

## Look ... what a beautiful figure: misconceptions and more in geometry

Ivan Graziani, Stefania Neri

---

**Abstract.** *The activities were carried out to a view to verticality and continuity between the first and second cycle of education. Our research group, Diverticalmath, which operates in the provinces of Forlì-Cesena and Ravenna, has been dealing with vertical teaching for a couple of years to make mathematics more fun and loved by students.*

*The purpose was to verify the presence of misconceptions and to highlight, through a laboratory teaching, that geometry does not deal with the position of the figures, but only with their shape, their measurements and their transformations, isometric or not.*

*The students worked in small groups, in cooperative mode, also to foster constructive relationships among the comrades and to increase confidence in their means. Through these activities, we have tried to move from knowledge to know-how and, finally, to the construction of meanings, which then lead to building skills.*

**Key words.** *Verticality, Figures, Geometry.*

---

**Sommario.** (Guarda... che bella figura: misconcezioni e altro in geometria). *Il nostro lavoro di ricerca è stato condotto su studenti di scuola primaria e secondaria di I e II grado.*

*Le attività sono state svolte in un'ottica di verticalità e di continuità tra il primo e il secondo ciclo di istruzione. Il nostro gruppo di ricerca, Diverticalmath, che opera nelle province di Forlì-Cesena e Ravenna, si occupa, già da un paio di anni, della didattica in verticale per rendere la matematica più divertente e amata dagli studenti.*

*Lo scopo è stato quello di verificare la presenza di misconcezioni e di mettere in evidenza, attraverso una didattica laboratoriale, che la geometria non si occupa della posizione delle figure, ma solo della loro forma, delle loro misure e delle loro trasformazioni, isometriche o meno.*

*Gli studenti hanno lavorato a piccoli gruppi, in modalità cooperativa, anche per favorire relazioni costruttive tra i compagni e potenziare la fiducia nei loro mezzi. Attraverso queste attività abbiamo cercato di passare dal sapere al saper fare e, infine, alla costruzione di significati, che portano poi a costruire competenze.*

**Parole chiave.** *Verticalità, Figure, Geometria.*

---

## Introduzione

La nostra attività e il nostro lavoro di ricerca sono stati incentrati soprattutto sulla geometria e in particolare sulle “posizioni” delle figure geometriche.

Volevamo vedere se alcune difficoltà, emerse anche dalle indagini nazionali e internazionali, potessero avere radici profonde, iniziate già alla scuola dell’infanzia.

Abbiamo visto che, un po’ a tutti i livelli, sia nel primo che nel secondo ciclo, ci sono diverse misconcezioni relative alle figure geometriche e soprattutto alle loro misurazioni.

Abbiamo lavorato con i bambini e i ragazzi in modo laboratoriale e a piccoli gruppi, introducendo anche alcuni aspetti di tipo ludico. Il tutto sempre con un’ottica di verticalità e di continuità.

Questo laboratorio è stato inoltre effettuato, con i docenti del primo ciclo, anche durante il XXXV Convegno UMI-CIIM “*Matematica e scienze nell’insegnamento: frontiere da aprire e ponti da costruire*”, che si è tenuto a Cagliari, dal 4 al 6 ottobre 2018.

## Destinatari e tempi

L’attività è stata svolta durante gli anni scolastici 2016/2017 e 2017/2018 con i docenti delle scuole del primo e del secondo ciclo e con gli studenti delle scuole dell’Infanzia, Primaria e Secondaria di I grado dell’Istituto Comprensivo di Santa Sofia (FC) e presso alcune classi di Liceo Scientifico e Istituti Tecnici e Professionali di vari indirizzi della provincia di Forlì-Cesena.

## Attività e sperimentazione

La nostra attività di sperimentazione è iniziata dai docenti e dall’analisi della normativa vigente (indicazioni Nazionali per il primo ciclo e linee guida per il secondo ciclo di Istruzione), sempre in un’ottica di verticalità e di continuità.

Inoltre, secondo noi è molto importante abituare gli studenti fin da piccoli ad argomentare e a non avere paura a farlo. Abbiamo notato, infatti, che il timore di argomentare solitamente è inversamente proporzionale all’età e al grado scolastico frequentato, per cui abituare e continuare a far argomentare i ragazzi è fondamentale per una “buona riuscita” in matematica (Baccaglini et al., 2018).

Siamo partiti con una domanda che Alice pone allo Stregatto, nel famoso Romanzo di Lewis Carroll “*Alice nel paese delle meraviglie*” (vedi Fig. 1).



Fig. 1 – Alice e lo Stregatto

E proprio questo è il punto: Noi dove vogliamo andare?

La nostra “direzione” è fissata dai Traguardi per lo sviluppo delle competenze nelle indicazioni nazionali per il curriculum del 2012, nelle linee guida per i tecnici e nelle indicazioni per i licei.

Il traguardo non va, infatti, inteso come punto di arrivo, né come obiettivo statico di una disciplina, ma proprio come la direzione verso cui tendere la nostra azione didattica.

Un esempio in verticale del segmento che noi analizziamo è nella tabella (Tabella 1).

**Tabella 1 – Traguardi al termine dei tre ordini del primo ciclo e del secondo ciclo (ricavato al Quadro di Riferimento Invalsi)**

<b>Traguardi al termine della scuola dell'Infanzia</b>	<b>Traguardi al termine della scuola Primaria</b>	<b>Traguardi al termine della scuola Secondaria di I grado</b>	<b>Traguardi al termine della scuola Secondaria di II grado</b>
Individua le posizioni di oggetti e persone nello spazio usando termini come avanti/dietro, sopra/sotto...	Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo.	Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi.	Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi. Utilizza proprietà delle figure geometriche e teoremi per il calcolo di lunghezze, aree e volumi

Stabilita quindi la meta, occorre scegliere la strada da seguire e questa è tracciata dal Curricolo (verticale) di Istituto.

Da un ipotetico curriculum verticale per un Istituto comprensivo del primo ciclo di istruzione, per anni di snodo, abbiamo mostrato questa tabella (Tabella 2), relativa alle conoscenze su: posizioni e movimenti degli oggetti nello spazio e nel piano.

**Tabella 2 – Abilità per anni di snodo**

<b>ABILITA' (fine SI)</b> Riconosce, sperimenta e descrive relazioni spaziali (dentro/fuori, sopra/sotto, aperto/chiuso ...) usando principalmente la gestualità. Coglie aspetti diversi dello stesso oggetto osservandolo da posizioni spazialmente differenti.	<b>ABILITA' (fine 3<sup>^</sup>SP)</b> Utilizza i concetti topologici mediante registri rappresentativi diversi. Effettua movimenti rigidi di figure nel piano e nello spazio e riconosce elementi invarianti. Si muove dallo spazio al piano e viceversa (sviluppi). Riconosce i diversi movimenti rigidi delle figure (traslazioni, rotazioni, simmetrie). Effettua, in contesti concreti, movimenti rigidi di oggetti e figure.
<b>ABILITA' (fine 5<sup>^</sup>SP)</b> Classifica i movimenti rigidi secondo criteri stabiliti. Effettua movimenti rigidi di oggetti e figure utilizzando gli strumenti della geometria. Riconosce figure uguali e descrive le isometrie necessarie per portarle a coincidere.	<b>ABILITA' (fine SS1<sup>°</sup>g)</b> Effettua movimenti rigidi utilizzando il piano cartesiano. Visualizza oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresenta su un piano una figura solida. Riconosce in vari contesti grandezze proporzionali e figure simili e riproduce in scala una figura assegnata.

Per introdurre le attività che avremmo svolto con gli studenti siamo partiti affermando:

*“La geometria è nata quando l’uomo cominciò a costruire le prime capanne”*

e abbiamo mostrato una figura (Fig. 2).

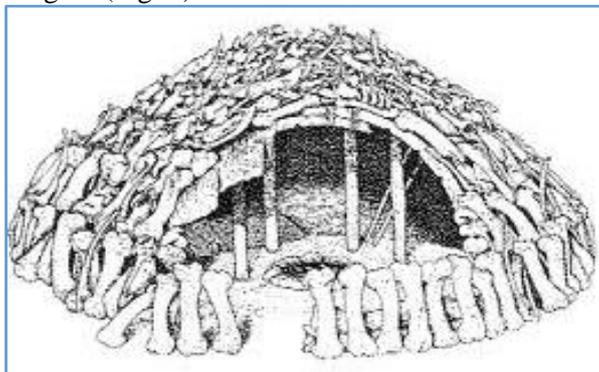


Fig. 2 – capanna preistorica

Poi abbiamo aggiunto: “Il cerchio è “l’ultima” figura che si studia a scuola, è considerata la più difficile... Perché? Forse la spiegazione sta in una simpatica vignetta (vedi Fig. 3).



Fig. 3 – Vignetta umoristica

Siamo poi passati alle attività svolte con gli studenti nelle varie classi dei diversi ordini di scuola.

## Le figure geometriche

Alla Scuola dell’Infanzia abbiamo iniziato, insieme alla maestra, a far vedere ai bambini di 5 anni varie figure geometriche semplici (quadrato, triangolo e cerchio) e abbiamo chiesto se conoscessero i loro nomi. La maggior parte dei bambini riconosceva subito le prime due figure e sapeva i loro nomi, mentre per il cerchio la maggior parte di loro lo chiamava “Tondo”. È importante, fin dalla scuola dell’infanzia, introdurre i nomi corretti delle figure che i bambini incontrano, per evitare di creare delle misconcezioni che poi sono difficili da eliminare (D’Amore, Sbaragli, 2011).

Abbiamo poi chiesto di guardarsi intorno nella stanza in cui eravamo e di trovare quali figure fossero presenti simili a quelle viste.

Alle tre figure ne abbiamo aggiunte altre due che erano presenti nelle “forme” che avevano a scuola (il rettangolo e il pentagono). Appurato che alcuni conoscevano il nome del primo, ma

nessuno quello del secondo. Abbiamo chiesto di vedere se quelle figure si trovavano intorno a loro. Un bimbo ha detto “di rettangoli ce ne sono tanti, anche fuori, il campo da calcio, la televisione, i biscotti...”.

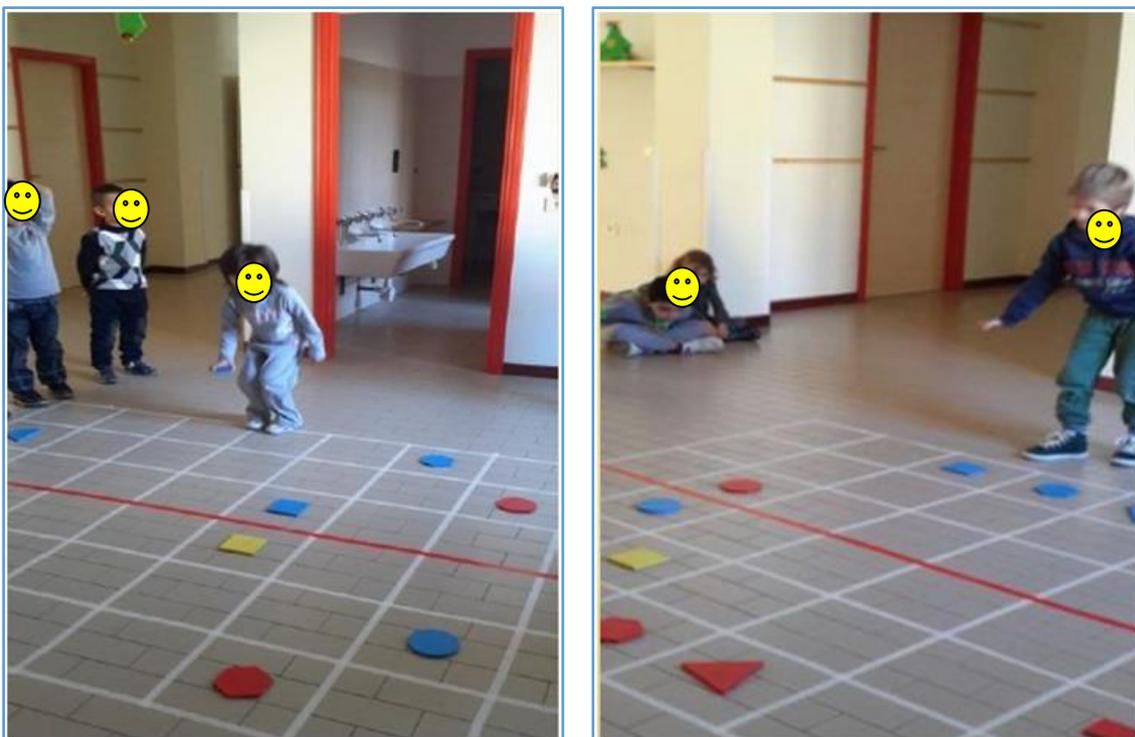


Fig. 4 – bambini all’opera nel gioco del Twister geometrico con le figure

Abbiamo poi chiesto ai bambini se muovendo sul pavimento una figura, questa cambiasse la forma, così come se loro si mettevano in piedi o sdraiati per terra cambiasse qualcosa nelle loro “forme”. I bambini hanno detto tutti di no, anche con il quadrato messo in posizione non standard.



Fig. 5 – bambini che giocano alle simmetrie con il Twister geometrico

A questa età, secondo noi, per fortuna i bambini sono ancora “puri” e non contaminati da eventuali preconcetti o misconcezioni.

Dopo abbiamo affrontato una attività-gioco, (vedi Fig. 4 e 5): abbiamo giocato a *Twister* geometrico. I bambini dovevano posizionare in modo simmetrico (è stato spiegato a loro con esempi pratici cosa significasse, anche simulando due bambini che si guardano come se fossero allo specchio), rispetto ad un asse posto sul pavimento, le figure geometriche viste precedentemente.

Con la scuola dell’infanzia ci siamo fermati qui. Per noi era importante soprattutto farli giocare con le figure geometriche e fargliele già vedere in posizioni non standard, per non mostrare sempre le figure in un’unica posizione come accade purtroppo spesso nei libri di testo. Abbiamo quindi avuto modo di ribadire alle docenti di chiamare le figure o altri oggetti matematici con il loro nome già da questo ordine di scuola, per non creare misconcezioni nei bambini.

Anche il linguaggio è importante: ad un corso per docenti abbiamo mostrato questa immagine che sul web è diventata in poco tempo virale (vedi Fig. 6).

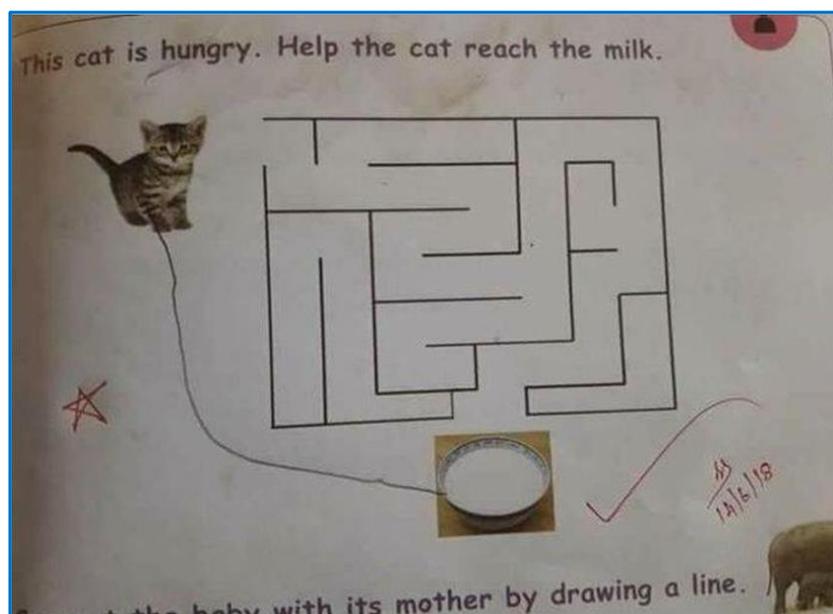


Fig. 6 – Item mostrato al corso per docenti

Abbiamo detto ai docenti presenti: “Che figura facciamo (talvolta) noi docenti!”.

Immagini come queste ce ne sono anche altre, come quella, sempre virale, che chiede di trovare la  $x$  posizionata sull’ipotenusa di un triangolo con cateti noti (vedi Fig. 7).

Infatti, è estremamente importante quando si pone una domanda ai nostri studenti, non solo in geometria, essere molto chiari nella richiesta che viene fatta, per evitare problemi come quelli mostrati nelle due figure precedenti e fare, come docenti, una brutta figura.

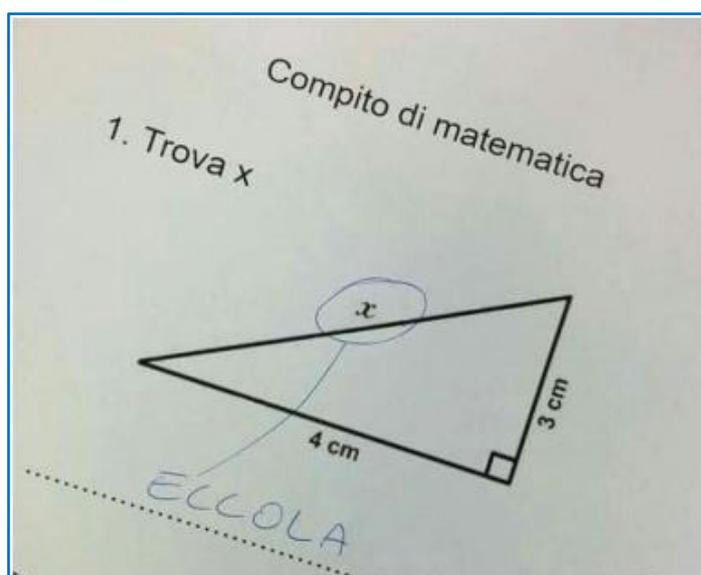


Fig. 7 – Item mostrato al corso per docenti

Nelle classi della scuola primaria abbiamo svolto una stessa attività, la cui preparazione è stata effettuata con difficoltà crescente dalla prima alla quinta.

Nelle prime due classi abbiamo fornito ai bambini già un foglio di forma circolare, mentre dalla terza in su abbiamo chiesto di realizzarlo partendo da un foglio A4. Abbiamo anche specificato che il foglio non doveva avere piegature. Questa era la consegna: “Costruisci un foglio di forma circolare senza usare piegature”.

Poi agli studenti sono state date le seguenti indicazioni operative:

*Disegna dentro di esso:*

Te “steso” e “in piedi”

Un qualche oggetto “steso” e “in piedi”  
*un segmento verticale e un segmento orizzontale*  
*Dall'altra parte del foglio disegna un rettangolo*

Dopo l'attività abbiamo chiesto agli studenti: “Che differenze hai trovato nell'usare questo foglio?”.

Tra le risposte ricorrenti e più simpatiche sono state le seguenti:

- È rotondo (studenti poco fantasiosi...).
- Non ha un verso.
- Non ha i quadretti (grandi osservatori...).

Allora abbiamo detto ai bambini: “Ecco dove volevamo arrivare!”

“La geometria si occupa forma, delle loro misure e delle loro trasformazioni, isometriche o meno, ma non della loro POSIZIONE!”

Anche con loro abbiamo giocato a Twister geometrico sia con i poligoni e le figure studiate, sia

con i solidi, sia con loro stessi.

Abbiamo giocato con loro anche a un “Indovina chi – geometrico” (vedi Fig. 8), nel quale invece di dover individuare un personaggio in base alle caratteristiche del volto, come nel gioco originale, dovevano trovare a quale figura geometrica si riferivano le proprietà elencate (una alla volta).

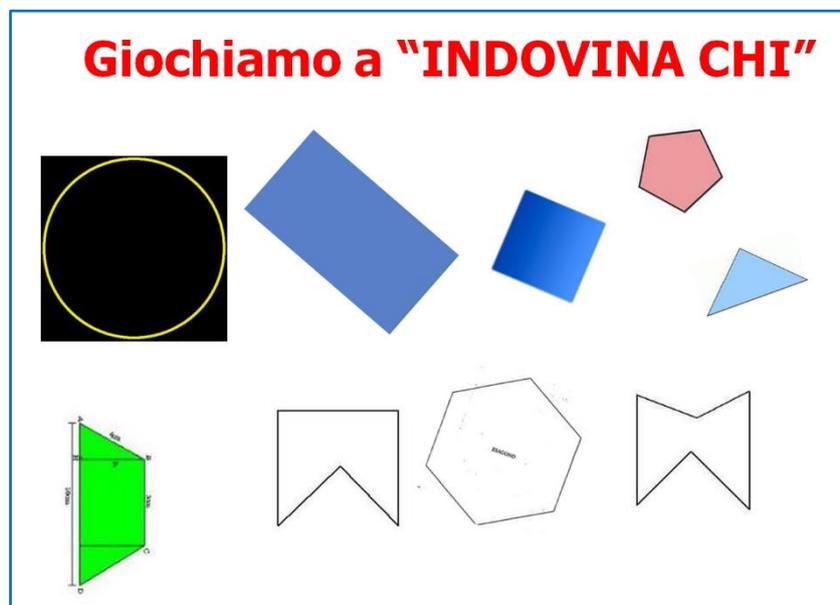


Fig. 8 – Figure di “Indovina chi – geometrico”

Le caratteristiche delle figure potevano essere le seguenti:

- È un poligono (in questo caso si eliminava il cerchio)
- Ha più di 3 lati (si eliminava il triangolo)
- Non ha angoli retti (si toglievano, quadrato, rettangolo e pentagono non regolare)
- Ha meno di 6 lati (si toglievano i due esagoni)
- Ha due lati paralleli (si eliminava il pentagono e rimaneva l’unico vincitore: il trapezio volutamente non in posizione standard come anche gli altri).

Nella scuola secondaria di I grado abbiamo giocato a “Indovina chi – geometrico”, introducendo anche i solidi, mentre nella secondaria di II grado abbiamo introdotto rette e curve della geometria analitica.

Nella scuola secondaria di I grado, ma già anche nelle ultime due classi della Primaria, abbiamo svolto delle attività con il software Geogebra.

Va comunque precisato che, secondo noi, i software di geometria dinamica possono aiutare gli studenti a visualizzare meglio alcune particolarità che si perdono nei libri di testo e nelle normali costruzioni come la possibilità di spostare i punti notevoli dei triangoli, o le misure degli angoli, rette parallele o perpendicolari, ecc. (vedi Fig. 9a e 9b).

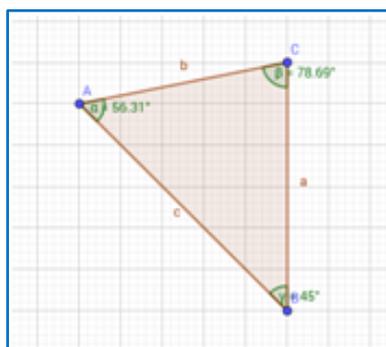


Fig. 9a – Per verificare che la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre di  $180^\circ$

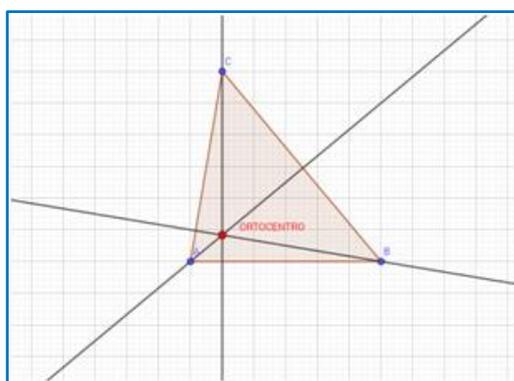


Fig. 9b – Per visualizzare come si sposta l'ortocentro dal triangolo acutangolo a quello rettangolo e quello ottusangolo

Tuttavia l'abilità di costruire figure con riga, squadra e compasso e la relativa manualità non devono assolutamente essere perse dai ragazzi, anche per comprendere meglio alcune caratteristiche che solo con la costruzione possono essere più adeguatamente interiorizzate.

Girando per le classi di scuola primaria e secondaria di I e II grado, ci siamo pure accorti che spesso ci sono grossi dubbi su alcune figure, anche elementari.

Questo accade soprattutto quando la loro "posizione" non è quella "standard" (vedi Fig. 10).

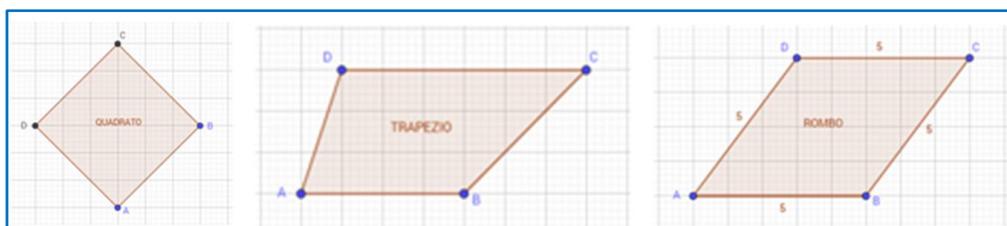
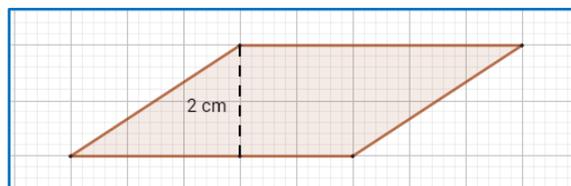


Fig. 10 – poligoni in posizione "non standard"

Purtroppo, anche alcuni libri di testo non aiutano molto, come nell'osservazione aggiunta proprio a un rombo rappresentato in forma non standard.

In un libro di testo per la secondaria di I grado abbiamo trovato un problema di questo tipo: “Determina l’area di un rombo avente il lato di 5 cm e l’altezza di 2 cm”. La figura, sotto il testo, era rappresentata in forma non standard (vedi Fig. 11).



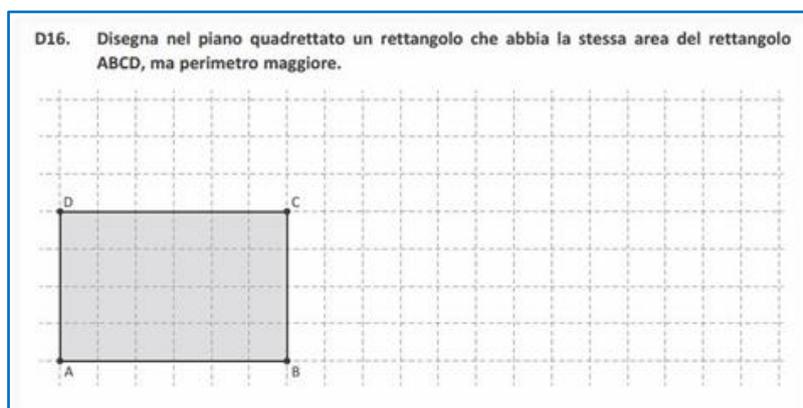
**Fig. 11 – Il rombo, come era presentato nel testo**

Fin qui tutto bene. Poi, però, sotto la figura c’era un riquadro che invitava ad osservare che “il rombo posizionato come in figura diventa un parallelogramma avente per base il lato del rombo e per altezza l’altezza del rombo”.

Ma come “un rombo posizionato come in figura diventa un parallelogramma”? Prima non lo era?

Nelle classi quinte della Primaria e nelle due secondaria abbiamo svolto anche delle attività su alcuni quesiti di geometria contenuti nelle prove Invalsi degli anni precedenti.

Il primo quesito era parte della Prova Nazionale (terza secondaria I grado) nel 2013 (vedi Fig. 12). Il quesito, all’apparenza semplice, lo abbiamo assegnato dalla quinta primaria in su. La curiosità sta nel fatto che quelli che l’hanno maggiormente sbagliato sono stati gli studenti del biennio della secondaria di II grado (vedi Fig. 13).



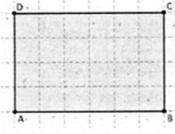
**Fig. 12 – Item per il grado 8 del 2013**

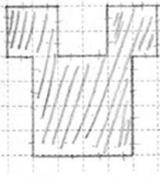
Da notare che nel testo della domanda compare due volte la parola rettangolo!

Un altro item interessante su cui si può lavorare con gli studenti dalla quinta primaria in su, è quello presente nella prova del 2017 (vedi Fig. 14) proprio per la quinta primaria, ma che ha dato qualche problema anche nelle due secondarie.

**DOMANDA 12**

D16. Disegna nel piano quadrettato un rettangolo che abbia la stessa area del rettangolo ABCD, ma perimetro maggiore.





$\frac{24}{16} =$   
 $\frac{14}{8} =$



**DOMANDA 12**

D17. Disegna nel piano quadrettato un rettangolo che abbia la stessa area del rettangolo ABCD, ma perimetro maggiore.

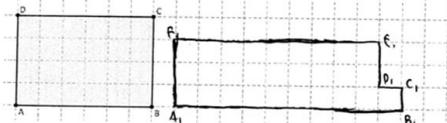
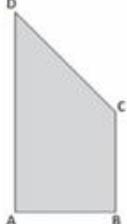


Fig. 13 – Errori in un istituto di secondo grado

D11. Osserva il trapezoido disegnato qui sotto.



AD misura il doppio di BC.  
 BC è uguale ad AB.  
 Tutte le figure disegnate sotto sono state ottenute utilizzando due trapezi uguali al trapezoido ABCD.



Figura 1

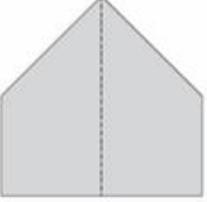


Figura 2

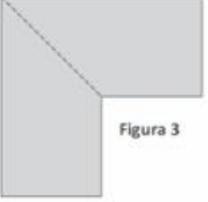


Figura 3

Completa la frase scrivendo al posto dei puntini una delle due parole che vedi sotto la riga di puntini.

Le tre figure hanno area ..... e perimetro .....

(uguale/diversa)                      (uguale/diverso)

Fig. 14 – Item per il grado 5 del 2017

A noi è piaciuto, in particolare un quesito con due item, presenti nella Prova nazionale del 2015 (Fig. 15).

**D11. Osserva i triangoli nella seguente figura.**

a. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

A.  I tre triangoli hanno stessa area e stesso perimetro

B.  I tre triangoli hanno stessa area e diverso perimetro

C.  I tre triangoli hanno diversa area e stesso perimetro

D.  I tre triangoli hanno diversa area e diverso perimetro

b. Posiziona sul lato AB del quadrato il punto P in modo che il triangolo AEP abbia area doppia del triangolo EFB.

Fig. 15 – Item per il grado 8 del 2015

In questo caso gli errori maggiori sono stati nel secondo item, anche con diverse “omissioni”.

Un ultimo item su cui ragionare è quello uscito per la classe seconda della secondaria di II grado nel 2015 (Fig. 16), ma che può essere tranquillamente assegnato anche nella secondaria di I grado. Questo è interessante perché coglie una misconcezione che viene fornita anche da vari libri di testo.

**D29. Solo una delle seguenti affermazioni è vera. Quale?**

A.  Ogni triangolo ha un centro di simmetria

B.  Tutti i triangoli equilateri hanno un centro di simmetria

C.  Ogni triangolo ha almeno un asse di simmetria

D.  Alcuni triangoli hanno un asse di simmetria

Fig. 16 – Item per il grado 10 del 2015

Abbiamo somministrato il quesito a oltre 200 studenti dalla quinta primaria alla secondaria di II grado e molto studenti, in tutti gli ordini di scuola, hanno scelto la risposta B (36%), e altri (9%) hanno affermato che secondo loro erano giuste due risposte (B e D). Purtroppo, abbiamo trovato l'affermazione B anche in alcuni libri di testo sia della secondaria di I grado, sia in quella di II grado e questo porta a generare delle false convinzioni, che poi sono difficili da “sradicare” dalle menti dei nostri studenti.

## Conclusione

Un motto latino recitava “ludendo docere” che significa “insegnare divertendo”. Con questo scopo è nato il gruppo di ricerca in didattica matematica Divertical-Math, e abbiamo condotto anche il nostro lavoro ricerca con i docenti prima e con i ragazzi in un secondo momento.

Per noi era importante ribadire di che cosa si occupa la geometria, sia con gli studenti che con gli insegnanti e questo lo abbiamo fatto in tutti gli ordini di scuola.

Dovevamo anche cercare di “scovare” e di “togliere di torno” alcune misconcezioni particolarmente “pericolose”, che, più avanti si va negli ordini di scuola, più sono difficili da eliminare. Una, soprattutto, è quella relativa ai concetti di area e perimetro che, nei nostri incontri e nelle schede, abbiamo trovato a tutti i livelli, anche in una ricerca svolta quest’anno su oltre 700 studenti del primo e secondo ciclo.

Affrontare comunque questi temi in forma giocosa e divertente, ha contribuito molto a interessare i bambini e i ragazzi, in una sorta di situazioni a-didattiche, tanto care a Brousseau (D’Amore, 2001).

Destare interesse per la geometria è molto importante, anche per migliorare la visione che gli studenti hanno, o che si stanno costruendo, della matematica. Spesso i ragazzi identificano la nostra disciplina come quella in cui si devono solo fare dei calcoli e se già da piccoli avranno una visione così distorta della matematica, difficilmente si impegneranno ad amarla e sicuramente la manterranno anche da adulti (Zan, Baccaglioni Frank, 2017).

## Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

## Bibliografia

- Baccaglioni Frank A., Di Martino P., Natalini R., Rosolini G., (2018). *Didattica della Matematica*. Mondadori Università.
- D’Amore B., (2001). *Elementi di Didattica della Matematica*. Pitagora Editrice.
- D’Amore B., Sbaragli S., (2011). *Principi di base di Didattica della matematica*. Pitagora Editrice.
- Zan R., Baccaglioni Frank A., (2017). *Avere successo in matematica – Strategie per l’inclusione e il recupero*. Utet.

## Gli Autori

**Ivan Graziani**

Istituto Comprensivo di Santa Sofia – Scuola Secondaria di I grado “Galileo Galilei”  
Via Arcangeli, 1, 47018 Santa Sofia (FC)  
graziani.ivan@tin.it  
Italy

Professore a tempo indeterminato di matematica. Formatore in didattica della matematica. Appassionato di ICT, di problem solving e di comunicazione didattica. Si occupa inoltre di processi di apprendimento e di valutazione in vari contesti formativi e di sistema.

Fa parte del “Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica della Matematica – Pisa” (GRSDM). Fa parte del gruppo di ricerca in didattica “Divertical-Math”.

Collabora da diversi anni con l’Università di Bologna, con l’INDIRE (Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa), con l’INVALSI (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione) e con l’USR Emilia Romagna (Ufficio Scolastico Regionale).

**Stefania Neri**

Stefineri51@libero.it  
Italy

Già insegnante di matematica nella scuola secondaria di I grado.

Formatrice in didattica della matematica. Si occupa inoltre di costruzione di curricula verticali, processi di apprendimento e di valutazione in vari contesti formativi e di sistema e di didattica e valutazione per competenze.

Fa parte del gruppo di ricerca in didattica della matematica “Divertical-Math”.

*Received* November 05, 2018; *revised* November 18, 2018; *accepted* November 28, 2018; *published online* December 12, 2018

**Open Access** This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

