

On the braid groups I

Panagiotis Ligouras

Abstract. *The braid group on n letters is an abstract group generated by two relations and a set of $n-1$ generators. In this article, some aspects of the structure of the braid group B_n will be presented. More precisely, we will investigate properties involving the generators of the group.*

Key words. *Braid, braid group.*

Sommario. *Il gruppo treccia su n lettere è un gruppo astratto generato da due relazioni e da un insieme di $n-1$ generatori. In questo articolo, si presenteranno alcuni aspetti della struttura del gruppo treccia B_n . Più precisamente, si investigherà su proprietà che coinvolgono i generatori del gruppo.*

Parole chiave. *Treccia, gruppo treccia.*

Introduzione, preliminari e notazioni

I principali risultati di questo articolo sono, la Proposizione 32, il Teorema 37, la Proposizione 38, il Corollario 39 e il Teorema 44.

Le trecce in natura hanno una storia molto antica. Una treccia è una struttura formata dall'intrecciamento di due o più fili di materiale flessibile come fibre tessili, plastica, metallo, corde, o usata come acconciatura dei capelli. La treccia come capigliatura fu sviluppata nell'Africa occidentale e successivamente in Egitto prima del 4.000 a.C. L'intreccio crea una struttura complessa che è più forte dei singoli elementi (fili) non intrecciati. L'etimologia della parola treccia non è chiara, potrebbe derivare dalla parola greca *tricha* (capello, in tre) o dal latino *tricae* (viluppo) o *trix* (capello). Oltre l'intreccio dei capelli, oggi le trecce si osservano e si utilizzano in molteplici campi di applicazione, come per esempio nel settore tessile, costruzione di corde e di cavi, in arte, in elettrotecnica, in elettronica, in informatica, in agricoltura, per scopi educativi, ect.

In matematica il concetto di “treccia” è stato affrontato, in modo sistematico, per la prima volta da Artin. I primi due lavori scientifici che posano le basi per lo sviluppo matematico, ancora oggi in evoluzione, dei monoidi e dei gruppi di trecce sono quello del 1925 [1] e quello del 1947 [2]. In questo lavoro indicheremo il gruppo treccia con B_n .

Diagramma treccia

Definizione 1 Si considerino n fili. Ogni filo ha due estremi uno superiore ed uno inferiore. Un *diagramma a treccia* o *diagramma treccia* su n -filamenti consiste in n fili con i punti finali superiori fissi e terminali inferiori mobili. I punti finali superiori dei fili sono allineati da sinistra a destra su una linea orizzontale (superiore) e i punti terminali inferiori sono allineati da sinistra verso destra su una linea orizzontale (inferiore). Quindi, avendo gli estremi inferiori liberi i fili possono essere intrecciati. Ogni intreccio consiste nello scambio di due successivi punti finali inferiori, applicando una mezza torsione che può essere effettuata sia in senso orario che antiorario se vista dall'alto (vedi Fig. 1) questo tipo di torsione si chiama *movimento elementare di intreccio* [15]. Trecciare n filamenti consiste nel ripetere un numero finito di volte il movimento elementare di intreccio in tutti gli n fili o in una parte di essi. Dopo aver finito l'intreccio e realizzata la treccia desiderata, i fili possono ancora muoversi individualmente, a condizione che la loro parte superiore e le estremità inferiori rimangano immobili, e che i fili non si tocchino l'uno con l'altro. L'interruzione del filo etichettato come 2 che notiamo alla figura (vedi Fig. 1) significa che questo filo passa sotto il filo etichettato come 1.

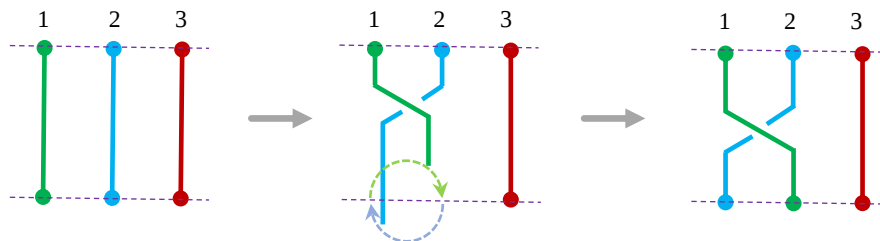


Fig. 1 – movimento elementare di intreccio applicando una mezza torsione in B_3

La struttura dell'incrocio non è reale ma è un artefatto della proiezione sul piano.

I generatori $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$, del gruppo treccia B_n che vedremo in seguito, considerati da un punto di vista geometrico, rappresentano gli intrecci realizzati applicando una mezza torsione in senso antiorario [25, 13], mentre $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}$ rappresentano gli intrecci realizzati applicando una mezza torsione in senso orario. Volendo, possiamo pensare che in una mezza torsione in senso antiorario il filamento di sinistra passa da sopra al filamento di destra e in quel punto viene collocato un opportuno generatore σ_i , mentre se la mezza torsione si effettua in senso orario il filamento di sinistra passa sotto il filamento di destra e corrisponde a un opportuno generatore che indichiamo σ_i^{-1} . Questi due tipi di incroci si chiamano *intrecci reali* o *incroci reali* o *intrecci classici* o *incroci classici*.

Geometricamente, i filamenti di una treccia vanno dalla posizione iniziale di sopra alla posizione finale di sotto monotonicamente, e di conseguenza non si avvolgono su sé stessi. Questo significa che nessuna linea parallela alle linee delle posizioni iniziali e finali della treccia incontra ogni singolo filamento di essa in più di un punto. Questo è il requisito che rende le trecce sostanzialmente più semplici dei nodi e che consente di definire una struttura di gruppo sulle trecce.

Nota 2. Alcuni autori [1, 7, 11, 16, 29] considerino positivi i generatori costruiti con una torsione in senso orario.

Deformazione elementare

Definizione 3. Si considera una treccia come una curva poligonale. Si suppone che una treccia γ abbia i punti A e B come vertici. Si può quindi creare un nuovo punto C , eliminare il segmento AB e creare i segmenti AC e CB (vedi Fig. 2). La deformazione così descritta, e il suo inverso, si chiama *deformazione elementare* se e solo se il triangolo ABC non interseca altre stringhe e incontra solo la stringa corrente lungo il suo lato AB .

Definizione 4. Due trecce u e v si chiamano *trecce isotopiche*, se e solo se u può essere trasformata in v usando un numero finito di deformazioni elementari. Per indicare che due trecce sono isotopiche si scrive $u \cong v$.

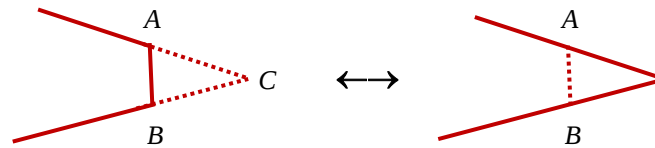


Fig. 2 – illustrazione di una deformazione elementare

Mosse di Reidemeister

Le relazioni del gruppo treccia sono strettamente collegate alle “mosse di Reidemeister” della teoria dei nodi [22].

Definizione 5. Le mosse di Reidemeister sono tre e sono le seguenti:

- La *prima mossa di Reidemeister* o *mossa R1*, consente di effettuare una delle seguenti sostituzioni (vedi Fig.3) di un frammento di un diagramma di collegamento:



Fig. 3 – la prima mossa di Reidemeister o mossa R1

- La *seconda mossa di Reidemeister* o *mossa R2* consente di effettuare una delle sostituzioni illustrate in figura (vedi Fig.4).

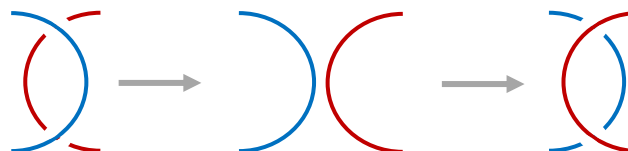


Fig. 4 – la seconda mossa di Reidemeister o mossa R2

- La *terza mossa di Reidemeister*, o *mossa R3*, consente di effettuare una delle sostituzioni illustrate in figura (vedi Fig.5).

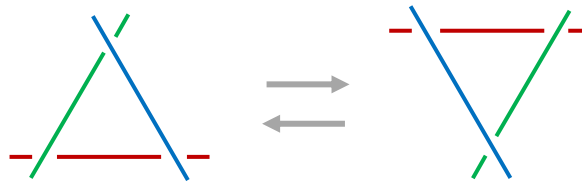
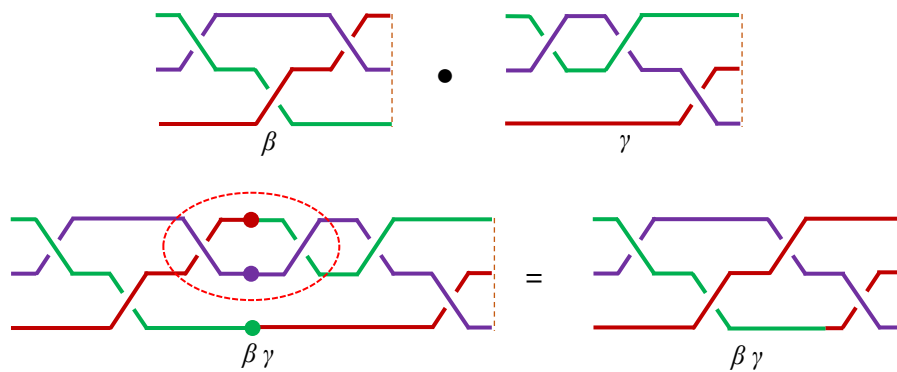


Fig. 5 – la terza mossa di Reidemeister o mossa R3

Concatenazione

Sappiamo che il “prodotto” tra due trecce $\beta, \gamma \in B_n$, con $n \geq 1$, è la loro *concatenazione* (o *giustapposizione*) e genera una nuova treccia che chiamiamo $\beta\gamma \in B_n$. La concatenazione, che è un’operazione binaria, si effettua in questo modo: la treccia γ si posiziona sotto la treccia β in modo da poter unire la fine del primo filo della β con il primo della γ e continuare la stessa operazione in sequenza con gli altri fili delle due trecce uno dopo l’altro e finire dopo aver collegato la fine dell’ennesimo filo della β con l’inizio dell’ennesimo filo della γ . La nuova treccia che si è formata è la $\beta\gamma$. La figura (Fig. 6) presenta questa operazione.

Fig. 6 – Prodotto tra due trecce del gruppo B_3

Nota 6. Le connessioni tra i gruppi di treccia, i diagrammi a treccia e gli spazi di configurazione porteranno all’approccio geometrico che esploreremo in questo lavoro, ma hanno anche implicazioni profonde nell’approccio algebrico che dobbiamo seguire prioritariamente cercando nel frattempo di non fare confusione tra i due approcci geometrico e algebrico.

Anche se B_n potrebbe avere una sorprendente somiglianza con D_n , dobbiamo escludere dalle nostre menti qualsiasi forma di significato geometrico percepito per gli elementi in B_n , e pensare il B_n come un gruppo strettamente astratto. Quindi, per la stessa presentazione di B_n con la sua definizione, le sole relazioni in B_n sono quelle previste dalla definizione stessa o una conseguenza di quelle.

Concetti di base

Siano $(G, \bullet, e)$ e $(H, *, e)$ gruppi. Un’applicazione $\varphi : G \rightarrow H$ è detta *omomorfismo di gruppi*

o semplicemente *omomorfismo* se per ogni $x, y \in G$ vale l'uguaglianza $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) * \varphi(y)$. Un omomorfismo quindi è un'applicazione tra due gruppi che conserva l'operazione e di conseguenza la struttura di gruppo di G . Se φ è biiettiva prende il nome di *isomorfismo di gruppi* o semplicemente *isomorfismo*. Se φ è un isomorfismo, si dice che G e H sono *gruppi isomorfi* e si denota $G \cong H$. Se la funzione $\phi : G \rightarrow G$ è un isomorfismo prende il nome di *automorfismo* di G . L'insieme degli automorfismi del gruppo G o *insieme degli automorfismi di G* si denota $\text{Aut}(G) = \{\phi \mid \phi : G \rightarrow G \text{ è un automorfismo di gruppo}\}$. L'insieme $\text{Aut}(G)$ è un gruppo rispetto all'operazione di composizione di funzioni e si indica $(\text{Aut}(G), \circ, id)$.

Il lettore volendo approfondire i concetti esposti in questo lavoro può consultare le seguenti fonti: [8], [20], [24], [26], [27].

Il gruppo treccia B_n

Il gruppo treccia di Artin è un gruppo discreto e infinito che generalizza il gruppo simmetrico S_n . In seguito diamo una definizione del gruppo treccia presentandolo mediante generatori e relazioni, [14, 21, 30, 4].

Definizione 7 ([1]). Il *gruppo treccia di Artin* su n lettere o *gruppo treccia* su n lettere, B_n , è un gruppo astratto generato da $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ come segue

$$B_n := \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & |i - j| = 1 \quad i, j \in \{1, \dots, n-1\} \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & |i - j| > 1 \quad i, j \in \{1, \dots, n-1\} \end{array} \right\rangle.$$

Gli elementi $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ prendono il nome di *generatori* di B_n o *generatori canonici* o *generatori di Artin* o *generatori classici*.

Ogni generatore $\sigma_i \in B_n$.

Le due relazioni

$$(R0) \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{per } |i - j| > 1$$

$$(R3) \quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n-2$$

prendono il nome di *relazioni delle trecce* o *relazioni canoniche* [6] o *isotopie di treccia* [5].

La relazione $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ prende il nome *relazione di treccia*, mentre la $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ viene chiamata *relazione di commutatività* (vedi Fig.7).

Ogni elemento $\beta \in B_n$ prende il nome di *treccia (braid)* o *treccia a n -fili* o *n -treccia* [23].

Ogni lettera dell'alfabeto di B_n può essere chiamata anche *filo* o *filamento (strand)*.

Ciascuno dei generatori, in un significato geometrico, rappresenta la torsione di due filamenti adiacenti l'uno intorno all'altro in una specifica direzione.

La presentazione utilizzata per definire il gruppo B_n si chiama *presentazione standard* [16] o *presentazione canonica* [19] o *presentazione di Artin*.

Osservazione 8. Ogni possibile relazione nel gruppo B_n è una conseguenza dell'una o dell'altra o di entrambe le relazioni della definizione di B_n .

Mentre gli elementi del gruppo B_n si chiamano *trecce* gli elementi del gruppo generato dai generatori $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ ma senza rispettare le relazioni di treccia (R0), (R3) e la relazione (R2)

che vedremo in seguito (vedi Fig.9), si chiamano *parole treccia*.

Naturalmente, esistono anche altre presentazioni del gruppo treccia.

La seguente è una ulteriore formulazione equivalente della definizione classica di B_n [9]:

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j \sigma_i \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} = 1 & \text{se } |i-j|=1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n-1\} \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} = 1 & \text{se } |i-j|>1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n-1\} \end{array} \right. \right\rangle.$$

Osservazione 9. Come è stato fatto in altri argomenti anche nell'insieme delle trecce si può introdurre il concetto della *potenza*, per ogni $\beta \in B_n$, come segue:

$$\sigma^n := \underbrace{\sigma \sigma \sigma \dots \sigma}_{n \text{ volte}}.$$

Sia numero intero $n > 0$. La potenza ennesima di una treccia $\beta \in B_n$ è definita induttivamente come segue:

$$\beta^0 = 1, \quad \beta^1 = \beta, \quad \beta^2 = \beta^1 \beta, \quad \dots, \quad \beta^n = \beta^{n-1} \beta.$$

Esempio 10. Per ogni generatore $\sigma_i \in B_n$, $1 \leq i \leq n-1$ e per ogni numero intero $m > 0$ risulta:

$$\sigma_i^m := \underbrace{\sigma_i \sigma_i \sigma_i \dots \sigma_i}_{m \text{ volte}} \quad \text{e} \quad \sigma_i^{-m} := \underbrace{\sigma_i^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_i^{-1} \dots \sigma_i^{-1}}_{m \text{ volte}}.$$

Lemma 11. Per ogni generatore $\sigma_i \in B_n$, $1 \leq i \leq n-1$ e per ogni coppia di interi $p, q \in \mathbb{Z}$ risulta che

$$\sigma_i^p \sigma_i^q = \sigma_i^{p+q}.$$

Osservazione 12. Seguendo le indicazioni descritte nell'articolo di Ligouras [18] ogni elemento $\beta \in B_n$ è esprimibile in generale nella forma

$$\beta = \sigma_1^{\varepsilon_1} \sigma_2^{\varepsilon_2} \dots \sigma_m^{\varepsilon_m}, \quad \text{con } 1 \leq m, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$$

e dopo l'operazione di raggruppamento dei generatori utilizzando il concetto di potenza si scrive in un unico modo nella forma

$$\beta = \sigma_1^{v_1} \sigma_2^{v_2} \dots \sigma_k^{v_k}, \quad \text{con } k \leq m, \sigma_i \neq \sigma_{i+1} \text{ e } v_i \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

Convenzioni 13. Si usa scrivere σ_i al posto di σ_i^{+1} e 1_i o 1 o id_i al posto di σ_i^0 .

L'elemento neutro del gruppo B_n si indica con 1_{B_n} o 1_n o 1 o id_{B_n} ma anche con $1_{B_n} = 1_1 1_2 \dots 1_{i-1} \dots 1_n$ o $id_{B_n} = id_1 id_2 \dots id_i \dots id_n$.

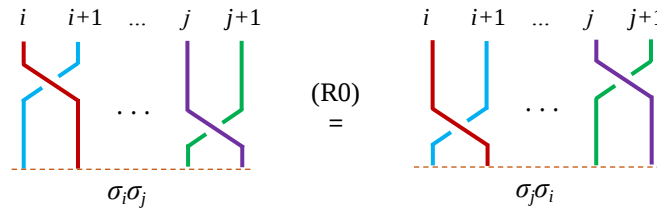
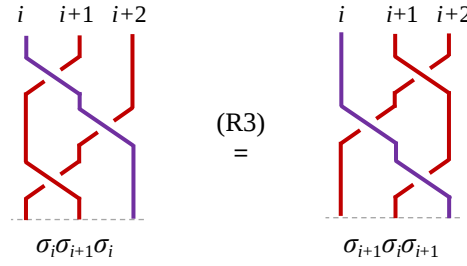
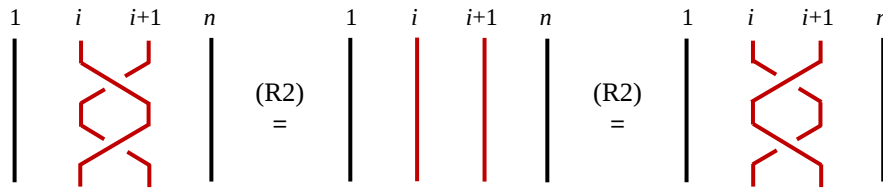


Fig. 7 – la relazione (R0) della definizione del gruppo delle trecce B_n

Fig. 8 – la relazione (R3) della definizione del gruppo B_n

Esempio 14. In B_n vale la seguente relazione:

$$\sigma_i \sigma_i^{-1} = 1_n = \sigma_i^{-1} \sigma_i.$$

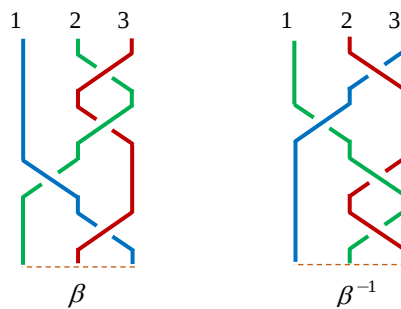
Fig. 9 – la relazione (R2) nel gruppo B_n

Osservazione 15. La relazione (R2) corrisponde all'inversibilità dei generatori σ_i , che è implicita nella presentazione del gruppo (vedi Fig.9). Questa relazione è strettamente collegata alla seconda mossa di Reidemeister R2.

La relazione di definizione (R3) del gruppo B_n è collegata alla terza mossa di Reidemeister R3 (vedi Fig.8).

La prima mossa di Reidemeister R1, non può essere utilizzata nei gruppi di treccia ma è molto utile alla teoria dei nodi.

Definizione 16. Sia $\beta \in B_n$ una treccia. Se per una treccia $\beta^{-1} \in B_n$ risulta $\beta \beta^{-1} = 1_{B_n}$ si dice che essa è la *treccia inversa* di β .

Fig. 10 – una treccia β e la sua inversa β^{-1}

Osservazione 17. Le due trecce β e β^{-1} sono una lo specchio dell'altra.

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}\} \subset B_n.$$

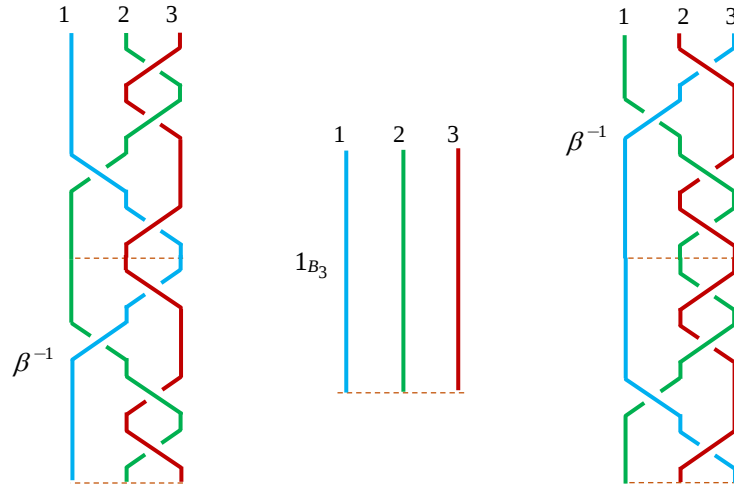


Fig. 11 – la composizione delle trecce β e della sua inversa β^{-1}

Si osserva che le parole $\beta \in B_n$ si possono visualizzare con i loro diagrammi treccia (generalmente in posizione verticale), come nella Fig. 10 e nella Fig. 11. Quindi, esiste una corrispondenza biunivoca tra le classi delle parole treccia e le classi isotopiche piane dei diagrammi treccia.

A questo punto possiamo dire che le trecce del gruppo B_n si formano con opportune operazioni di giustapposizione delle $2(n-1)$ trecce elementari e non banali che riportiamo graficamente (vedi Fig. 12) con i rispettivi diagrammi freccia.

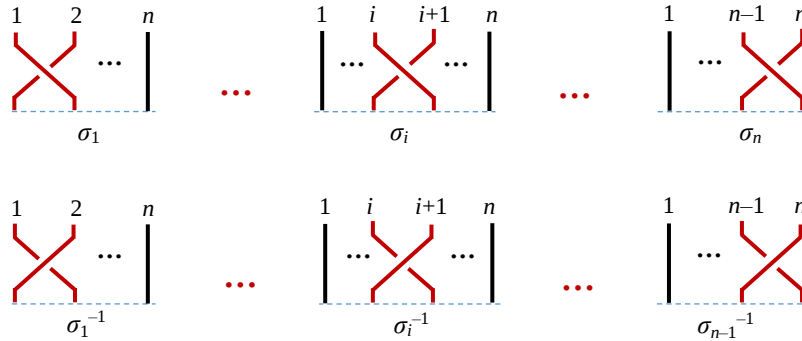


Figure 12 – Le trecce elementari del gruppo B_n

In figura (Fig. 12) l'insieme $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$ contiene tutte le trecce elementari, che sono i generatori del gruppo B_n , che si possono creare con due fili adiacenti i e $i+1$, per ogni $1 \leq i \leq n-1$, applicando una mezza torsione in verso anti-orario. L'insieme $\{\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1}\}$ contiene le trecce elementari che si creano con i fili i e $i+1$ applicando una mezza torsione in verso orario. È evidente che gli elementi del secondo insieme sono le *trecce inverse* degli elementi del primo.

Esempio 18. Le trecce elementari σ_i ed σ_i^{-1} sono una l'inversa dell'altra per ogni $1 \leq i \leq n-1$.

Esempio 19. Ogni treccia γ ha una treccia inversa γ^{-1} .

Per verificare il precedente esercizio è utile considerare che σ_i ed σ_i^{-1} generano il monoide B_n .

Teorema 20 ([15]). Sia un numero intero positivo n . Il gruppo delle trecce B_n è isomorfo al gruppo delle isotopie dell'insieme D_n dei diagrammi di treccia a n -fili.

Cioè, il gruppo delle trecce geometriche su n stringhe è isomorfo al gruppo astratto B_n generato da $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, con le relazioni di definizione (R0) e (R3).

Questo teorema induce ad un'applicazione $\vartheta : B_n \rightarrow D_n$ dalle parole β delle trecce di B_n ai diagrammi delle trecce dell'insieme D_n . Sappiamo che ogni treccia β è composta da un insieme di parole u . Si può paragonare la treccia come una frase. L'isomorfismo ϑ fa corrispondere β a un insieme $\{\vartheta(u) \mid u \in \beta\}$ dei diagrammi di treccia.

Osservazioni 21. $B_1 \cong \{1\}$ è un gruppo banale.



Fig. 13 – Diagramma a trecce di B_1

Il gruppo B_2 è generato da un unico generatore σ_1 senza alcuna relazione, quindi si tratta di un gruppo ciclico infinito.

$$B_2 = \langle \sigma_1 \mid - \rangle.$$

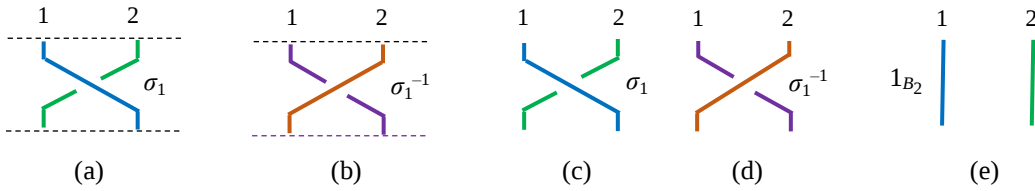


Fig. 14 – Diagramma a trecce nel gruppo B_2

La figura 14 (a) e la figura 14 (c) presentano la stessa mezza torsione mediante σ_1 dei due filamenti, o lettere adiacenti chiamate 1 e 2, l'uno intorno all'altro in modo che il filamento di sinistra chiamato 1 passa sopra di quello di destra chiamato 2. Questo modo di procedere in senso *anti-orario* lo indiciamo σ_1 .

La figura 14 (b) e la figura 14 (d) presentano la stessa torsione dei due filamenti, 1 e 2, l'uno intorno all'altro in modo che il filamento di sinistra chiamato 1 passa sotto di quello di destra chiamato 2. Questo modo di procedere in senso *orario* lo indiciamo σ_1^{-1} .

La figura 14 (e) presentano i due filamenti senza nessuna torsione. Questa situazione presenta il diagramma treccia associato all'*elemento neutro* del gruppo B_2 .

Convenzioni 22. Da ora in poi useremo la notazione degli esempi (c), (d) ed (e) della figura (Fig.14) piuttosto che quella utilizzata in (a) e in (b) nei diagrammi a trecce.

In alcune situazioni per comodità e per maggiore chiarezza di rappresentazione useremo una visualizzazione orizzontale al posto di quella verticale per i diagrammi come illustra la seguente figura. In figura (Fig. 15) le presentazioni (a) e (b) sono equivalenti da ora in poi.

I diagrammi presentati verticalmente come la figura 15 (a) si leggono da sopra verso sotto e la

parte fissa dei fili è quella di sopra. I digrammi presentati orizzontalmente come la figura 15 (b) si leggono da sinistra verso destra e la parte fissa dei filamenti è quella di sinistra.



Fig. 15 – Presentazione equivalente di due trecce nel gruppo B_2

La numerazione dei fili, che si mette sempre nella parte dove essi sono fissi, nel caso della treccia in verticale sopra è da sinistra verso destra, (vedi Figura 15 (a)), mentre nel caso della treccia in orizzontale a sinistra è da sotto verso sopra (vedi Figura 15 (b)).

Sono molti ancora gli autori, per esempio [12], che non rispettano questo modo di impostazioni dei diagrammi ma anche su questo la matematica rispetta la diversità a discapito di una lettura inequivocabile e universale.

Lemma 23. Ogni treccia del gruppo B_2 , $\beta \in B_2$, si presenta solo nella forma $\beta = \sigma_1^m$, per qualche numero $m \in \mathbb{Z}$.

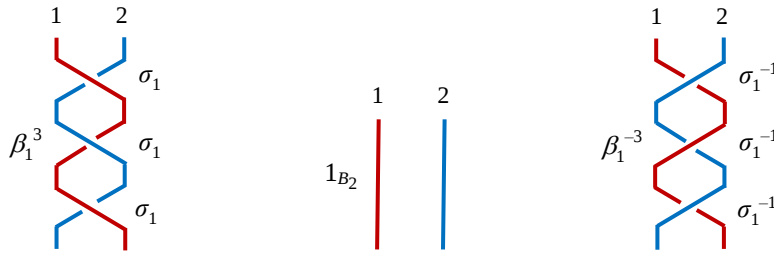


Fig. 16 – Diagramma delle trecce β_1^3 , β_1^{-3} e 1_{B_2} nel gruppo B_2

Lemma 24. Il gruppo di trecce B_2 è un gruppo libero di rango uno è isomorfo al gruppo $\mathbb{Z}$:

$$B_2 \cong \mathbb{Z}.$$

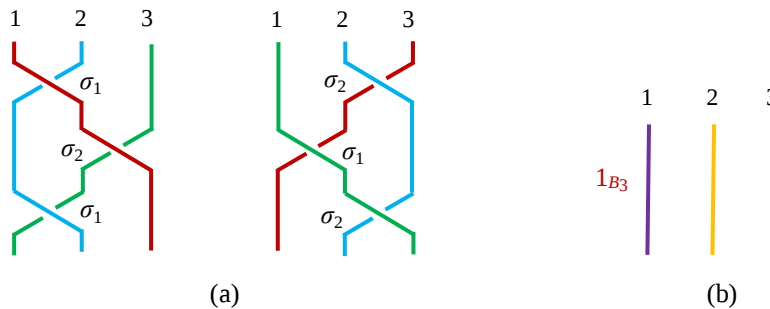


Fig. 17 – Diagramma di trecce nel gruppo B_3

Il gruppo B_3 è generato da σ_1 ed σ_2 e ha solo $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ come relazione:

$$B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \rangle.$$

In figura (Fig. 17 (a)) sono presentati i diagrammi delle due trecce associate alla relazione $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$ prevista dalla definizione del gruppo B_3 . La figura 17 (b) presenta la treccia associata all'elemento neutro 1_{B_3} o 1_3 di B_3 .

Osservazione 25. Considerando il gruppo B_3 , la relazione $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$ è equivalente alla relazione $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} = 1_3$.

Lemma 26. Il gruppo B_3 ha la seguente presentazione

$$B_3 \cong \langle \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1, \sigma_1 \sigma_2 \mid (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1)^2 = (\sigma_1 \sigma_2)^3 \rangle.$$

Osservazione 27 ([23, p.20]). Il lemma può essere formulato anche come segue:

$$B_3 \cong \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \rangle \cong \langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle.$$

Esempio 28. Il gruppo B_3 è isomorfo al gruppo

$$B_3 \cong \langle u, v, w \mid uv = vw = wu \rangle.$$

Lemma 29 ([10]). Il gruppo B_4 è generato da σ_1, σ_2 ed σ_3 e ha tre relazioni.

$$B_4 \cong \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2, \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3, \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_1 \sigma_3 \rangle.$$

Esempio 30. Siano gli interi $1 \leq i, j, k \leq n-1$ e il gruppo treccia B_n . Allora,

$$\sigma_i \sigma_j^{-1} = (\sigma_k \sigma_i^{-1})^{-1} (\sigma_k \sigma_j^{-1}).$$

Infatti, $\sigma_i \sigma_j^{-1} = \sigma_i (\sigma_k^{-1} \sigma_k) \sigma_j^{-1} = (\sigma_i \sigma_k^{-1}) (\sigma_k \sigma_j^{-1}) = (\sigma_k \sigma_i^{-1})^{-1} (\sigma_k \sigma_j^{-1})$.

Lemma 31 ([17]). In ogni gruppo B_n , con $n \geq 3$, indicando $\alpha_{i,j} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_i$, sono valide le seguenti relazioni:

- 1) $\sigma_i^2 \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^2$.
- 2) $\alpha_{i,j} \sigma_r = \sigma_{r-1} \alpha_{i,j}$ se $i < r < j$.
- 3) $\alpha_{i,j} \alpha_{r,s} = \alpha_{r-1,s-1} \alpha_{i,j}$ se $i < r < s \leq j$.

Proposizione 32. In ogni gruppo B_n , con $n \geq 3$, sono valide le seguenti:

- 1) $\sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}$.
- 2) $\sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}$.
- 3) $\sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1}$.
- 4) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1}$.
- 5) $\sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}$.
- 6) $\sigma_i \sigma_{i+1}^k \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^k \sigma_{i+1}$ per ogni intero k .

Dim. 1) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$;

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1};$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1};$$

$$\begin{aligned}
\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_{i+1}^{-1} &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}; \\
\sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}; \\
\sigma_i \sigma_i^{-1} &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1}; \\
1 &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1}; \\
\sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} 1 &= \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1}; \\
\sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} &= \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}; \\
\sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i; \\
\sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} 1 \sigma_i; \\
\sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1}; \\
\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}; \\
\sigma_{i+1} 1 \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}; \\
\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1}; \\
\sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_{i+1}; \\
\sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} &= \sigma_{i+1} \sigma_i 1; \\
\sigma_i \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} &= \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i; \\
\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} &= \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i.
\end{aligned}$$

6) Proviamo la relazione per $k > 0$. Analogamente si procede per $k < 0$.

$$\begin{aligned}
\sigma_i \sigma_{i+1}^k \sigma_i^{-1} &= (\sigma_{i+1}^{-1} \sigma_{i+1}) \sigma_i \sigma_{i+1}^k \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_{i+1}^{k-1} \sigma_i^{-1} \\
&= \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{k-1} \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_{i+1}^{k-2} \sigma_i^{-1} \\
&= \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{k-2} \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{k-2} \sigma_i^{-1} \\
&= \dots \\
&= \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{k-2} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^2 \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{k-2} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \\
&= \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{k-2} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{k-1} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} \\
&= \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{k-1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^k \sigma_{i+1}.
\end{aligned}$$

Si procede analogamente per gli altri casi. $\square$

Definizione 33. Siano due trecce $u, v \in B_n$. Le trecce u e v si chiamano *trecce equivalenti* o *trecce uguali*, e si indica $u \sim v$, se la u può essere trasformata in v mediante una sequenza finita di applicazioni delle relazioni delle trecce $u = u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k = v$.

Esempio 34. La figura seguente rappresenta i diagrammi treccia delle parole del gruppo delle trecce B_4 $\alpha = \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3$ e $\beta = \sigma_2^{-1} \sigma_1^4 \sigma_2 \sigma_3$. Allora $\alpha \sim \beta$.

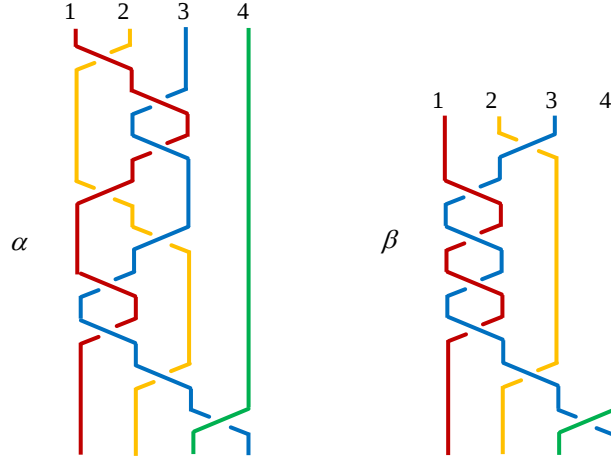


Fig. 18 – $\alpha \sim \beta$ in B_4

Infatti,

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \\
 &= \sigma_1 \sigma_2 (\sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1}) \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \\
 &= \sigma_1 \sigma_2 (\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1) \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \\
 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \\
 &= (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1}) \sigma_2^{-1} \sigma_1^3 \sigma_2 \sigma_3 \\
 &= (\sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2) \sigma_2^{-1} \sigma_1^3 \sigma_2 \sigma_3 \\
 &= \sigma_2^{-1} \sigma_1 (\sigma_2 \sigma_2^{-1}) \sigma_1^3 \sigma_2 \sigma_3 \\
 &= \sigma_2^{-1} \sigma_1 (id) \sigma_1^3 \sigma_2 \sigma_3 \\
 &= \sigma_2^{-1} \sigma_1^4 \sigma_2 \sigma_3 = \beta.
 \end{aligned}$$

□

Osservazione 35. In ogni gruppo B_n con $n \geq 3$, la relazione $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ è equivalente alla relazione $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} = 1_{B_n}$ per ogni $1 \leq i \leq n-2$.

Lemma 36. Siano gli interi $n \geq 6$, $1 \leq i, j \leq n-1$ e il gruppo B_n . Allora, esiste almeno un intero $1 \leq k \leq n-1$ tale che il generatore σ_k commuta sia con σ_i che con σ_j .

Dim. Senza perdere la generalità si considera $i < j$. Se $j = i+1$ ed essendo $n \geq 6$ esiste k tale che $i-k \geq 2$ oppure $k-i \geq 3$. In entrambi i casi risulta $\sigma_k \sigma_i = \sigma_i \sigma_k$ e $\sigma_k \sigma_j = \sigma_j \sigma_k$.

Se $j > i+1$, posto $k = j$ risulta $\sigma_k \sigma_j = \sigma_j \sigma_j = \sigma_j \sigma_k$ e $\sigma_k \sigma_i = \sigma_i \sigma_k$.

□

Teorema 37. Siano gli interi $n \geq 6$, $1 \leq i, j \leq n-1$, r, s, t e il gruppo B_n . Allora, esiste almeno un intero $1 \leq k \leq n-1$ tale che il generatore σ_k^t commuta sia con σ_i^r che con σ_j^s .

Dim. Si prova per $r, t > 0$ e $s < 0$, analogamente si procede per gli altri casi. Considerando il

Lemma 36 e le relazioni di definizione di B_n , si ha

$$\begin{aligned}
 \sigma_k^t \sigma_i^r &= \sigma_k^{t-1} \sigma_k \sigma_i \sigma_i^{r-1} = \sigma_k^{t-1} \sigma_i \sigma_k \sigma_i^{r-1} \\
 &= \sigma_k^{t-2} \sigma_k \sigma_i \sigma_k \sigma_i^{r-1} = \sigma_k^{t-2} \sigma_i \sigma_k \sigma_k \sigma_i^{r-1} = \sigma_k^{t-2} \sigma_i \sigma_k^2 \sigma_i^{r-1} \\
 &= \sigma_k^{t-3} \sigma_k \sigma_i \sigma_k^2 \sigma_i^{r-1} = \sigma_k^{t-3} \sigma_i \sigma_k \sigma_k^2 \sigma_i^{r-1} = \sigma_k^{t-3} \sigma_i \sigma_k^3 \sigma_i^{r-1} = \dots \\
 &= \sigma_i \sigma_k^t \sigma_i^{r-1} = \sigma_i \sigma_k^{t-1} \sigma_k \sigma_i \sigma_i^{r-2} = \sigma_i \sigma_k^{t-1} \sigma_i \sigma_k \sigma_i^{r-2} = \dots \\
 &= \sigma_i^2 \sigma_k^t \sigma_i^{r-2} = \dots = \sigma_i^m \sigma_k^t \sigma_i^{r-m} = \dots = \sigma_i^r \sigma_k^t.
 \end{aligned}$$

Dall'altra parte

$$\begin{aligned}
 \sigma_k^t \sigma_j^s &= \sigma_k^{t-1} \sigma_k \sigma_j \sigma_j^{s+1} = \sigma_k^{t-1} \sigma_j \sigma_k \sigma_j^{s+1} = \sigma_k^{t-2} \sigma_k \sigma_j \sigma_j^{s+1} \\
 &= \sigma_k^{t-2} \sigma_j \sigma_k \sigma_k \sigma_j^{s+1} = \sigma_k^{t-2} \sigma_j \sigma_k^2 \sigma_j^{s+1} = \dots \\
 &= \sigma_j \sigma_k^t \sigma_j^{s+1} = \dots = \sigma_j^m \sigma_k^t \sigma_j^{s+m} = \dots = \sigma_j^s \sigma_k^t.
 \end{aligned}$$

□

Proposizione 38. Siano i numeri interi $k, l \geq 1$. In ogni gruppo B_n , con $n \geq 3$, indicando $\alpha_{ij} = \sigma_{j-1} \dots \sigma_i$, sono valide le seguenti relazioni:

- 1) $\sigma_i^k \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^k.$
- 2) $\alpha_{ij} \sigma_r^k = \sigma_{r-1}^k \alpha_{ij} \quad \text{se } i < r < j.$
- 3) $\alpha_{ij}^k \alpha_{rs}^l = \alpha_{r-k, s-k}^l \alpha_{ij}^k \quad \text{se } i < r < s \leq j.$

Dim. Proviamo la prima relazione:

$$\begin{aligned}
 \sigma_i^k \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_i^{k-1} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_i^{k-1} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_i^{k-2} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\
 &= \sigma_i^{k-2} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^2 = \dots = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^k.
 \end{aligned}$$

Proviamo la seconda relazione:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ij} \sigma_r^k &= \sigma_{j-1} \dots \sigma_i \sigma_r^k = \sigma_{j-1} \dots \sigma_i \sigma_r \sigma_r^{k-1} = \sigma_{j-1} \dots \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_i \sigma_r \sigma_r^{k-1} \\
 &= \sigma_{j-1} \dots \sigma_r \sigma_{r-1} \sigma_r \dots \sigma_i \sigma_r^{k-1} = \sigma_{j-1} \dots \sigma_{r-1} \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_i \sigma_r^{k-1} \\
 &= \sigma_{r-1} \sigma_{j-1} \dots \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_i \sigma_r^{k-1} = \sigma_{r-1} \sigma_{j-1} \dots \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_i \sigma_r \sigma_r^{k-2} \\
 &= \sigma_{r-1} \sigma_{j-1} \dots \sigma_r \sigma_{r-1} \sigma_r \dots \sigma_i \sigma_r^{k-2} = \sigma_{r-1} \sigma_{j-1} \dots \sigma_{r-1} \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_i \sigma_r^{k-2} \\
 &= \sigma_{r-1}^2 \sigma_{j-1} \dots \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_i \sigma_r^{k-2} = \dots = \sigma_{r-1}^k \alpha_{ij}.
 \end{aligned}$$

Proviamo la terza relazione utilizzando anche il punto 2).

Risolviamo per primo il caso $k = l = 1$: $\alpha_{ij} \alpha_{rs} = \alpha_{r-1, s-1} \alpha_{ij}.$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ij} \alpha_{rs} &= \alpha_{ij} \sigma_{s-1} \sigma_{s-2} \dots \sigma_r = \sigma_{s-2} \alpha_{ij} \sigma_{s-2} \dots \sigma_r = \dots = \\
 &= \sigma_{s-2} \sigma_{s-3} \dots \sigma_{r-1} \alpha_{ij} = \alpha_{r-1, s-1} \alpha_{ij}.
 \end{aligned}$$

Adesso proviamo il caso generale

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ij}^k \alpha_{rs}^l &= \alpha_{ij}^{k-1} \alpha_{ij} \alpha_{rs} \alpha_{rs}^{l-1} = \alpha_{ij}^{k-1} \alpha_{r-1, s-1} \alpha_{ij} \alpha_{rs}^{l-1} \\
 &= \alpha_{ij}^{k-2} \alpha_{ij} \alpha_{r-1, s-1} \alpha_{ij} \alpha_{rs}^{l-1} = \alpha_{ij}^{k-2} \alpha_{r-2, s-2} \alpha_{ij} \alpha_{ij} \alpha_{rs}^{l-1} = \dots \\
 &= \alpha_{r-k, s-k} \alpha_{ij} \dots \alpha_{ij} \alpha_{ij} \alpha_{rs}^{l-1} = \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_{r-k, s-k}^2 \alpha_{ij} \dots \alpha_{ij} \alpha_{ij} \alpha_{rs}^{l-2} = \dots \\
&= \alpha_{r-k, s-k}^l \alpha_{ij}^k.
\end{aligned}$$

□

Corollario 39. Siano gli interi $k, l \geq 1$. In ogni gruppo B_n , con $n \geq 3$, indicando $\alpha_{ij} = \sigma_{j-1} \dots \sigma_i$, sono valide le seguenti relazioni:

- 1) $\sigma_i^{-k} \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-k}$.
- 2) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i^{-k} = \sigma_{i+1}^{-k} \sigma_i \sigma_{i+1}$.
- 3) $\sigma_i^{-k} \sigma_{i+1}^{-k} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i^{-k} \sigma_{i+1}^{-k}$.
- 4) $\sigma_i \sigma_{i+1}^{-k} \sigma_i^{-k} = \sigma_{i+1}^{-k} \sigma_i^{-k} \sigma_{i+1}$.
- 5) $\sigma_i^{-k} \sigma_{i+1}^{-k} \sigma_i^{-k} = \sigma_{i+1}^{-k} \sigma_i^{-k} \sigma_{i+1}^{-k}$.
- 6) $\alpha_{ij} \sigma_r^{-k} = \sigma_{r-1}^{-k} \alpha_{ij}$ se $i < r < j$.
- 7) $\alpha_{ij}^k \alpha_{rs}^{-l} = \alpha_{r-k, s-k}^l \alpha_{ij}^k$ se $i < r < s \leq j$.

Dim. Proviamo la prima relazione. Iniziamo con il caso $k = 1$: $\sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1}$.

$$\sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_{i+1},$$

$$\sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_{i+1} \sigma_i,$$

$$\sigma_i \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i,$$

$$\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i.$$

Adesso proviamo il caso generale

$$\begin{aligned}
\sigma_i^{-k} \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_i^{-k+1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i \\
&= \sigma_i^{-k+1} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} = \sigma_i^{-k+2} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \\
&= \sigma_i^{-k+2} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-k+2} \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-2} \\
&= \dots = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-k}.
\end{aligned}$$

Le dimostrazioni delle relazioni 2), 3) e 4) seguono un procedimento analogo a quello utilizzato per la 1).

Proviamo la relazione 5):

$$\sigma_i^{-k} \sigma_{i+1}^{-k} \sigma_i^{-k} = (\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i)^{-k} = (\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1})^{-k} = \sigma_{i+1}^{-k} \sigma_i^{-k} \sigma_{i+1}^{-k}.$$

Proviamo la relazione 6):

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij} \sigma_r^{-k} &= \sigma_{j-1} \dots \sigma_i \sigma_r^{-k} = \sigma_{j-1} \dots \sigma_i \sigma_r^{-1} \sigma_r^{-k+1} = \sigma_{j-1} \dots \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_i \sigma_r^{-1} \sigma_r^{-k+1} \\
&= \sigma_{j-1} \dots \sigma_r \sigma_{r-1} \sigma_r^{-1} \dots \sigma_i \sigma_r^{-k+1} = \sigma_{j-1} \dots \sigma_{r-1}^{-1} \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_i \sigma_r^{-k+1} \\
&= \sigma_{r-1}^{-1} \sigma_{j-1} \dots \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_i \sigma_r^{-k+1} = \sigma_{r-1}^{-1} \sigma_{j-1} \dots \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_i \sigma_r^{-1} \sigma_r^{-k+2} \\
&= \sigma_{r-1}^{-1} \sigma_{j-1} \dots \sigma_r \sigma_{r-1} \sigma_r^{-1} \dots \sigma_i \sigma_r^{-k+2} = \sigma_{r-1}^{-1} \sigma_{j-1} \dots \sigma_{r-1}^{-1} \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_i \sigma_r^{-k+2} \\
&= \sigma_{r-1}^{-2} \sigma_{j-1} \dots \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_i \sigma_r^{-k+2} = \dots = \sigma_{r-1}^{-k} \sigma_{j-1} \dots \sigma_r \sigma_{r-1} \dots \sigma_i = \sigma_{r-1}^{-k} \alpha_{ij}.
\end{aligned}$$

Proviamo la relazione 7) utilizzando anche il punto 6).

Risolviamo per primo il caso $k = l = 1$: $\alpha_{ij}\alpha_{rs}^{-1} = \alpha_{r-1\ s-1}^{-1}\alpha_{ij}$.

$$\begin{aligned}\alpha_{ij}\alpha_{rs}^{-1} &= \alpha_{ij}(\sigma_{s-1}\sigma_{s-2}\dots\sigma_{r+1}\sigma_r)^{-1} = \alpha_{ij}(\sigma_r^{-1}\sigma_{r+1}^{-1}\dots\sigma_{s-2}^{-1}\sigma_{s-1}^{-1}) \\ &= \sigma_{r-1}^{-1}\alpha_{ij}\sigma_{r+1}^{-1}\sigma_{r+2}^{-1}\dots\sigma_{s-2}^{-1}\sigma_{s-1}^{-1} \\ &= \sigma_{r-1}^{-1}\sigma_r^{-1}\alpha_{ij}\sigma_{r+2}^{-1}\sigma_{r+3}^{-1}\dots\sigma_{s-2}^{-1}\sigma_{s-1}^{-1} = \dots = \\ &= \sigma_{r-1}^{-1}\sigma_r^{-1}\dots\sigma_{s-2}^{-1}\alpha_{ij} = (\sigma_{s-2}\sigma_{s-1}\dots\sigma_{r-1})^{-1}\alpha_{ij} = \alpha_{r-1\ s-1}^{-1}\alpha_{ij}.\end{aligned}$$

Adesso proviamo il caso generale

$$\begin{aligned}\alpha_{ij}^k\alpha_{rs}^{-l} &= \alpha_{ij}^{k-1}\alpha_{ij}\alpha_{rs}^{-1}\alpha_{rs}^{-l+1} = \alpha_{ij}^{k-1}\alpha_{r-1\ s-1}^{-1}\alpha_{ij}\alpha_{rs}^{-l+1} \\ &= \alpha_{ij}^{k-2}\alpha_{ij}\alpha_{r-1\ s-1}^{-1}\alpha_{ij}\alpha_{rs}^{-l+1} = \alpha_{ij}^{k-2}\alpha_{r-2\ s-2}^{-1}\alpha_{ij}\alpha_{ij}\alpha_{rs}^{-l+1} = \dots \\ &= \alpha_{r-k\ s-k}^{-1}\alpha_{ij}\dots\alpha_{ij}\alpha_{ij}\alpha_{rs}^{-l+1} = \dots = \alpha_{r-k\ s-k}^{-2}\alpha_{ij}\dots\alpha_{ij}\alpha_{ij}\alpha_{rs}^{-l+2} \\ &= \dots = \alpha_{r-k\ s-k}^{-l}\alpha_{ij}^k.\end{aligned}$$

□

Proposizione 40. Siano un intero $n \geq 3$, il gruppo treccia B_n e $\beta, \gamma \in B_n$. Se la treccia γ si può ottenere dalla β con una serie finita di deformazioni elementari e di movimenti (R0) e (R3), allora β e γ hanno lo stesso numero di incroci.

Dim. Sia le deformazioni elementari che le relazioni di definizione (R0) ed (R3) non modificano per definizione il numero degli incroci di una treccia. Quindi, se la γ si può ottenere dalla β con una serie finita di movimenti di questo tipo, e non interviene mai la relazione (R2) durante l'intero processo, risulta che $\beta \sim \gamma$ e di conseguenza appartenendo allo stesso gruppo treccia B_n hanno lo stesso numero di incroci.

Proposizione 41. Siano le trecce β e γ . Se la treccia γ si può ottenere dalla β con una serie finita di deformazioni elementari e di movimenti (R0), (R2) e (R3), allora β e γ hanno lo stesso numero di filamenti.

Dim. Sia le deformazioni elementari che le relazioni di definizione (R0), (R2) e (R3) non modificano per definizione il numero dei filamenti di una treccia. Quindi, se la γ si può ottenere dalla β con una serie finita di movimenti di questo tipo risulta che $\beta \sim \gamma$ e di conseguenza appartenendo allo stesso gruppo treccia B_n hanno lo stesso numero di filamenti.

Proposizione 42 ([1]). Siano un intero $n \geq 3$, B_n il gruppo treccia di Artin su n lettere generato da $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ e la treccia $\zeta = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}$ di B_n . Allora per ogni $1 \leq i \leq n-2$ risulta

$$\zeta \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \zeta.$$

Dim. Si ha $\zeta \cdot \sigma_i = (\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1})\sigma_i = (\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{i-1}\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\dots\sigma_{n-1})\sigma_i$

$$\begin{aligned}&= \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{i-1}(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i)\sigma_{i+2}\dots\sigma_{n-1} \\ &= \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{i-1}(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1})\sigma_{i+2}\dots\sigma_{n-1} \\ &= \sigma_{i+1}(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{i-1}\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\dots\sigma_{n-1}) \\ &= \sigma_{i+1}(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}) = \sigma_{i+1} \cdot \zeta.\end{aligned}$$

□

Proposizione 43 ([3]). Siano intero $n \geq 2$, $n \neq 4$ e B_n il gruppo trecce di Artin su n lettere generato

da $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ e $1 \leq i \leq j \leq n-1$. Allora,

$$\sigma_i = \sigma_j \text{ se e solo se } i = j.$$

Dim. Proviamo $\sigma_i = \sigma_j$ implica $i = j$. L'affermazione è banale per $n = 2$ o 3 . Consideriamo $n \geq 5$. Consideriamo il caso $\sigma_1 = \sigma_i$ con $i > 1$. Se $i = n-1$, si ha $\sigma_1 = \sigma_i$ e $\sigma_2\sigma_i = \sigma_i\sigma_2$ per la (R0). Dalle due precedenti relazioni $\sigma_2\sigma_1 = \sigma_1\sigma_2$ che, sempre dalla (R0), è impossibile. Se $2 \leq i \leq n-2$, si ha $\sigma_1 = \sigma_i$ e $\xi \cdot \sigma_1 \cdot \xi^{-1} = \xi \cdot \sigma_i \cdot \xi^{-1}$. Utilizzando la Proposizione 42 si ha $\sigma_2 = \xi \cdot \sigma_1 \cdot \xi^{-1} = \xi \cdot \sigma_i \cdot \xi^{-1} = \sigma_{i+1}$ e di conseguenza $\sigma_2 = \sigma_{i+1}$; $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1$ che è impossibile.

La prova $i = j$ implica $\sigma_i = \sigma_j$ è ovvia. $\square$

Teorema 44. Siano gli interi $n \geq 2$, $n \neq 4$ e k e B_n il gruppo trecce di Artin su n lettere generato da $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ e $1 \leq i \leq j \leq n-1$. Allora,

$$\sigma_i^k = \sigma_j^k \text{ se e solo se } i = j.$$

Dim. Proviamo $\sigma_i^k = \sigma_j^k$ implica $i = j$. Consideriamo il caso $k < 0$. Analogamente si prova il caso $k > 0$. Utilizzando la proposizione 43, si ha

$$\sigma_i = \sigma_j \text{ implica } i = j;$$

$$\sigma_i^{-1} = \sigma_j^{-1} \text{ implica } i = j;$$

$$\sigma_i^{-2} = \sigma_i^{-1}\sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1} = \sigma_j^{-1}\sigma_j^{-1} = \sigma_j^{-2} \text{ implica } i = j$$

$$\text{e proseguendo così alla fine } \sigma_i^k = \sigma_j^k \text{ implica } i = j.$$

La prova $i = j$ implica $\sigma_i^k = \sigma_j^k$ è ovvia. $\square$

Si conclude questo lavoro con la presentazione di un teorema molto importante per i gruppi treccia. La sua utilità la vedremo in altri articoli che seguiranno.

Teorema 45 ([6]). Il gruppo B_n può essere incorporato nel gruppo di automorfismi $Aut(F_n)$.

Sia un gruppo libero $F_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ di rango n . Per $i = 1, 2, \dots, n-1$, sia

$$\zeta_i : F_n \rightarrow F_n$$

l'automorfismo definito come segue

$$\zeta_i : \begin{cases} x_{i+1} & \mapsto x_i \\ x_i & \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1} \\ x_j & \mapsto x_j \end{cases} \quad \text{per ogni } j \neq i, i+1.$$

Esiste una rappresentazione

$$\alpha_n : B_n \rightarrow Aut(F_n)$$

tale che

$$\alpha_n(\sigma_i) = \zeta_i \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Quindi, il gruppo B_n ha una rappresentazione fedele come gruppo di automorfismi di un gruppo libero $F_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ di rango n . La rappresentazione è indotta da un'applicazione da B_n ad $Aut(F_n)$ definita dalla precedente relazione.

La rappresentazione di Artin del gruppo treccia è l'inclusione naturale, descritta sopra, e indicata con α_n . [28]

Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

EDiMaST rimane neutrale per quanto riguarda le rivendicazioni giurisdizionali nelle mappe pubblicate e nelle affiliazioni istituzionali.

Bibliografia

- [1] E. Artin, (1925). *Theorie der Zöpfe*, Abhandlungen aus dem Mathematischen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 4, pp. 47-72.
- [2] E. Artin, (1947). *Theory of braids*, Annals of Math. (2) 48, pp. 101-126.
- [3] E. Artin, (1947). *Braids and permutations*, Annals of Math. 48, pp. 643-649.
- [4] E. Artin, (1950). *The theory of braids*, American Scientist 38(1), 112-119.
- [5] T.H. Bell, D.C. Luo, L. Seaton, S.P. Serra, (2019). Gordian Adjacency for Positive Braid Knots, Preprint arXiv: math.GT/1910.02933v1, <https://arxiv.org/pdf/1910.02933v1.pdf>.
- [6] J.S. Birman, (1974). *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Annals of Math. Studies 82, Princeton Univ. Press.
- [7] J.S. Birman, K.H. Ko, S.J. Lee, (1998). *A new approach to the word and the conjugacy problem in the braid groups*, Adv. Math. 139, pp. 322-353.
- [8] O. Bogopolski, (2008). *Introduction to Group Theory*, European Mathematical Society Publishing House, Zürich.
- [9] F. Bohnenblust, (1947). *The Algebraical braid group*, Ann. of Math., 48(1), 127-136.
- [10] J. Crisp, L. Paoluzzi, (2005). *On the Classification of CAT(0) Structures for the 4-String Braid Group*, Michigan Math. Journal, 53(1), 133-163.
- [11] P. Dehornoy, F. Digne, E. Godelle, D. Krammer, J. Michel, (2014). *Foundations of Garside theory*, EMS Tracts in Mathematics Vol. 22.
- [12] D.B.A. Epstein, J.W. Cannon, D.F. Holt, S.V.F. Levy, M.S. Paterson, W.P. Thurston, (1992). *Word processing in groups*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA.
- [13] R. Fenn, R. Rimanyi, C. Rourke, (1997). *The braid-permutation group*, Topology vol. 36, No. 1, pp. 123-135.
- [14] D.L. Johnson, (1997). *Presentations of groups*, Cambridge University Press, United Kingdom.
- [15] V. Jugé, (2016). *Combinatorics of braids*, PhD Thesis. <http://www-igm.univ-mlv.fr/~juge/papers/PhD-Thesis.pdf>
- [16] S. Kamada, (2002). *Braid and knot theory in dimension four*, American Mathematical Society.
- [17] H. Li, Z. Lü, (2020). *Crossing-changeable braids from chromatic configuration spaces*, [arXiv.math.AT/1909.03910v2](https://arxiv.math.AT/1909.03910v2).
- [18] P. Ligouras, (2020). *Semigroups, monoids and free groups*, Experiences of Teaching with

-
- Mathematics, Sciences and Technology, ISSN 2421-7247, Vol. 5, pp. 515-526.
- [19] V. Lin, (2004). *Braids and Permutations*, [Arxiv: math.GR/0404528](https://arxiv.org/abs/math.GR/0404528).
 - [20] R.C. Lyndon, P.E. Schupp, (1977). *Combinatorial group theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
 - [21] W. Magnus, (1934). *Über Automorphismen von Fundamentalgruppen berandeter Flächen*, Math. Ann. 109, 617-646.
 - [22] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, (1976). *Combinatorial group theory*, Dover Publ. Inc., New York.
 - [23] S. Moran, (1983). *The Mathematical Theory of Knots and Braids*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 82, Elsevier, Amsterdam.
 - [24] K. Murasugi, B.I. Kurpita, (1999). *A Study of Braids*, Math. Appl. 484, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
 - [25] L. Paris, (2009). *Braid groups and Artin groups*, in A. Papadopoulos (editor), *Handbook of Teichmüller Theory*, Volume II, European Mathematical Society Publishing House, Zürich.
 - [26] D.J.S. Robinson, (2003). *An introduction to abstract algebra*, Walter de Gruyter, Berlin.
 - [27] J.J. Rotman, (1995). *An introduction to the theory of groups*, 4th ed., Springer-Verlag New York, Inc.
 - [28] A.I. Suciu, He Wang, (2016). *The pure braid groups and their relatives*, Preprint arXiv: [math.GR/1602.05291v2](https://arxiv.org/abs/math.GR/1602.05291v2).
 - [29] V. Vershinin, (2010). *On the singular braid monoid*, St. Petersburg Math. J., Vol. 21, No. 5, pp. 693-704.
 - [30] V.V. Vershinin, (2013). *About presentations of braid groups and their generalizations*, <https://arxiv.org/abs/1304.7378>.

L'Autore

**Panagiote Ligouras**

I.I.S.S. “Da Vinci – Agherbino”
Via Repubblica 36/H – 7015 Noci (BA)
ligouraspanagiote@gmail.com
Italy

Received December 26, 2020; revised March 12, 2021; accepted April 22, 2021; published online June 9, 2021

Open Access This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)



Open Access This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License, which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons licence, and indicate if changes were made. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons licence, unless indicated otherwise in a credit line to the material. If material is not included in the article's Creative Commons licence and your intended use is not permitted by statutory regulation or exceeds the permitted use, you will need to obtain permission directly from the copyright holder. To view a copy of this licence, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.