

## Elliptical gears and dynamic geometry

Andrea Gambini

---

**Abstract.** *The purpose of this path is to present to pupils of 16 years of age an unusual application of conics with the help of the dynamic geometry software "GeoGebra".*

**Key words.** *GeoGebra, Conics, Geometry, elliptical gears.*

---

**Sommario.** (Ingranaggi ellittici e geometria dinamica). *Lo scopo di questo percorso è quello di presentare agli alunni di 16 anni di età un'applicazione insolita delle coniche con l'ausilio del software di geometria dinamica "GeoGebra".*

**Parole chiave.** *GeoGebra, Coniche, Geometria, ingranaggi ellittici.*

---

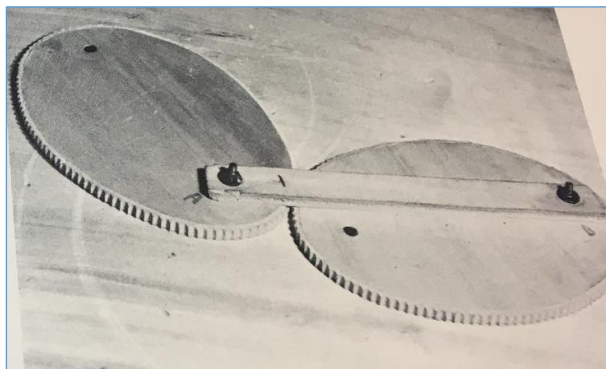
### Introduzione

Nella trasmissione del moto, siamo abituati a pensare agli ingranaggi di forma circolare, tuttavia esistono anche ingranaggi "esotici" come quelli di forma ellittica.

Il problema della costruzione di ingranaggi ellittici (vedi Fig. 1) è interessante da un punto di vista geometrico ed è riconducibile a quello della costruzione di una famiglia di ellissi tangenti.

Una volta risolto il problema geometrico della costruzione è interessante spostare l'attenzione sugli aspetti cinematici e riflettere su questa domanda:

se un ingranaggio ellittico ruota con una certa velocità angolare, come viene trasmesso il movimento rotatorio al secondo ingranaggio?



**Fig. 1 – ingranaggi ellittici**

## Prerequisiti

Prerequisiti per affrontare il percorso:

- Definizione di ellisse come luogo geometrico
- Criteri di congruenza dei triangoli
- Concetto di velocità angolare (in casi semplici)
- Equazione della retta nel piano cartesiano.

## Attività e sperimentazione

Questo percorso si ispira a un'attività a cui hanno lavorato due alunni di Emma Castelnuovo quando frequentavano la scuola superiore di primo grado. L'attività viene riproposta a un livello adatto agli alunni di una classe terza del liceo scientifico.

### Ingranaggi ellittici entrambi rotanti

Gli studenti vengono invitati a realizzare in “GeoGebra” la seguente costruzione di cui elenchiamo i passaggi:

- 1) Fissiamo due punti  $O$  e  $Q$  a una distanza  $d$  e tracciamo una circonferenza  $\mathcal{C}$  di centro  $O$  e raggio  $f < d$ . Scegliamo, quindi, un punto arbitrario  $A \in \mathcal{C}$ .
- 2) Tracciamo la retta  $OQ$  e definiamo il punto  $T$ , all'interno del segmento  $OQ$ , come intersezione tra la retta e l'asse del segmento  $AQ$ .
- 3) Tracciamo la retta  $AT$  e la circonferenza  $\mathcal{D}$  di centro  $T$  e raggio  $OT$ .
- 4) Nel semipiano opposto rispetto al punto  $A$ , indichiamo con  $P$  il punto di intersezione tra la retta e  $AT$  e la circonferenza  $\mathcal{D}$ .

A questo punto si chiede agli alunni di dimostrare che:

- 1) I triangoli  $AOT$  e  $QPT$  sono congruenti in base al 1° criterio di congruenza:

$$AOT \cong QPT$$

- 2) La somma dei segmenti  $AT$  e  $TO$  è uguale a  $d$ :

$$AT + TO = d$$

- 3) La somma dei segmenti  $QT$  e  $TP$  è uguale a  $d$ :

$$QT + TP = d.$$

In base alle dimostrazioni svolte, gli alunni dovrebbero concludere che i punti  $A$ ,  $O$  e  $P$ ,  $Q$  sono i fuochi di due ellissi congruenti passanti entrambe per il punto  $T$ . Inoltre i punti  $O$ ,  $T$ ,  $Q$  sono allineati per costruzione.

Le terne di punti  $(A, O, T)$  e  $(P, Q, T)$  individuano univocamente due ellissi che chiameremo rispettivamente,  $\mathcal{E}$  ed  $\mathcal{F}$ . Possiamo visualizzarle in “GeoGebra” con il comando “ellisse” (il comando del software visualizza un'ellisse se sono noti i due fuochi e un qualunque punto che le appartiene).

Spostando il punto  $A$  lungo la circonferenza  $\mathcal{C}$  si osserva il moto di puro rotolamento delle due ellissi in figura (vedi Fig. 2).

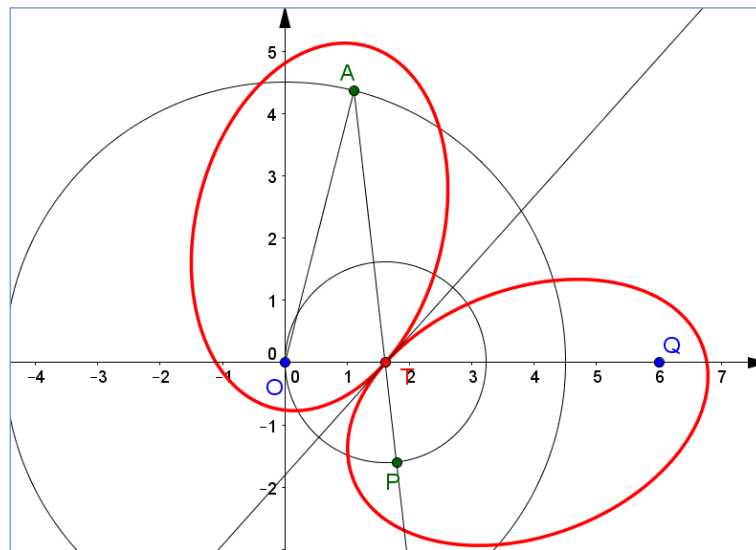


Fig. 2 – puro rotolamento delle due ellissi

Agli alunni si chiede di calcolare il valore dei due semiassi  $a$  e  $b$  e dell'eccentricità  $e$  delle ellissi  $\mathcal{E}$  ed  $\mathcal{F}$ .

Risulta

$$a = \frac{d}{2}; \quad b = \frac{\sqrt{d^2 - f^2}}{2}; \quad e = \frac{f}{d}.$$

Quest'ultima attività è interessante perché spinge a riflettere sul significato geometrico dei parametri  $f$  e  $d$  e li lega ai parametri  $a$ ,  $b$ ,  $e$  con cui gli studenti hanno più familiarità perché conoscono l'equazione cartesiana dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Elenchiamo di seguito alcuni spunti di riflessione che possono essere proposti in relazione al problema degli ingranaggi ellittici.

### Spunti di riflessione

- 1) Perché le ellissi  $\mathcal{E}$  ed  $\mathcal{F}$  tangenti nel punto  $T$ ?

Gli angoli congruenti  $PTQ$  e  $ATO$  condividono la stessa bisettrice perché sono opposti al vertice e quindi la retta tangente ad  $\mathcal{E}$  coincide con la retta tangente ad  $\mathcal{F}$  nel punto  $T$ .

- 2) Esiste un'unica ellisse congruente ad  $\mathcal{E}$ , avente un fuoco nel punto  $Q$  e tangente ad  $\mathcal{E}$  nel punto  $T$ ?

La risposta è affermativa.

Per dimostrare l'unicità indichiamo con  $\mathcal{G}$  un'ellisse congruente ad  $\mathcal{E}$  passante

per  $T$ . Ricordiamo che  $\mathcal{E}$  ha un fuoco collocato nel punto fisso  $Q$ ; indichiamo l'altro fuoco di  $\mathcal{E}$  con  $F$  (si chiede agli alunni di costruire  $F$ ).

Poiché le ellissi  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{E}$  sono congruenti risulta:

$$QT + TF = d \Rightarrow TF \cong TP.$$

Ma allora i triangoli  $TQP$  e  $TQF$  sono congruenti per il 3° criterio di congruenza.

Da ciò segue che  $F$  coincide con  $P$  oppure che  $F$  è il simmetrico di  $P$  rispetto alla retta  $OQ$ , ma la seconda eventualità è impossibile perché la bisettrice dell'angolo  $ATO$  è bisettrice anche dell'angolo  $KTQ$ . Quindi  $F \equiv P$ , perciò l'ellisse tangente è unica.

Se rimuoviamo l'ipotesi che vincola la posizione del fuoco  $Q$  si perde l'unicità della ellisse tangente come si vede nella figura (vedi Fig. 3). Infatti, fissato il punto  $T \in \mathcal{E}$  esistono infinite ellissi congruenti e tangenti in  $T$ .

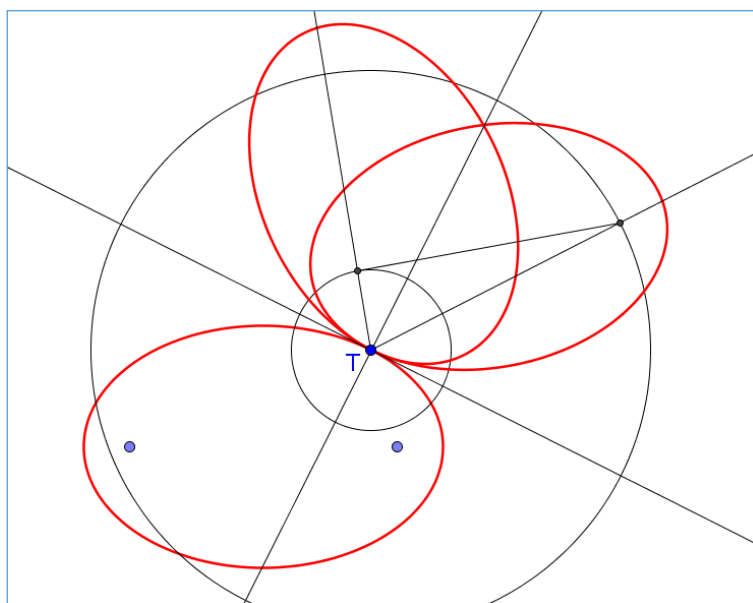


Fig. 3 – se il fuoco  $Q$  non è fisso abbiamo tante ellissi tangenti in  $T$

- 3) Esiste un'unica ellisse congruente ad  $\mathcal{E}$ , avente un fuoco nel punto  $Q$  e tangente ad  $\mathcal{E}$ ? (N.B. Rispetto al caso precedente non viene specificato il punto di tangenza).

La risposta è negativa: le ellissi sono due.

Per verificarlo si propone agli studenti la seguente costruzione da realizzare in "GeoGebra" per individuare le ellissi tangenti:

- Data l'ellisse  $\mathcal{E}$  di fuochi  $O$  e  $A$  e scelto un punto  $S \in \mathcal{E}$  tale che  $QS \leq d$ , si traccia la retta tangente  $t$  ad  $\mathcal{E}$  nel punto  $S$ ;
- Si considera il punto  $Q'$  simmetrico di  $Q$  rispetto a  $t$ ;
- Si interseca la semiretta  $Q'S$  di origine  $Q'$  con la circonferenza di centro  $Q'$  e raggio  $d$  e si chiama  $P$  il punto di intersezione.

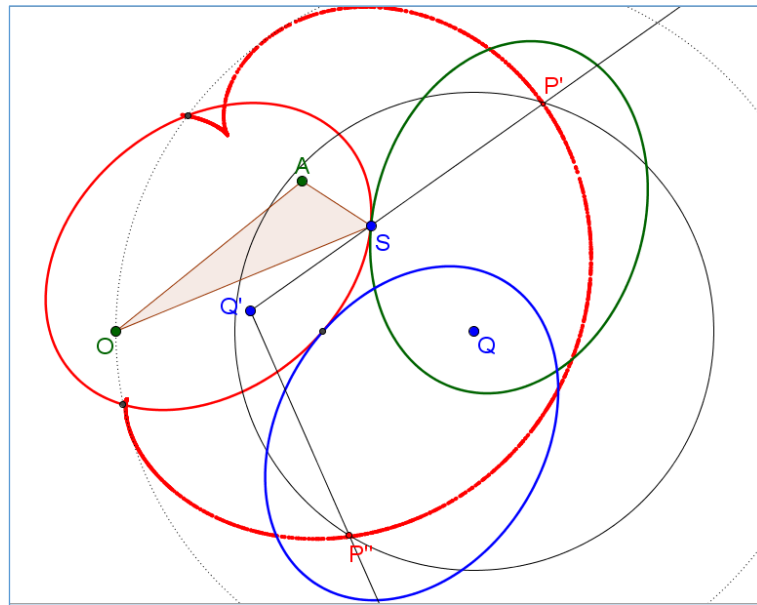


Fig. 4 – costruzione delle due ellissi tangenti (in blu e in verde)

Con questa costruzione abbiamo associato ad ogni punto  $S \in \mathcal{E}$  un unico punto  $P$  del piano e quindi abbiamo definito un luogo geometrico  $\mathcal{L}$  che può essere visualizzato in “GeoGebra” con l’opzione “traccia attiva” la quale mentre si sposta  $S$  lungo l’ellisse,  $P$  descrive visivamente il luogo  $\mathcal{L}$ .

Detti  $P'$  e  $P''$  i due punti di intersezione tra  $\mathcal{L}$  e la circonferenza di centro  $Q$  e raggio  $f$ , gli studenti dovrebbero dimostrare che le ellissi di fuochi  $Q, P'$  e  $Q, P''$  aventi l’asse maggiore lunga  $d$  sono congruenti e tangenti ad  $\mathcal{E}$ .

L’ellisse azzurra è quella che abbiamo chiamato  $\mathcal{F}$  e corrisponde alla costruzione con l’anti-parallelogramma mentre quella verde è un’altra ellisse tangente che non va bene, da un punto di vista cinematico, per il moto degli ingranaggi (gli alunni dovrebbero spiegare il motivo).

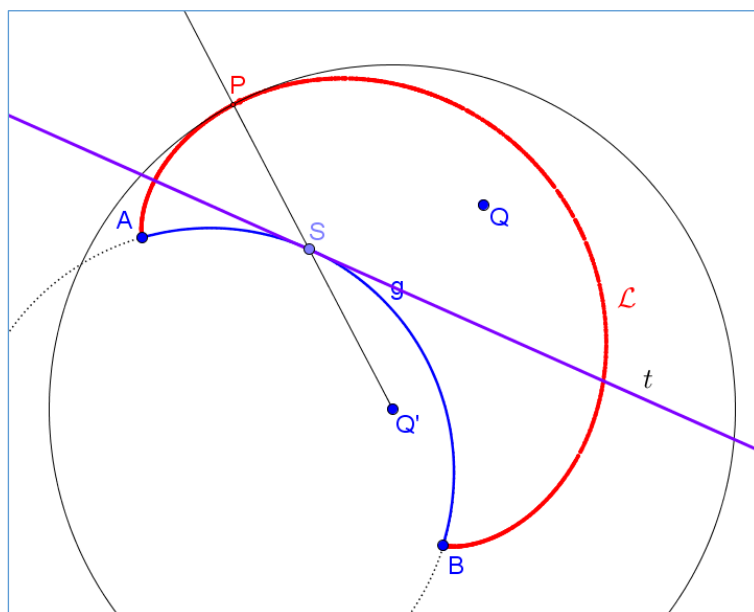
La traccia rossa è il grafico della curva  $\mathcal{L}$ .

L’esistenza della seconda ellisse tangente si giustifica anche con un ragionamento intuitivo: basta ruotare l’ellisse azzurra in senso antiorario intorno al fuoco  $Q$  fino a “toccare” di nuovo l’ellisse  $\mathcal{E}$ .

### Un po’ di trasformazioni geometriche

In questo paragrafo generalizziamo l’idea che abbiamo utilizzato nello spunto di riflessione 3) del precedente paragrafo e la formalizziamo meglio. L’obiettivo è quello di definire un procedimento adatto a costruire un’ellisse tangente a una conica qualsiasi generalizzando in questo modo il caso degli ingranaggi.

Dato un punto fisso  $Q$  nel piano e una costante positiva  $d$ , consideriamo un arco di conica  $\mathcal{H}$ .



**Fig. 5 – immagine (in rosso) di un arco di circonferenza**

Definiamo i seguenti passaggi:

- Scelto un punto  $S \in \mathcal{H}$  tale che  $QS \leq d$ , si traccia la retta tangente  $t$  ad  $\mathcal{H}$  nel punto  $S$ ;
- Si considera il punto  $Q'$  simmetrico di  $Q$  rispetto a  $t$ ;
- Si interseca la semiretta  $Q'S$  di origine  $Q'$  con la circonferenza di centro  $Q'$  e raggio  $d$ . Chiamiamo  $P$  il punto di intersezione.

In questo modo abbiamo associato ad ogni punto  $S \in \mathcal{H}$  un unico punto  $P$  del piano. Abbiamo definito, cioè, una trasformazione che opera sui punti di  $\mathcal{H}$  e dà in output un arco “deformato” rispetto a quello di input (non si tratta di un’affinità). Possiamo chiamare questa trasformazione “la proiezione ellittica di  $\mathcal{H}$  di fuoco  $Q$  e raggio  $d$ ”.

Indichiamo in figura (vedi Fig. 5) con  $\mathcal{L}$  l’arco ottenuto proiettando  $\mathcal{H}$ .

Gli studenti vengono invitati a realizzare in “GeoGebra” le proiezioni ellittiche degli archi di varie coniche (rette, parabole, ellissi, iperboli) con lo strumento del software “traccia attiva”.

### Spunti di riflessione

- 1) Come si trasforma un segmento?

La proiezione di un segmento consiste in un arco di circonferenza di raggio  $d$  e centro  $Q'$  e gli alunni dovrebbero dimostrarlo osservando che, almeno in questo caso, l’arco  $\mathcal{L}$  è perpendicolare in ogni punto al vettore  $\overline{SP}$ . Questa proprietà geometrica vale, per qualunque arco  $\mathcal{H}$  di partenza ma la dimostrazione è troppo complessa per essere affrontata in questa sede.

La proiezione ellittica è utile per costruire le ellissi tangenti a una data conica in modo da soddisfare determinati requisiti (il fuoco si trova in un dato punto e i semiassi hanno misure

assegnate).

Infatti se vogliamo costruire le ellissi tangenti a una conica in modo che un fuoco sia nel punto  $Q$ , l'asse maggiore sia lungo  $d$  e la distanza focale sia  $f$  è sufficiente costruirne la proiezione ellittica  $\mathcal{L}$  di fuoco  $Q$  e raggio  $d$  e intersecarla con la circonferenza di centro  $Q$  e raggio  $f$  individuando, se esistono, le posizioni dei fuochi delle ellissi tangenti.

### Considerazioni cinematiche sugli ingranaggi ellittici entrambi rotanti

Lo scopo di questa parte è quello di riflettere sul legame tra i due moti. Se il primo ellisse ruota intorno ad  $O$  in modo uniforme, cosà farà il secondo ellisse?

Con alcune prove “empiriche” gli alunni dovrebbero rendersi conto che il secondo ellisse ruota intorno a  $Q$  in modo non uniforme.

Ciò è dovuto al fatto che, in ogni istante, i punti di contatto tra le due ellissi si muovono con la stessa velocità. Se  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono le velocità angolari delle ellissi, l'uguaglianza delle velocità  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  nei punti di contatto implica che:

$$\omega_1 OT = \omega_2 QT \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{OT}{QT}.$$

Perciò il problema viene ricondotto alla valutazione di un rapporto tra segmenti.

Poniamo

$$\rho = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

e indichiamo con  $r$  la distanza tra  $T$  e  $O$ .

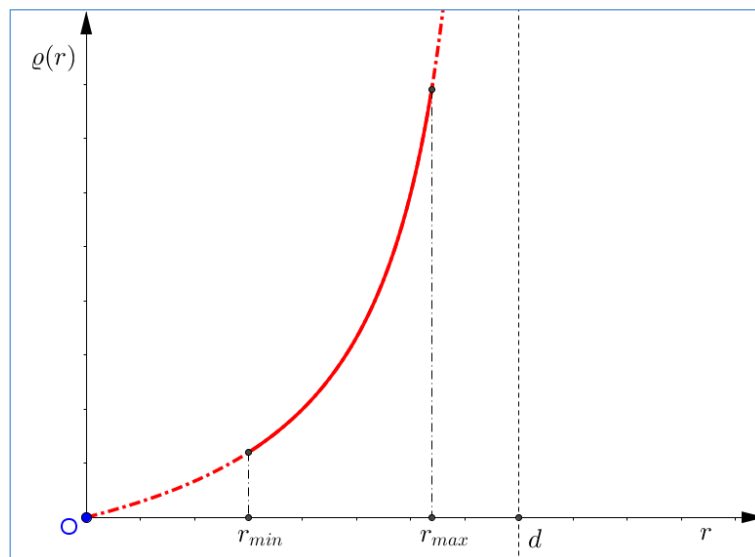


Fig. 6 – andamento del rapporto tra le velocità angolari

Si vede facilmente che:

$$\rho = \frac{r}{d-r}.$$

Gli alunni dovrebbero osservare che la relazione  $\rho = \rho(r)$  si rappresenta sotto forma di un arco di iperbole equilatera come mostra la figura (vedi Fig. 6).

### Approfondimento sulla cinematica degli ingranaggi

Si suggerisce agli alunni di scegliere un sistema di riferimento cartesiano  $Oxy$  come in figura e si indica con  $\theta$  l'angolo che il vettore  $OA$  forma con l'asse  $x$ . Con questa scelta le coordinate dei punti  $A$  e  $Q$  risultano:

$$A = (f \cos \theta; f \sin \theta) \quad Q = (d; 0)$$

Per ricavare esplicitamente  $r$  in funzione di  $\theta$  e quindi  $\rho(\theta)$ , gli alunni devono scrivere l'equazione dell'asse di  $AQ$

$$y = \frac{d - f \cos \theta}{f \sin \theta} \left( x - \frac{d + f \cos \theta}{2} \right) + \frac{f}{2} \sin \theta$$

e devono intersecarla con l'asse  $x$  di equazione  $y = 0$ . Ricordando che  $e = f/d$ , il punto di intersezione è proprio  $T$  che ha ascissa  $r$  data da

$$r = \frac{d^2 - f^2}{2(d - f \cos \theta)} = \frac{d(1 - e^2)}{2(1 - e \cos \theta)}$$

e quindi si può esprimere il rapporto  $\rho$  in funzione di  $\theta$

$$\rho(\theta) = \frac{d^2 - f^2}{d^2 + f^2 - 2fd \cos \theta} = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$

avendo posto

$$p = \frac{d^2 - f^2}{d^2 + f^2} = \frac{1 - e^2}{1 + e^2} \quad \varepsilon = \frac{2fd}{d^2 + f^2} = \frac{2e}{1 + e^2}.$$

L'ultima formula esprime la relazione tra le due velocità angolari in funzione di  $\theta$ . Notiamo che si tratta dell'equazione polare di un'ellisse perché  $\varepsilon < 1$ , inoltre l'eccentricità di  $\rho(\theta)$  dipende solo dall'eccentricità di  $\mathcal{E}$  ed  $\mathcal{F}$  e non dalle misure dei semiassi.

### Un ingranaggio è fisso e l'altro ruota

Come cambia il movimento se un ingranaggio ellittico è tenuto fermo e l'altro rotola senza strisciare sul primo?

Gli alunni, riflettendo e procedendo per tentativi, dovrebbero rendersi conto che una possibile soluzione, per questo problema, consiste nella riflessione assiale dell'ellisse  $\mathcal{E}$  rispetto alla retta tangente in un suo generico punto  $S$ .

Tuttavia questa soluzione funziona solo in un caso particolare (gli alunni devono spiegare il motivo).



## Discussione e risultati

Questa attività, riguardante gli ingranaggi ellittici, non è ancora stata sperimentata “sul campo” perché gli alunni non hanno affrontato l’argomento coniche in modo sistematico. Si prevede di proporre l’argomento tra qualche mese.

Quando gli alunni avranno modo di lavorare con gli ingranaggi, verranno documentate le impressioni e l’interesse suscitato. Si tratterà di un feedback prezioso per capire eventuali aspetti da migliorare e rivedere prima di proporre questa attività a un secondo gruppo di studenti.

L’ideazione e la creazione del percorso descritto segue il pensiero metodologico di Emma Castelnuovo.

## Conclusione

L’attività che è stata descritta in questo articolo si inserisce in un percorso di approfondimento di matematica pensato per una classe terza del Liceo Scientifico che ha aderito al progetto del Liceo Matematico. L’idea che ha ispirato l’avvio del Liceo Matematico, da parte dell’Università di Salerno, è quella di dare più spazio alla matematica e alle scienze, non per introdurre un numero maggiore di nozioni, ma per riflettere su fondamenti e idee, allargare gli orizzonti culturali e sottolineare collegamenti con altre discipline. In quest’ottica si è ritenuto proficuo proporre un collegamento tra cinematica, moti rotatori e coniche inteso come un momento di interdisciplinarietà tra matematica e fisica.

## Dichiarazione di conflitti di interesse

L’autore dichiara di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

## Bibliografia

Castelnuovo E., (1972). *Documenti di una esposizione di matematica*. Boringhieri.

## L'Autore



### Andrea Gambini

Liceo Scientifico "A. Volta"  
Colle Di Val D'Elsa (SI)  
[gambiniandrea87@gmail.com](mailto:gambiniandrea87@gmail.com)  
Italy

#### Breve curriculum

- Laurea Magistrale in Matematica (2012)
- Abilitazione all'insegnamento della Matematica e della Fisica, con TFA, nella scuola secondaria di secondo grado (2013)
- Supplente in varie scuole secondarie di secondo grado dal 2014 al 2016.
- Docente di Ruolo, dal 2016, di Matematica e Fisica nella scuola secondaria di secondo grado.
- Responsabile di un progetto Erasmus+ di robotica educativa nell'anno scolastico 2017/2018.

*Received* November 11, 2018; *revised* July 18, 2019; *accepted* October 9, 2019; *published online* November 18, 2019

**Open Access** This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

