EDiMaST

ISSN 2421-7247

article

Analysis of errors on area and perimeter in some Invalsi questions

Stefano Babini, Ivan Graziani

Abstract. *Many errors in mathematics are related to different reasons and to bring them back to the simple "have not understood" is too trivial. We carried out a research by submitting to 748 students (133 of Primary Schools, 249 Secondary Schools and 366 High Schools) some items taken from specific issues and retrieved thanks to the Gestinv platform.*

The aim of our research was to see how concepts like perimeter and area could be internalized and there were misconceptions in the various school orders. We also had the aim of verifying if recurrent errors, apparently linked to a wrong understanding of the text, are linked to other reasons as an incorrect learning of the presented concepts.

Often the learning of important concepts in mathematics is ephemeral, because it is not correctly internalized by students who soon forget what they think to have learned.

In our work we will present three items chosen in the space and figures that show how students, even of higher orders, can make mistakes that we would not expect from those who have been attending school for several years.

Key words. *Verticality, area and perimeter, Invalsi.*

Sommario. (Analisi di errori su area e perimetro in alcuni quesiti Invalsi). *Molti errori in matematica sono legati a diversi motivi e ricondurli al semplice "non hanno capito" è troppo banale. Noi abbiamo condotto una ricerca sottoponendo a 748 studenti (133 di Scuole Primarie, 249 di Secondarie di I grado e 366 di Secondarie di II grado) alcuni item tratti da fascicoli invalsi e reperiti grazie alla piattaforma Gestinv.*

Lo scopo della nostra ricerca era quello di vedere come potevano essere interiorizzati concetti come perimetro e area e si vi fossero delle misconcezioni nei vari ordini di scuola. Avevamo, inoltre, lo scopo di verificare se comparivano errori ricorrenti, legati a errata comprensione del testo o ad altre motivazioni legate ad altri motivi sempre collegati a un non corretto apprendimento dei concetti presentati.

Spesso l'apprendimento di concetti importanti in matematica risulta effimero, perché non viene correttamente interiorizzato dagli studenti che dimenticano in breve tempo quanto pensano di aver appreso.

Nel nostro lavoro presenteremo tre item scelti in ambito spazio e figure che mostrano come gli studenti, anche di ordini superiori possano commettere errori che non ci aspetteremmo da chi frequenta la scuola da diversi anni.

Parole chiave. *Verticalità, area e perimetro, Invalsi.*

Introduzione

Il nostro lavoro di ricerca è nato con l'intento di indagare su come cambiassero o si consolidassero nel primo e nel secondo ciclo le conoscenze e le competenze degli studenti su alcuni aspetti relativi a area e perimetro delle figure piane.

Per la nostra ricerca abbiamo utilizzato vari item di prove Invalsi di questi ultimi anni, ricavate grazie al sito Gestinv e assemblati in fascicoli, somministrati a studenti di quinta primaria, seconda e terza classe della secondaria di I grado e prima, seconda e quarta classe di scuola secondaria di II grado. Per questo studio particolare abbiamo considerato i tre quesiti nei quali avevamo rilevato i risultati più interessanti.

In tutto sono stati somministrati 748 fascicoli in 37 classi dei vari ordini di scuola. Tutti gli studenti hanno avuto gli stessi fascicoli composti da item di grado 5, 8 e 12.

La nostra domanda di ricerca iniziale partiva dall'intento di verificare se ci fosse, come prevedibile, un miglioramento degli apprendimenti procedendo in verticale dalla scuola primaria alla secondaria di II grado.

I nostri risultati ci hanno portato non solo a smentire tale ipotesi iniziale, ma anche a trovare tipologie di errori legati a competenze non consolidate e anche a misconcezioni che hanno fatto virare la nostra ricerca in quella direzione.

Quadro teorico

Gli aspetti di natura didattica

Relativamente al problema specifico su perimetro e area relativo alla nostra ricerca, ci riferiamo anche ad un lavoro di D'Amore e Pinilla (2006) nel quale si concludeva che "l'ostacolo che si oppone alla costruzione di una conoscenza soddisfacente sulle relazioni tra «perimetro e area» non è solo di natura epistemologica bensì *anche di natura didattica*".

Abbiamo quindi analizzato i possibili problemi anche dal punto di vista didattico.

Il termine Sistema didattico, usato dai ricercatori, indica uno schema triangolare formato dai 3 vertici rappresentati da insegnante, allievo e sapere, cioè dalle conoscenze di una disciplina che l'insegnante ha lo scopo di far apprendere all'allievo (vedi Fig. 1).

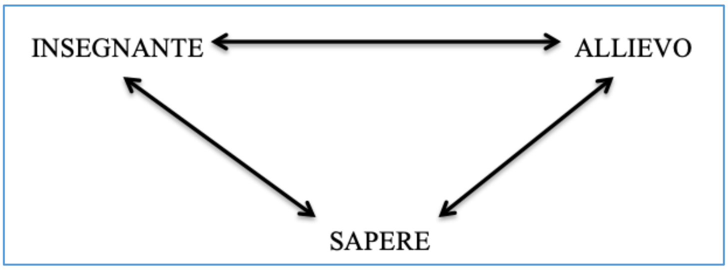


Fig. 1 – il triangolo del sistema didattico

Lo schema va considerato come un riferimento ai tre soggetti che entrano in contatto tra loro al momento dell'azione didattica e le frecce indicano il fatto che questi interagiscono fortemente.

Bisogna però chiarire il significato della parola sapere nei vari aspetti che lo contraddistinguono:

- Abbiamo un *sapere accademico*, proprio dell'insegnante, nel nostro caso il sapere matematico.
- Il sapere accademico deve diventare *sapere insegnato*, quello che viene trasmesso agli studenti.
- Il *sapere insegnato* non serve a niente se non diventa a sua volta *sapere appreso* (qui ci spostiamo sul vertice degli studenti).
- Infine il *sapere appreso*, perché sia veramente interiorizzato, deve diventare *sapere competente*.

Quello della *competenza* è poi un concetto dinamico e complesso, risultato di un intreccio a *più dimensioni*:

- *Sapere* (dimensione *cognitiva*): riguarda il possesso di conoscenze e l'organizzazione dei concetti ad esse collegate.
- *Saper fare* (dimensione *operativa* o *procedurale*): concerne le abilità che caratterizzano le azioni che il soggetto può compiere con l'uso di tali conoscenze.
- *Saper comunicare* (dimensione *comunicativa*): riguarda la capacità di comunicare significati con linguaggi via via più formalizzati.
- *Saper essere* (dimensione *affettiva*): coinvolge le motivazioni e le disposizioni interiori del soggetto che accetta di mettersi in gioco, conferendo un senso alle proprie conoscenze e abilità.

Il triangolo diventa in questo modo un quadrilatero (Castoldi, 2012) con un nuovo vertice rappresentato dalla componente emotiva, che comprende anche la visione che gli studenti hanno della matematica (vedi Fig. 2).

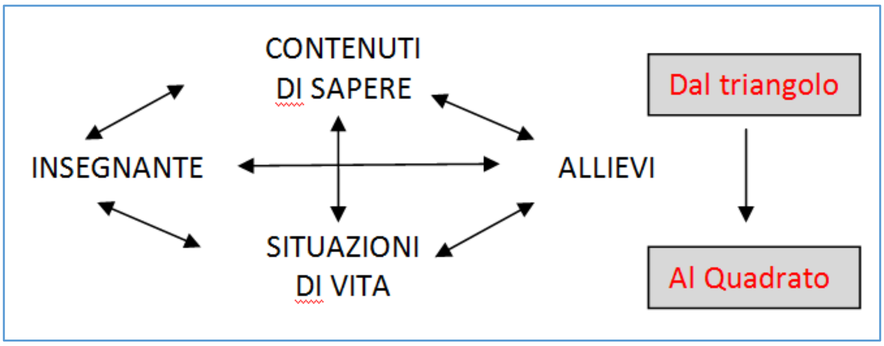


Fig. 2 – il triangolo del sistema didattico

L'importanza di alcuni termini

Una prima distinzione doverosa per chi insegna o si occupa di didattica è quella fatta dal punto di vista pedagogico tra errore e sbaglio (Binanti, 2001). C'è infatti una sostanziale differenza tra il commettere un errore o l'incorrere in uno sbaglio, perché i presupposti di queste due realtà sono diametralmente opposti.
Si commette un errore quando deliberatamente ci si allontana (cioè si erra, da cui l'etimologia del

termine errore) dalla verità, da ciò che ci può far raggiungere i nostri obiettivi.
Si incorre invece in uno sbaglio quando, pur andando nella giusta direzione verso ciò che desideriamo raggiungere, prendiamo un abbaglio o pecchiamo di sbadataggine (l'etimologia del vocabolo infatti viene contesa tra abbaglio, dall'evidente significato, e "disbadaglio", ossia sbadataggine). In questa categoria rientrano anche i cosiddetti errori di distrazione.
C'è chiaramente anche una grossa differenza tra queste due tipologie dal punto di vista ponderale (di gravità), diagnostico e "curativo" (recupero).
Un'altra doverosa distinzione che spesso anche i libri di testo trascurano, è quella tra esercizio e problema (D'Amore, Pinilla, 2006): anche se entrambi hanno una funzione nel processo di apprendimento della matematica, molto spesso i due termini sono confusi tra loro e molti esercizi vengono "spacciati" come problemi.
Secondo Zeitz (2007), un esercizio è qualcosa che si sa esattamente come risolvere: se dato come compito a scuola, richiederà con tutta probabilità di usare gli argomenti appena svolti a lezione. Un problema è, invece, qualcosa che non sappiamo come affrontare, e per cui dobbiamo costruirci un percorso che ci porti alla soluzione.
Un esercizio consolida quindi le abilità e mette a fuoco le conoscenze, mentre un vero problema deve far mettere in campo le abilità e le conoscenze ma, soprattutto, deve esplicitarle in competenze.

Le misconcezioni

Un termine molto usato da decenni nella ricerca in didattica della matematica è la parola "misconcezione"; tale parola viene interpretata in modi diversi dai vari Autori ma assume nella maggior parte dei casi semplicemente connotati negativi, come sinonimo di "errore", "giudizio erroneo", "idea sbagliata", ma anche "equivoco" o "malinteso"; si trova intesa anche nel senso più esteso di "concezione fallace". Per questa ragione le misconcezioni vengono spesso citate quando si fa riferimento alla didattica relativa agli errori.
«Il termine misconcezione che ha origine negli Stati Uniti potrebbe non essere il termine più appropriato se ci si riferisce alla conoscenza degli studenti "non corretta". La nozione di "correttezza" non è assoluta e si riferisce sempre ad un dato sapere; il sapere di riferimento può anche evolversi. I criteri di rigore in matematica sono cambiati considerevolmente nel tempo. Ogni concezione ha un suo dominio di validità e funziona per quel preciso dominio. Se questo non avviene, la concezione non sopravvive. Ogni concezione è in parte corretta e in parte non corretta. Quindi sembrerebbe più conveniente parlare di concezioni rispetto ad un dominio di validità e cercare di stabilire a che dominio queste appartengono» (D'Amore, Sbaragli, 2011).
Un misconcetto sta, infatti, più ad indicare un'interpretazione distorta di un concetto, cioè diversa da quella ufficialmente riconosciuta valida. La sua presenza può dare luogo a errori sistematici, come quelli commessi nell'applicazione di algoritmi. Nel caso di procedure "molti allievi sbagliano perché applicano in modo corretto delle procedure scorrette e non perché applicano le procedure corrette in modo scorretto" (Zan, Baccaglini-Frank, 2017).
Si possono distinguere due categorie di misconcezioni: *inevitabili* ed *evitabili* (Sbaragli, 2005).
Le misconcezioni inevitabili non dipendono direttamente dalla trasposizione didattica effettuata dal docente né dall'ingegneria didattica, ma dalla necessità di dover dire e mostrare qualcosa per poter spiegare un concetto, che non potrà mai essere esaustivo di ciò che si sta proponendo anche a causa dalle caratteristiche ontogenetiche legate all'allievo.

Tali misconcezioni sono quindi imputabili alla necessità di dover partire da un certo sapere iniziale da dover necessariamente comunicare in modo non ineccepibile.

Le *misconcezioni evitabili* dipendono, invece, proprio *dalle scelte che l'insegnante fa per effettuare la trasposizione didattica* e scelte concernenti l'*ingegneria didattica*. Queste misconcezioni sono state assai studiate e sembrano dipendere dalla prassi scolastica "minata" da improprie consuetudini proposte dagli insegnanti ai propri allievi.

Capita spesso che, a complicare l'apprendimento dei concetti matematici, incidano le decisioni prese dall'insegnante, a volte derivanti dalle proposte della *noosfera* (libri di testo, programmi, riviste, …), di fornire all'allievo giorno dopo giorno, sempre e solo univoche rappresentazioni convenzionali che vengono così accettate ciecamente dall'allievo come univoche e anzi obbligate a causa del *contratto didattico* instaurato in classe e del fenomeno di *scolarizzazione* (D'Amore, 1999).

Le continue e univoche sollecitazioni fornite dall'insegnante fanno sì che lo studente confonda la rappresentazione proposta con il concetto matematico che si vuole far apprendere: «Lo studente non sa che sta apprendendo segni che stanno per concetti e che dovrebbe invece apprendere concetti; se l'insegnante non ha mai riflettuto su questo punto, crederà che lo studente stia apprendendo concetti, mentre questi sta in realtà "apprendendo" solo a far uso di segni» (D'Amore, 2003).

Ne consegue che occorre didatticamente fare molta attenzione alla scelta, ai contesti ed alle modalità d'uso dei segni che rappresentano il concetto matematico che si vuole far apprendere ai propri allievi; un'attenzione che è spesso sottovalutata o data per scontata.

In alcuni casi di errore può rientrare anche una distinzione operata anche da Trinchero (2016) tra lo studente abile e lo studente competente (vedi Tabella 1).

Tabella 1. Distinzione tra allievi "abili" e "competenti" (Trinchero, 2016)

	Allievo "abile"	**Allievo "competente"**
Risorse	Conosce il concetto di prodotto e di area, sa effettuare prodotti, …	Conosce il concetto di prodotto e di area, sa effettuare prodotti, …
Strutture di **interpretazione**	Si chiede "Quando abbiamo trattato queste figure a scuola?"	Legge il problema come "Trasformare le figure irregolari in figure note"
Strutture di **azione**	Cerca, senza successo, di applicare una formula risolutiva nota	Trasforma le figure irregolari in figure note
Strutture di **autoregolazione**	Rinuncia a risolvere il problema ("Non lo abbiamo trattato a scuola)	Se la trasformazione non porta ad una soluzione, cerca trasformazioni alternative.

In quasi tutti gli errori commessi nei quesiti che abbiamo proposto agli studenti dei vari gradi di scuola, dalla quinta Primaria alla quarta secondaria di II grado, si ravvisano problemi legati anche ai quattro tipi di conoscenze individuabili: fattuale, concettuale, procedurale e metacognitiva (Trinchero, 2017).

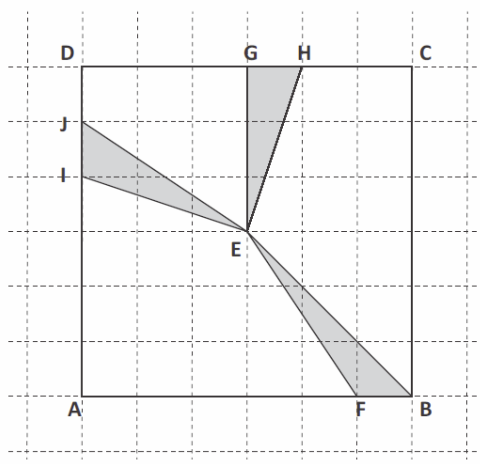
- *Conoscenza fattuale*, costituita da fatti, termini e elementi di base necessari per comprendere concetti complessi o risolvere problemi in un determinato ambito conoscitivo.

- *Conoscenza concettuale*, data da classificazioni, principi, teorie, generalizzazioni, modelli e strutture necessari per comprendere concetti complessi o risolvere problemi in un determinato ambito conoscitivo.
- *Conoscenza procedurale*, che comprende gli algoritmi, le tecniche, i metodi e le strategie utili per compiere operazioni specifiche in un determinato ambito conoscitivo.
- *Conoscenza metacognitiva*, che include la consapevolezza del proprio funzionamento cognitivo, la conoscenza contestuale e strategico-riflessiva per la risoluzione di problemi in un determinato ambito conoscitivo.

A scuola normalmente ci si occupa maggiormante dei primi tre tipi di conoscenza e proprio la mancanza di consapevolezza di quanto appreso, e della sua utilità in contesti differenti, è alla base di vari errori e alimentano alcune misconcezioni anziché estinguerle.

Destinatari e tempi

Il campione che abbiamo scelto è stato coinvolto durante l'anno scolastico 2017/2018, grazie alla disponibilità dei colleghi delle varie classi del primo e secondo ciclo.
Abbiamo chiesto la disponibilità ai docenti, ricevendo una risposta che è stata largamente al di là delle nostre migliori aspettative.


D11. Osserva i triangoli nella seguente figura.

a. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

A. ☐ I tre triangoli hanno stessa area e stesso perimetro
B. ☐ I tre triangoli hanno stessa area e diverso perimetro
C. ☐ I tre triangoli hanno diversa area e stesso perimetro
D. ☐ I tre triangoli hanno diversa area e diverso perimetro

b. Posiziona sul lato AB del quadrato il punto P in modo che il triangolo AEP abbia area doppia del triangolo EFB.

Fig. 3 – item G8 del 2014

Nella ricerca sono state quindi coinvolte 37 classi per un totale di 748 studenti: 133 della scuola primaria (6 classi); 249 della scuola secondaria di primo grado (12 classi di cui 5 di seconda e 7 di terza) e 366 della scuola secondaria di secondo grado (21 classi: 5 di liceo scientifico, 2 di liceo classico, 1 di liceo linguistico, 2 di liceo artistico, 2 di I.T. Economico, 2 di I.T.A.S., 2 di I.T. Tecnologico, 2 di I.T. per Geometri e 1 di I.P. Alberghiero).
Da osservare che le scuole sono state scelte appositamente in località diverse e per la secondaria di secondo grado vi sono classi di liceo, tecnico e professionale.

Attività e sperimentazione

Il primo quesito che abbiamo scelto di analizzare è composto da due item (a e b) ed era presente nella Prova Nazionale (G8) nel 2014 (vedi Fig. 3).

L'item a (vedi Tabella 2) ha avuto risultati migliori nella terza secondaria di I grado e un andamento di risposte corrette non lineare tra il primo e il secondo ciclo. Stupiscono per differenti ragioni i valori inferiori in quinta primaria e in 4 secondaria di II grado.

Tabella 2. Risultati nei diversi ordini di scuola nell'item a G8 del 2014

	corretta
V Primaria	59,4%
II Sec. I grado	69,9%
III Sec. I grado	74,3%
I Sec. II grado	57,9%
II Sec. II grado	71,7%
IV Sec. II grado	55,8%
Campione nazionale	44,5%

Per la quinta stupisce che la risposta più scelta tra quelle errate sia stata la A, in quanto se capiscono che l'area rimane uguale, dovrebbero, anche in linea con le risposte date precedentemente negli altri item, osservare che i perimetri invece sono diversi.
Per la IV secondaria di II grado stupisce che sia stata scelta da alcuni la risposta D, perché dovrebbero avere interiorizzato nel corso degli anni il fatto che l'area di triangoli, con base e altezze congruenti, siano uguali.

Tabella 3. Risultati nei diversi ordini di scuola nell'item b G8 del 2014

	corretta
V Primaria	60,2%
II Sec. I grado	69,1%
III Sec. I grado	70,8%
I Sec. II grado	60,2%
II Sec. II grado	71,7%
IV Sec. II grado	68,4%
Campione nazionale	59,1%

Per quanto riguarda i risultati relativi all'item b (vedi Tabella 3), si può notare che in genere abbia avuto risultati non troppo distanti dal campione nazionale. Nel campione nazionale l'item b ha avuto inoltre risultati significativamente migliori rispetto a quelli dell'item a. La stessa cosa non si registra invece nel nostro campione.

Resta da notare tuttavia che, per questo item, la maggior parte degli errori è consistita nel fatto di tracciare Il segmento EP come altezza, quindi perpendicolarmente ad AB, senza considerare la lunghezza del segmento AP (vedi Fig. 4). Emerge qui una misconcezione comune a molti studenti convinti che l'altezza sia un segmento perpendicolare alla retta orizzontale e quindi solo verticale.

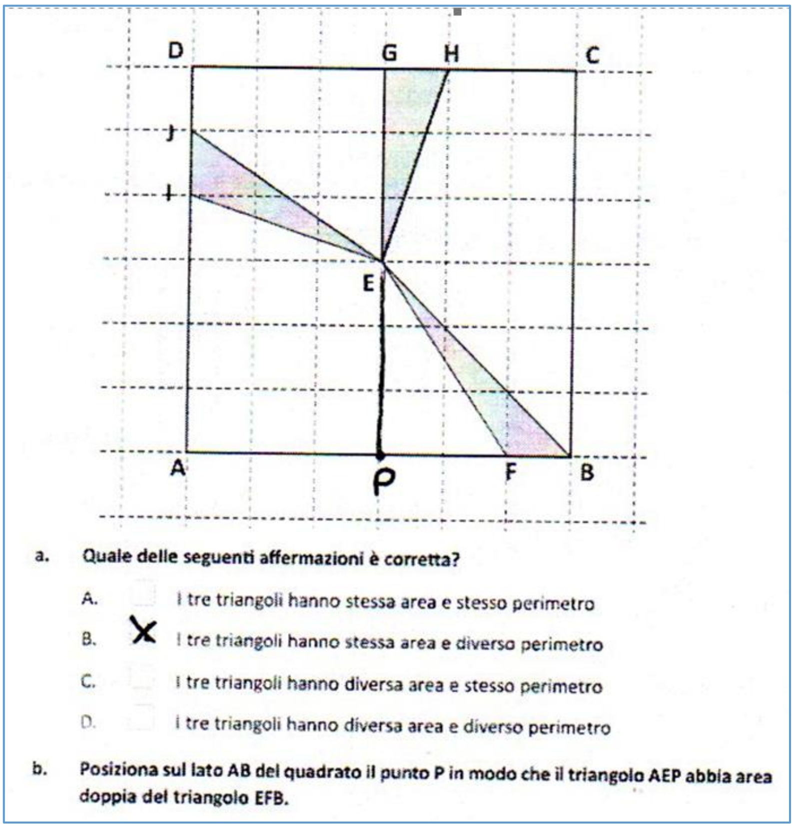


Fig. 4 – errore tipico legato all'altezza

Il sesto item che abbiamo analizzato era inserito nel fascicolo della Prova Nazionale del 2013 (vedi Fig. 5).
Era un item che ritenevamo facile e che non pensavamo che avrebbe creato tanti problemi, soprattutto agli studenti della secondaria di II grado, soprattutto nella classe prima e quarta (vedi Tabella 4).

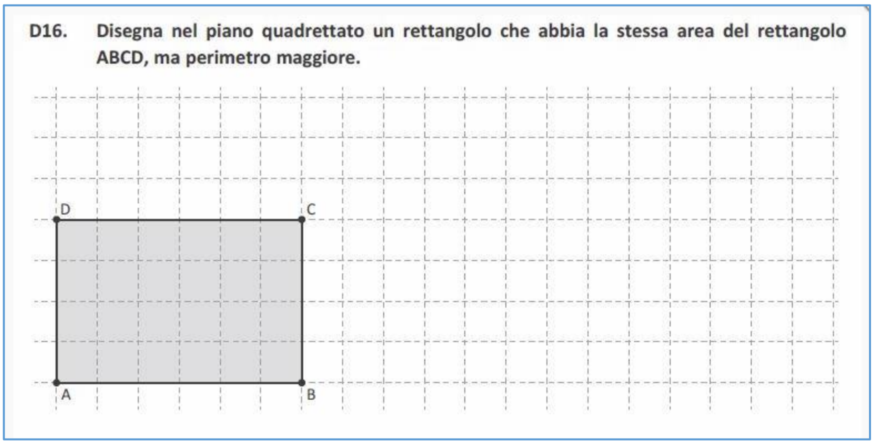
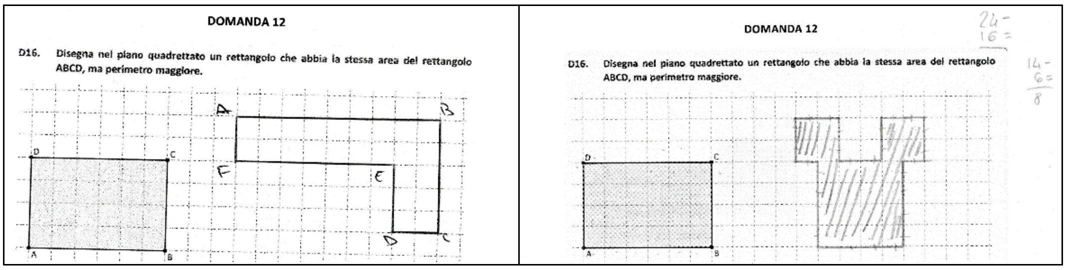


Fig. 5 – item G8 del 2013

Tabella 4. Risultati nei diversi ordini di scuola nell'item G8 del 2013

	corretta
V Primaria	70,7%
II Sec. I grado	80,1%
III Sec. I grado	77,9%
I Sec. II grado	60,2%
II Sec. II grado	74,6%
IV Sec. II grado	58,9%
Campione nazionale	57,8%

Poi, esaminando i fascicoli siamo riusciti a stupirci per il fatto che, pur comparendo ben due volte la parola "rettangolo" nel testo della domanda, gli studenti della prima classe della secondaria di II grado abbiano avuto particolare creatività nel rispondere (vedi Fig. 6).
In questo caso può entrare in gioco anche una lettura selettiva del testo (Zan, 2016), per cui gli studenti, anche svolgendo calcoli e aggiustamenti, si sono concentrati solo sulla richiesta relativa al perimetro.



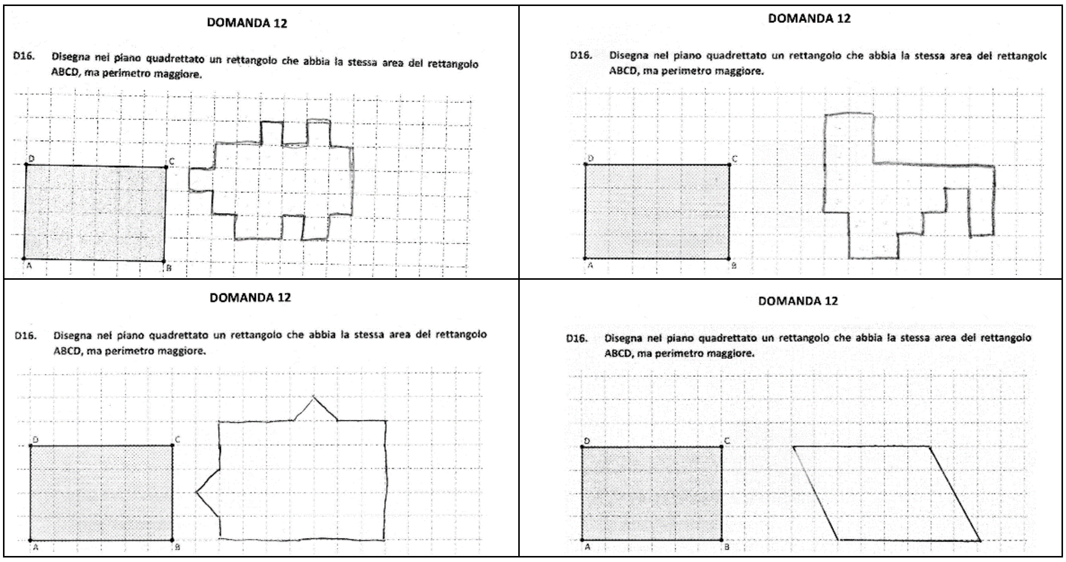
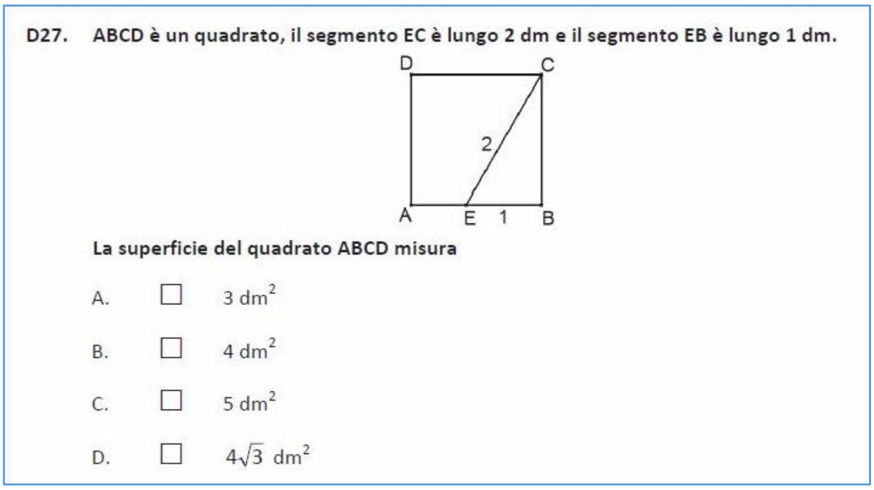


Fig. 6 – Fantasiose risposte alla domanda

L’ultimo item che abbiamo analizzato era contenuto nel fascicolo per la seconda secondaria di II grado nel 2013 (vedi Fig. 7). Siamo stati molto indecisi se somministrarlo anche agli studenti della quinta Primaria. Poi però abbiamo scelto di sottoporlo lo stesso anche a loro per vedere come andava, nonostante per rispondere fosse all’apparenza necessario conoscere il teorema di Pitagora.


D27. **ABCD è un quadrato, il segmento EC è lungo 2 dm e il segmento EB è lungo 1 dm.**

La superficie del quadrato ABCD misura

A. ☐ 3 dm^2

B. ☐ 4 dm^2

C. ☐ 5 dm^2

D. ☐ $4\sqrt{3}$ dm^2

Fig. 7 – Item G10 del 2013

Nonostante solo uno studente su cinque nella primaria abbia risposto correttamente (vedi Tabella 5), ci siamo stupiti che in due classi quinte di un Istituto il risultato sia stato sensibilmente migliore (vedi Tabella 6).

Tabella 5. Risultati nei vari ordini di scuola nell'item G10 del 2013

	corretta
V Primaria	19,5%
II Sec. I grado	72,1%
III Sec. I grado	69,9%
I Sec. II grado	29,3%
II Sec. II grado	60,1%
IV Sec. II grado	66,3%
Campione nazionale	35,0%

Tabella 6. Risultati nei diversi plessi di scuola Primaria nell'item G10 del 2013

Plessi	corretta
P1	29,2%
P2	20,5%
P3	8,7%

Abbiamo allora chiesto il motivo di tale performance e abbiamo scoperto che gli studenti della classe che ha avuto i risultati migliori (plesso1) erano andati qualche giorno prima a Pennabilli al Museo del calcolo e si ricordavano dell'esperienza fatta proprio sul teorema di Pitagora (vedi Fig. 8). Questo è un esempio di una situazione non didattica (Brousseau, 1986), in quanto l'insegnante non pensava certamente che la visita al museo avrebbe portato a comprendere il teorema in questione.

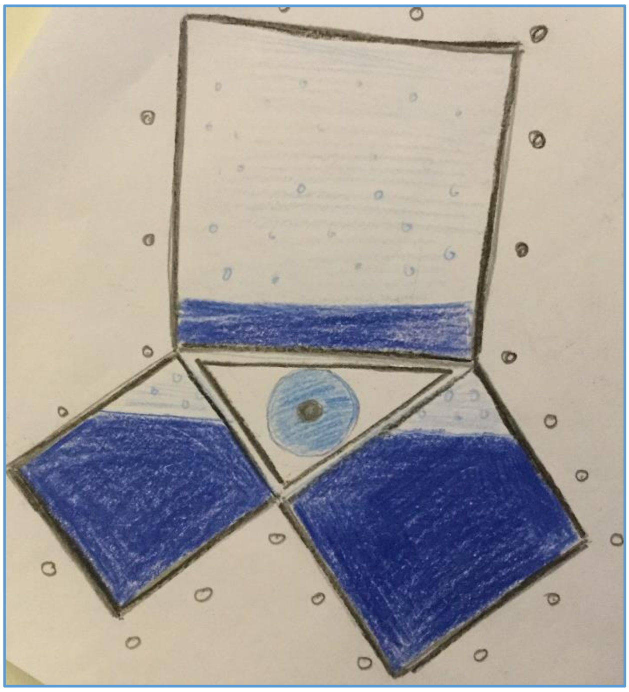


Fig. 8 – Macchina matematica del museo per dimostrare il teorema di Pitagora (disegnata dai ragazzi dopo la visita al museo)

Altri, invece (plesso 2) avevano svolto un'attività laboratoriale sul teorema di Pitagora, che consisteva nel formare due quadrati equivalenti assemblando 3 quadrati (di lato 3, 4 e 5 cm) e 8 triangoli rettangoli con cateti di 3 e 4 cm). Anche questa modalità "visuale" (vedi Fig. 9) è stata ricordata da alcuni alunni.

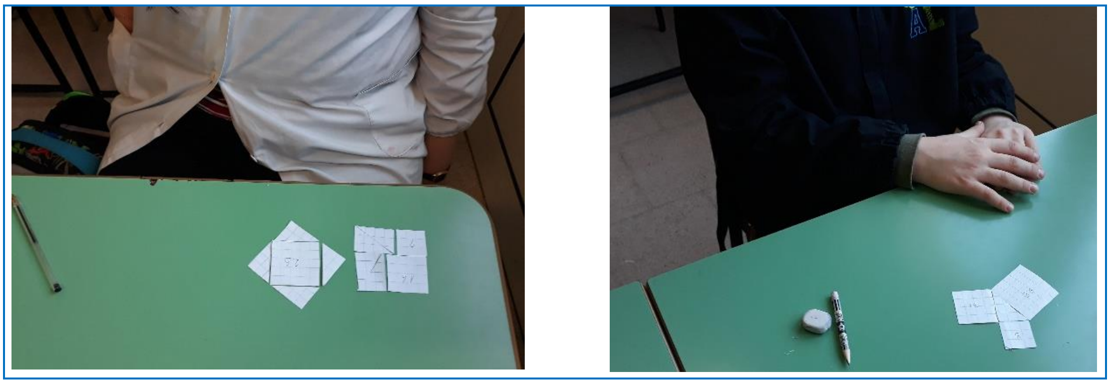


Fig. 9 – Attività laboratoriale sul teorema di Pitagora in una classe di scuola Primaria

Ci siamo incuriositi anche delle risposte di altri studenti della primaria che ci hanno detto che hanno proceduto per esclusione.

Gli altri studenti della primaria che hanno risposto correttamente ci hanno detto che sono andati "per esclusione". Hanno escluso il 4 e il 5 "perché il lato CB è più piccolo di 2" e il "$4\sqrt{3}$ sembra più grande di 4". Un altro bambino ha detto che "ho fatto togliendo il 4 e il 5 che erano troppo grandi e quell'altro ($4\sqrt{3}$), perché strano".

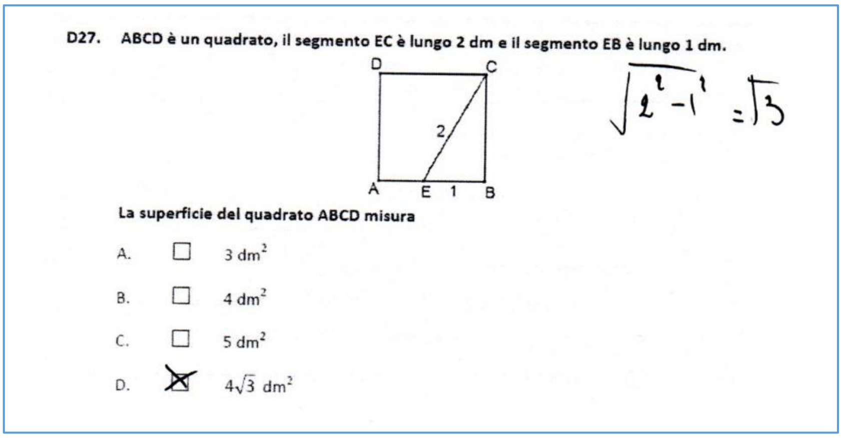


Fig. 10 – Risoluzione errata del quesito in una seconda di II grado

Nelle secondarie hanno, invece, utilizzato, in genere correttamente, il teorema di Pitagora, ma l'errore più comune è stato quello di scegliere di calcolare la misura del perimetro, invece di quella, richiesta, dell'area (vedi Fig. 10). La confusione tra perimetro e area continua ad essere una misconcezione presente in molti studenti.

Anche in questo caso può essere collegabile alla lettura selettiva del testo, ma ancora di più alla presenza tra i possibili risultati di un dato che li ha attirati, avendo trovato $\sqrt{3}$ grazie al teorema di Pitagora.

Conclusione

Dall'analisi condotta nella nostra ricerca è emerso che la percentuale di risposte corrette nella maggior parte dei casi non accresce all'aumentare del livello di scuola Questo accade, secondo noi, per molteplici motivi, ma soprattutto per il fatto che l'apprendimento degli studenti è spesso dovuto all'esecuzione di esercizi ripetitivi, che non lo porta ad essere veramente significativo e soprattutto duraturo nel tempo.

Si rileva anche la presenza in tutti gli ordini di scuola di misconcezioni relative ai concetti di area e perimetro, spesso confusi, ma entra sicuramente in gioco pure la lettura frettolosa che non contribuisce ad una corretta comprensione del testo.

Un'altra considerazione che possiamo fare è che alcuni concetti possono essere assimilati meglio se lo studente fa esperienze che lo colpiscono, o comunque lo affascinano, come nel caso di una visita ad un museo, ma sicuramente anche attraverso attività di tipo laboratoriale.

Il laboratorio di matematica è particolare proprio perché non si realizzano manufatti tangibili, da portare a casa, ma si possono costruire saperi significativi e duraturi negli studenti.

Da osservare infine che, in generale, gli item somministrati hanno ottenuto risultati migliori rispetto al campione nazionale. Questo, secondo noi, principalmente perché è stato eliminato lo stress del tempo e anche il peso valutativo della prova non era paragonabile a quella che la prova nazionale aveva fino a due anni fa.

Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Bibliografia

Binanti L., a cura di, (2001). *Pedagogia, epistemologia e didattica dell'errore*. Rubbettino editore, Soveria Mannelli (CZ).

Brousseau G. (1986). *La relation didactique: le milieu*. Actes de la IVème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques, pp. 54-68, IREM Paris.

Castoldi M. (2012). *Valutare a scuola: dagli apprendimenti alla valutazione di sistema*. Carrocci editore, Roma.

D'Amore B., (2001). *Elementi di Didattica della Matematica*. Pitagora Editrice, Bologna.

D'Amore B., (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Pitagora editrice, Bologna.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., (2006). *Che problema i problemi !*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 6, vol. 29 AB. 645-664. Editore: Centro Morin, Paderno del Grappa (TV).

D'Amore B., Sbaragli S., (2011). *Principi di base di Didattica della matematica*. Pitagora Editrice, Bologna.

Fandiňo Pinilla M.I., D'Amore B., (2006). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*. Erikson, Trento.

Sbaragli S., (2006). *Le misconcezioni in aula*. Articolo di divulgazione. NRD Dipartimento di Matematica. Università di Bologna.

Trinchero R., (2016). *Costruire, valutare, certificare competenze. Proposte di attività per la scuola*. Franco Angeli editore, Milano.

Trinchero R., (2017). *Costruire e certificare competenze con il curricolo verticale nel primo ciclo*. Rizzoli Education.

Zan R., (2016). *I problemi di matematica*. Carrocci editore, Roma

Zan R., Baccaglini Frank A., (2017). *Avere successo in matematica – Strategie per l'inclusione e il recupero*. Utet.

Zeitz P., (2007). *The Art and Craft of Problem solving*. Second edition. John Wiley & Sons, Inc.

Gli Autori

Stefano Babini
Liceo Artistico Statale "Paolo Toschi"
Via Toschi, 1– Parma (PR)
stefano0011@libero.it
Italy

Professore a tempo indeterminato di matematica e fisica. Appassionato di problem solving, di comunicazione didattica e delle nuove tecnologie applicate alla didattica (docente da diversi anni nelle classi 2.0).
Si occupa inoltre di processi di apprendimento e di valutazione in vari contesti formativi e di sistema.
Collabora da anni con l'INVALSI (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione).

Ivan Graziani
Scuola Secondaria di I grado "Galileo Galilei"
Via Arcangeli, 1, Santa Sofia (FC)
graziani.ivan@tin.it
Italy

Professore a tempo indeterminato di matematica. Formatore in didattica della matematica. Appassionato di ICT, di problem solving e di comunicazione didattica.
Si occupa inoltre di processi di apprendimento e di valutazione in vari contesti formativi e di sistema.
Fa parte del Gruppo di Ricerca Sperimentazione in Didattica della Matematica (GRSDM)
dell'università di Pisa. Fa parte del gruppo di ricerca in didattica "Diverticalmath".
Collabora da diversi anni con l'Università di Bologna, con l'INDIRE (Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa), con l'INVALSI (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione) e con l'USR Emilia Romagna (Ufficio Scolastico Regionale).

Received November 17, 2018; *revised* December 19, 2018; *accepted* December 27, 2018; *published online* Juley 28, 2019