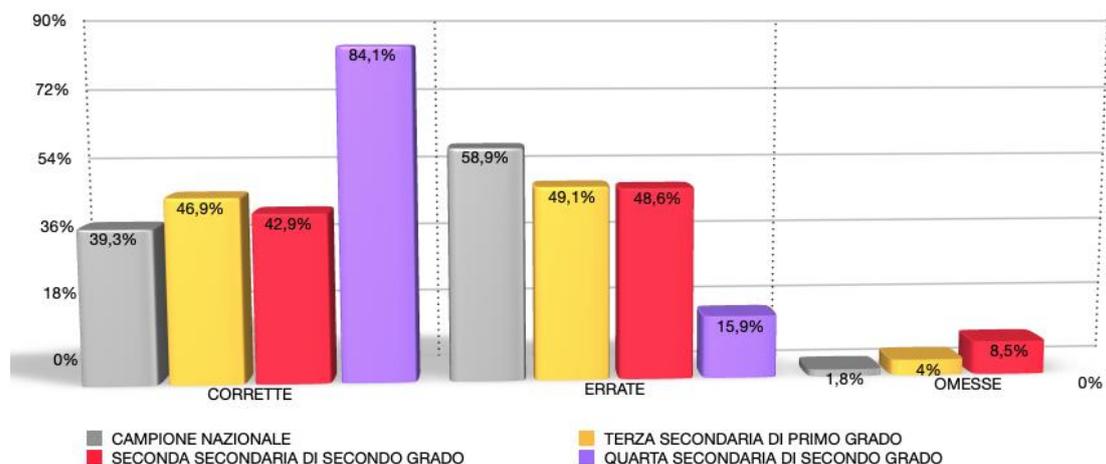


Fig. 2 - Digramma che rappresenta le percentuali di risposte del primo quesito per l'item a

Per questo primo item (Fig. 2), abbiamo registrato un risultato migliore nelle terze classi di secondaria di I grado rispetto alle seconde della secondaria di II grado.

Item 1b

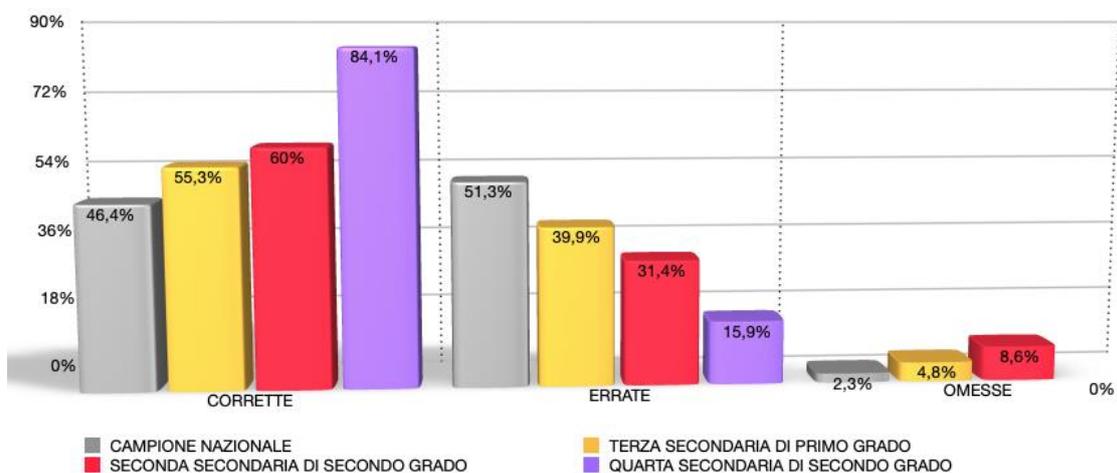


Fig. 3 - Digramma che rappresenta le percentuali di risposte del primo quesito per l'item b

Questo particolare è legato, secondo noi, sentendo anche quanto riferito dai docenti somministratori, al fatto che si faccia ancora troppa poca “manutenzione” su questi aspetti statistici nel biennio di scuola “superiore”, nonostante questo sia previsto sia delle Linee Guida e dalle Indicazioni per il secondo ciclo.

Per il secondo item (fig. 3), possiamo osservare in particolare un livello crescente di percentuali di risposte corrette dal 1° al 2° ciclo di istruzione. Questo è dovuto probabilmente al fatto che il dato era ricavabile osservando con attenzione il diagramma, ma anche ponendo proprio l'attenzione sul testo della domanda stessa; in particolare l'espressione che definiva la relazione "più di 1,50 euro" ha infatti portato all'errore più comune che è stato rispondere "19", contando anche tutti quelli che avevano speso 1,50 €. Questo può essere legato anche ad una lettura frettolosa del testo (Zan, 2016).

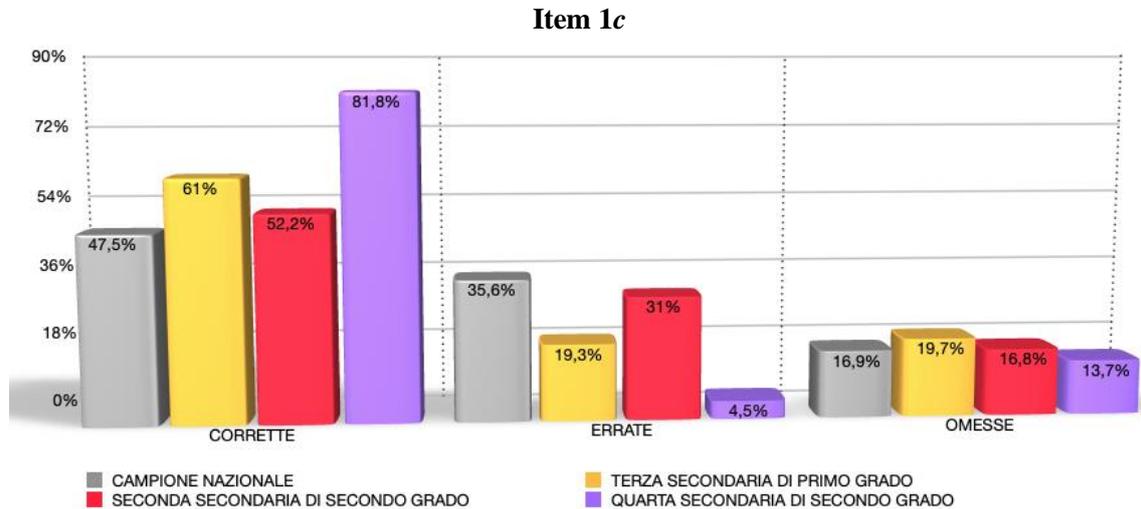


Fig. 4 – Digramma che rappresenta le percentuali di risposte del primo quesito per l'item c

Per il terzo item (fig. 4), il risultato delle classi terze di secondaria di I grado è stato migliore rispetto ai colleghi delle seconde di secondaria di II grado. Come per il primo item, in questo caso è ancora più rilevante il fatto che si faccia poca "manutenzione" sugli aspetti statistici.

In tutto hanno partecipato all'indagine7..... alunni.

Nessun alunno ha speso meno di ...1,50... euro.

Gli alunni che hanno speso 1,80 euro sono ...4.....

7 alunni hanno speso ...1,70... euro.

b. Quanti sono gli alunni che hanno speso più di 1,50 euro?
 Risposta:13..... alunni

c. Qual è il valore della moda?
 Risposta:7.....

Fig. 5 – esempio di risposta

Alcuni esempi di errori sono rappresentati dalla figura (Fig. 5), dove non viene rilevato correttamente il numero del campione dell'indagine. Poi però nel secondo item lo studente

attribuisce un numero maggiore di quello che aveva appena scritto, ma per un sottogruppo del campione iniziale.

Come sostiene Polya (2016), spesso uno degli errori più frequenti nella risoluzione dei problemi consiste proprio nel fatto di non considerare la plausibilità del risultato anche in base a quanto ottenuto precedentemente.

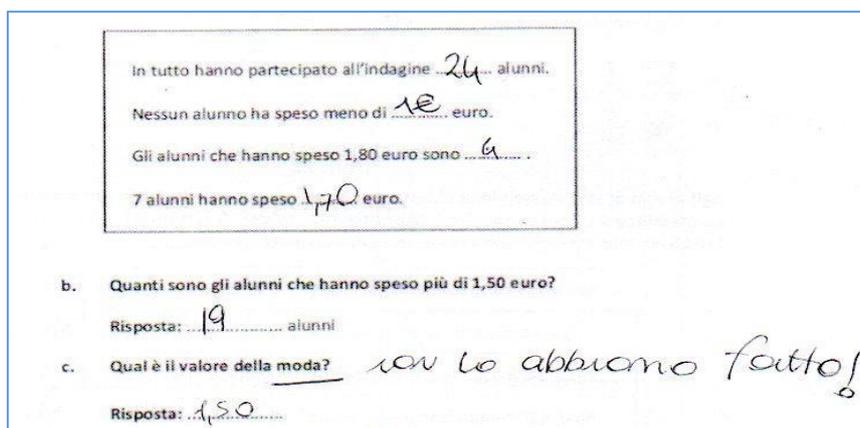


Fig. 6 – esempio di risposta

Nella figura (Fig. 6), invece, pur rispondendo bene al primo item, lo studente fa il classico errore nel secondo item e, pur frequentando un istituto tecnico del secondo ciclo sostiene di “non avere mai fatto” la moda. Molto probabilmente questo è legato al fatto di non aver interiorizzato quel particolare concetto pur avendolo quasi certamente visto durante la scuola secondaria di I grado (Zan & Baccaglini-Frank, 2017).

Secondo quesito

Il secondo quesito (Fig. 7) era nella prova INVALSI di Grado 10 dell’anno 2017.

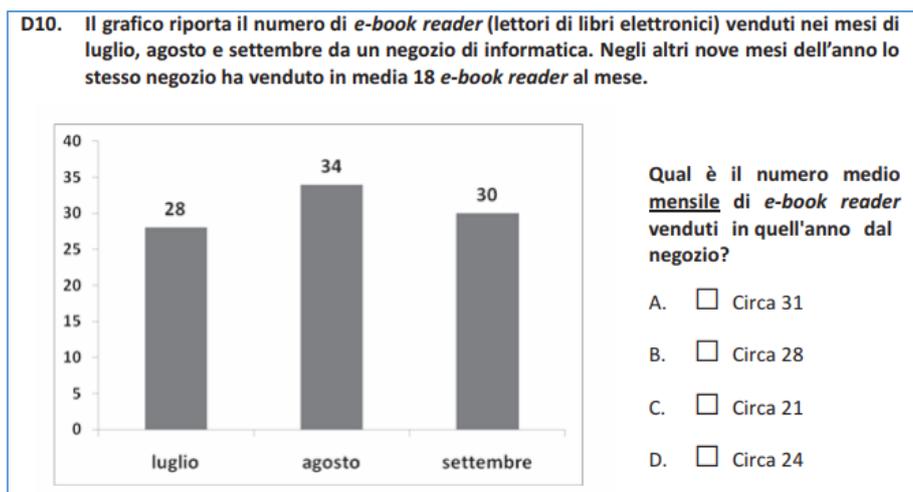


Fig. 7 - quesito 2 grado 10 anno 2017

La sua particolarità è quella di dover ricavare una media non convenzionale ponderata, in cui i valori non hanno lo stesso “peso”, perché occorre considerare dei dati riferiti a tre mesi e relazionarli con il dato medio ricavato dal testo relativo agli altri 9 mesi.

Risultati

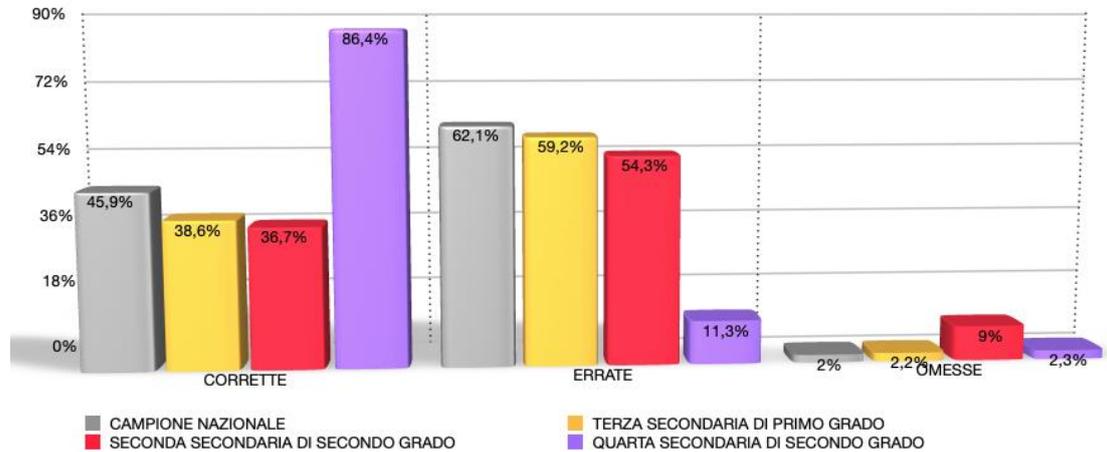


Fig. 8 - Digramma che rappresenta i risultati relativi al quesito 2

Per questo quesito possiamo osservare che solo la classe quarta di secondaria di II grado ha ottenuto un risultato migliore rispetto al campione nazionale di Grado 10 (Fig. 8).

Anche in questo quesito, però, si osserva un risultato percentuale migliore nelle classi terze di secondaria di I grado rispetto alle seconde del II grado. Questo particolare è ancora più insolito perché quel tipo di calcolo di media ponderata non è comune nel 1° ciclo.

Possiamo però analizzare il risultato nella distribuzione dei diversi distrattori scelti dagli studenti dei diversi ordini (Fig. 9).

Distribuzione delle risposte

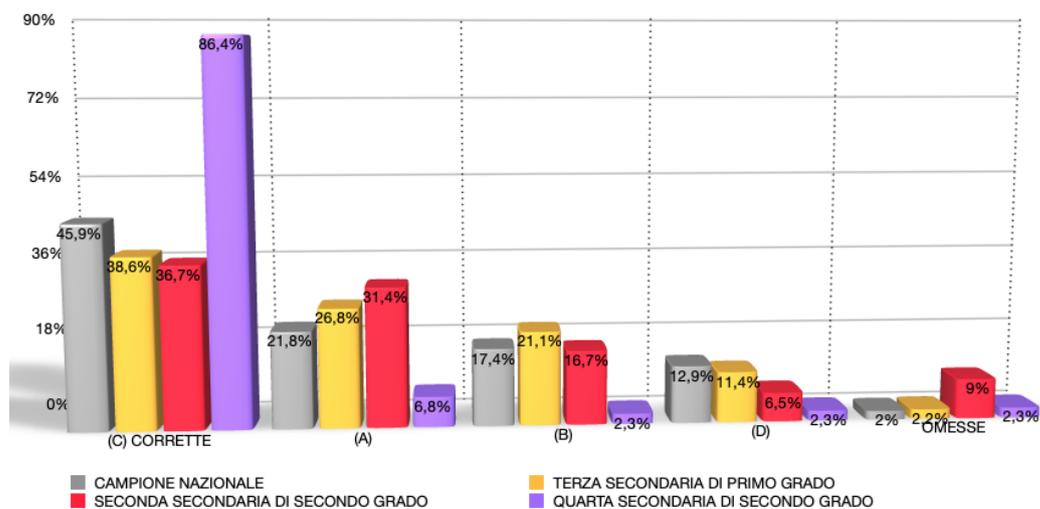


Fig. 9 – Digramma che rappresenta le percentuali di risposte relative al quesito 2

Possiamo osservare che il distrattore maggiormente scelto da chi ha sbagliato è stato quello dell'opzione A che è legato alla semplice media tra i valori riportati nel grafico (figure 10 e 11) anche per abitudine operativa quotidiana, da contratto didattico, nel calcolo della semplice media aritmetica (Brousseau, 1986).

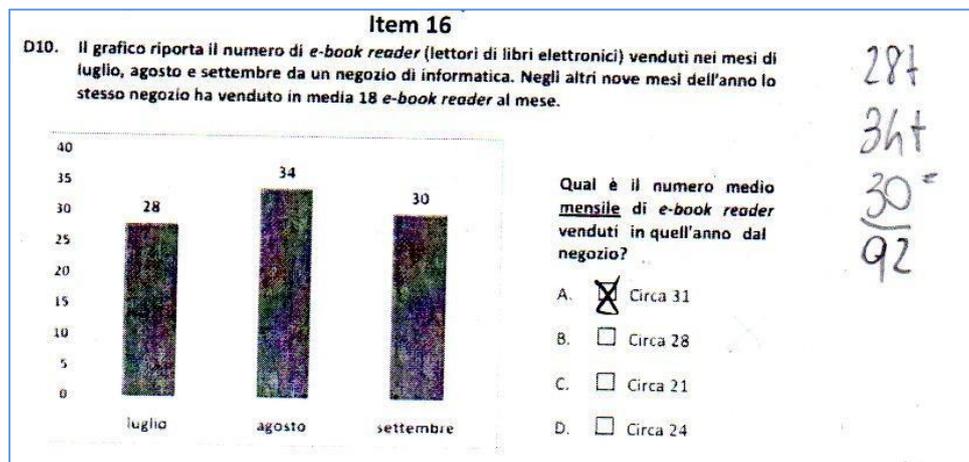


Fig. 10 – esempio di risposta

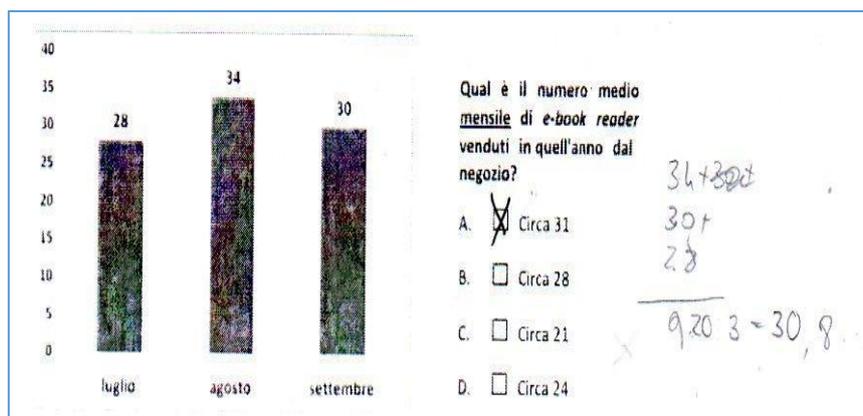


Fig. 11 – esempio di risposta

Un altro distrattore scelto è stato quello dell'opzione B legato anch'esso alla semplice media tra i valori riportati nel grafico con l'aggiunta dell'unico altro numero presente nel testo, 18 che lo studente ha infatti sottolineato (vedi Fig. 12).

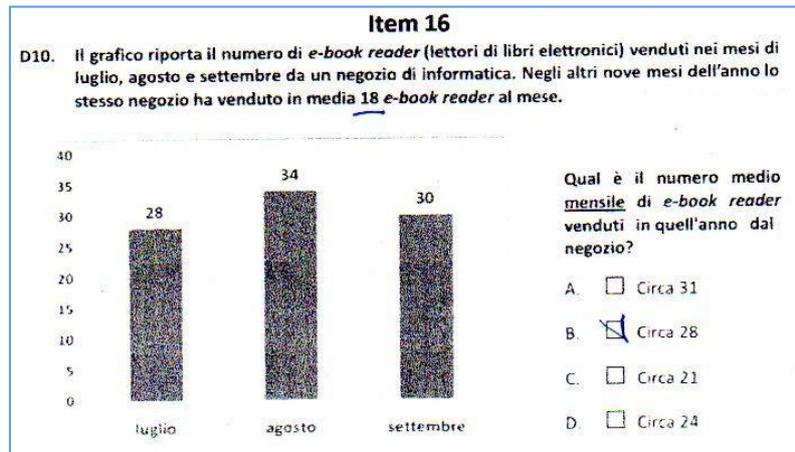


Fig. 12 – esempio di risposta

Terzo quesito

Il terzo quesito (Fig. 13), sempre di grado 10, era uscito nella prova dell'anno 2017. In questo caso la particolarità della richiesta è legata al fatto che i dati non sono discreti, ma presentati in intervalli.

D22. Agli alunni di una classe viene chiesto per quanto tempo al giorno, in media, utilizzano la connessione a Internet con i loro dispositivi (PC, Tablet, Smartphone, ...). I risultati del sondaggio sono riportati nella seguente tabella:

Minuti di connessione a Internet	Frequenze assolute
Da 0 minuti fino a 60 minuti	2
Più di 60 minuti fino a 120 minuti	4
Più di 120 minuti fino a 180 minuti	12
Più di 180 minuti fino a 300 minuti	8

Quale tra le seguenti espressioni permette di calcolare il tempo medio giornaliero di connessione a Internet degli alunni della classe?

A. $\frac{30 + 90 + 150 + 240}{4}$

B. $\frac{60 \cdot 2 + 120 \cdot 4 + 180 \cdot 12 + 300 \cdot 8}{2 + 4 + 12 + 8}$

C. $\frac{30 \cdot 2 + 90 \cdot 4 + 150 \cdot 12 + 240 \cdot 8}{2 + 4 + 12 + 8}$

D. $\frac{2 + 4 + 12 + 8}{4}$

Fig. 13 – quesito 3 grado 10 anno 2017

Come per il precedente, anche per questo item possiamo osservare che solo la quarta secondaria di secondo grado ha ottenuto un risultato percentuale migliore del campione Invalsi, relativo sempre al Grado 10 (Fig. 14). Tuttavia l'andamento nel nostro campione segue quello tipicamente

in verticale, che ci aspettavamo anche per gli altri quesiti, ma che è stato rilevato solo per questo, come comunicato anche dai docenti somministratori.

Risultati

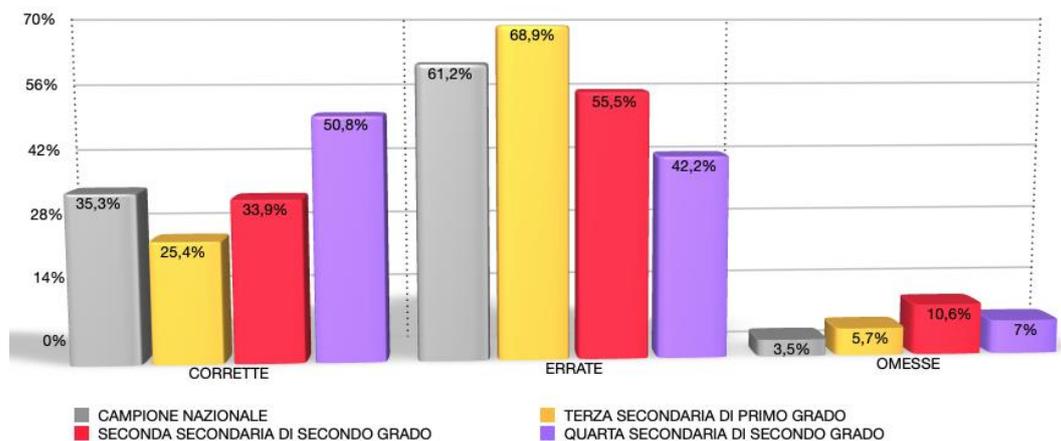


Fig. 14 - Digramma che rappresenta i risultati relativi al quesito 3

Dalle distribuzioni delle risposte possiamo osservare come anche per la scelta dei distrattori non ci siano delle differenze significative tra i diversi ordini di scuola.

Questi aspetti tipici della matematica, e in particolare relativi a Dati e Previsioni, sono spesso affrontati in modo non sempre ineccepibile nella scuola, come rilevato anche da diversi autori (Baccaglini et al., 2017, D'Amore e Sbaragli, 2011).

Distribuzione delle risposte

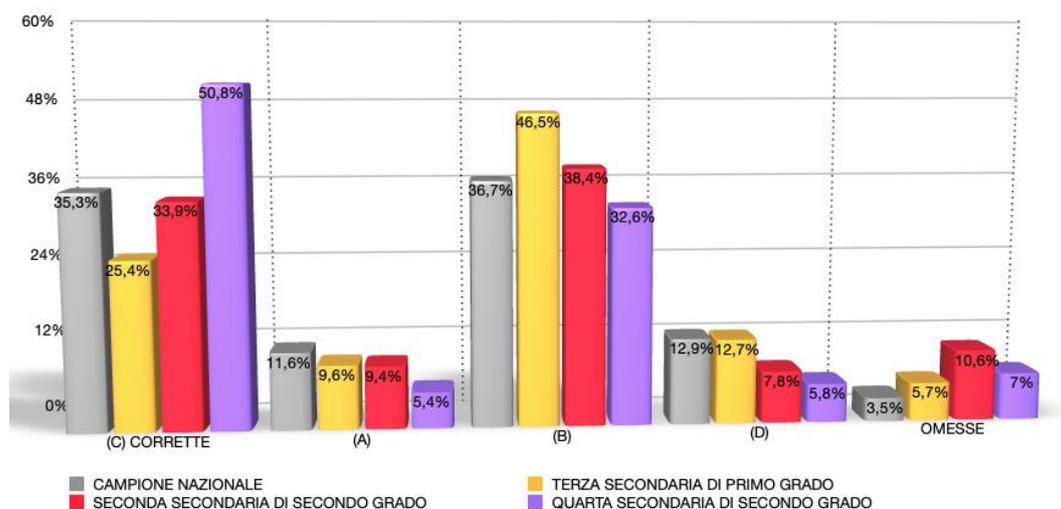


Fig. 15 - Digramma che rappresenta le percentuali di risposte relative al quesito 3

Dalla distribuzione dei distrattori (Fig. 15) possiamo notare come quello B sia stato il più selezionato, anche se con percentuali diverse nei vari ordini. In questo caso è stato riconosciuto il tipo di media richiesto, ma è stato scelto il valore maggiore di ogni intervallo anziché quello medio.

Questo è maggiormente giustificabile per il 1° ciclo in quanto questo aspetto non è esplicitamente indicato nelle Indicazioni Nazionali.

Conclusione

In genere ci si aspetta che, col proseguo del percorso scolastico di uno studente, le competenze matematiche possano solo consolidarsi. Lo scopo della nostra ricerca è stato quello di analizzare il comportamento di studenti del primo e secondo ciclo di fronte a dei quesiti di un ambito matematico, Dati e Previsioni, talvolta trattato con eccessiva sufficienza a scuola, in cui spesso si ritiene che la matematica sia soprattutto algebra, poi geometria e, “solo se avanza tempo”, anche un po’ di statistica e probabilità. Nella programmazione degli argomenti di matematica, infatti, non viene dato uguale peso ai quattro ambiti classici (Numeri, Relazioni e Funzioni, Dati e previsioni, Spazio e Figure), come appare evidente per il caso particolare del calcolo di una “media ponderata”.

Abbiamo infatti scelto tre quesiti particolari, il primo con lettura di un grafico e risposte ad esso relative, gli altri due con il calcolo di valori medi non sempre affrontati a scuola per i motivi già detti.

I risultati, tranne per il terzo quesito, in cui veniva già descritto il tipo di operazione necessario per il calcolo, l’andamento dei risultati del nostro campione non è stato in linea con quanto ci aspettavamo pensando ad una normale logica verticale, per il quale si pensa che col proseguire dei gradi scolastici vi sia una normale evoluzione nei livelli di competenze acquisite dagli studenti.

Uno dei problemi, secondo noi, è legato al fatto che non vengano ripresi nei gradi successivi alcuni argomenti di base che avrebbero necessità di maggiore “manutenzione”, (QDR Invalsi). Un altro, sempre presente anche negli altri ambiti è legato alle difficoltà nell’interpretazione di situazioni problematiche e di comprensione del testo.

Il calcolo della cosiddetta “media ponderata” non è direttamente previsto nelle Indicazioni del 1° ciclo, mentre lo è in quelle del secondo e nelle linee guida. Di questo fatto, ancora però, non tutti gli insegnanti del secondo ciclo sembrano essersene accorti o forse non lo ritengono davvero importante. Da nostri precedenti lavori e anche da alcune ricerche e interviste effettuate emerge che questo fatto è forse legato alla carenza di preparazione degli insegnati nell’ambito di Dati e Previsioni, che li porta non svilupparlo molto o comunque a dare priorità ad altri argomenti più noti.

La media ponderata, anche se non fatta nel corso del primo ciclo, dovrebbe tuttavia essere ripresa e “ricontestualizzata” nel biennio di secondaria di II grado. Dai risultati da noi ottenuti, invece, questo aspetto non appare evidente. Anche il fatto di non ricordare di aver visto a scuola, e non solo, un aspetto importante dei valori medi come la moda, la dice lunga su quanto questi aspetti non vengano spesso ripresi nel secondo ciclo.

Nei quesiti invalsi spesso è fondamentale anche leggere attentamente il testo e molti degli errori possono derivare anche da una loro lettura frettolosa e superficiale, che porta ad una comprensione sbagliata delle richieste (Zan, 2016).

Come per il primo quesito uno degli errori tipici degli studenti nella risoluzione dei problemi è pure la mancata considerazione della plausibilità dei risultati ottenuti, anche parziali o intermedi (Polya, 2016).

La nostra intenzione è quella di continuare in questa ricerca utilizzando anche le numerose informazioni raccolte, oltre che dal materiale cartaceo, dalle interviste e dalle riposte fornite in moduli Google.

Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

EDiMaST rimane neutrale per quanto riguarda le rivendicazioni giurisdizionali nelle mappe pubblicate e nelle affiliazioni istituzionali.

Bibliografia

- Baccaglini-Frank A., Di Martino P., Natalini R., Rosolini G. (2017). *Didattica della matematica*, Mondadori Università, Milano.
- Brousseau G. (1986). *La relation didactique: le milieu*. Actes de la IVème Ecole d'Été de didactique des mathématiques, pp. 54-68, IREM Paris.
- D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Pitagora editrice, Bologna.
- D'Amore B., Sbaragli S. (2011). *Principi di base di Didattica della matematica*. Pitagora editrice, Bologna.
- Polya G. (2016). *Come risolvere i problemi di matematica*. Utet Università, Torino.
- Zan R. (2016). *I problemi di matematica*. Carrocci editore, Roma.
- Zan R., Baccaglini-Frank A. (2017). *Avere successo in matematica. Strategie per l'inclusione e il recupero*. Utet, Torino.

Sitografia

Gestinv 3.0 – Archivio interattivo delle prove Invalsi – <https://www.gestinv.it/Index.aspx>

Invalsiopen – sito ufficiale area prove Invalsi – <https://www.invalsiopen.it/>

Gli Autori



Stefano Babini

Liceo Artistico Statale “Paolo Toschi”
Via Toschi, 1
Parma (PR)
stefano0011@libero.it
Italy



Ivan Graziani

Istituto Comprensivo di Santa Sofia – Scuola Secondaria di I grado “Galileo Galilei”
Via Arcangeli, 1
47018 Santa Sofia (FC)
graziani.ivan@tin.it
Italy

Liceo Artistico Statale “Paolo Toschi”

Received May 16, 2021; revised June 14, 2021; accepted June 21, 2021; published online June 30, 2021

Open Access This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)



Open Access This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License, which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons licence, and indicate if changes were made. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons licence, unless indicated otherwise in a credit line to the material. If material is not included in the article's Creative Commons licence and your intended use is not permitted by statutory regulation or exceeds the permitted use, you will need to obtain permission directly from the copyright holder. To view a copy of this licence, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.