article

ISSN 2421-7247

The early algebra and the ArAl project[1]

Giancarlo Navarra

***Abstract*[2].** *The paper introduces the Early Algebra and the 'ArAl Project, Arithmetic pathsways towards favouring pre-algebraic thinking'. Three workshops are presented, dedicated to three Teaching Units (Pitagora Editrice Bologna): Numbers pyramids, Numbers grids, Matematòca & other mathematical games.*

Key words. *Early algebra, ArAl Project, Algebraic babbling, Numbers pyramids, Numbers grids, Matematòca.*

Sommario. (L'early algebra e il progetto ArAl). *Nell'articolo si introducono l'Early Algebra e il Progetto ArAl, Percorsi nella matematica per favorire il pensiero prealgebrico. Si presentano poi tre laboratori dedicati ad altrettante Unità della Collana ArAl (Pitagora Editrice Bologna): Le piramidi di numeri, La griglia di numeri, Il gioco della Matematòca*.

Parole chiave. *Early algebra, Progetto ArAl, Balbettio algebrico, Piramidi di numeri, Griglie di numeri, Matematòca.*

Il corso

Il *progetto ArAl* è stato presentato all'interno del corso residenziale "*Matematica del concreto*" per docenti della scuola primaria e secondaria di 1° grado tenutosi a Bisceglie dal 3 al 5 novembre 2017 nell'ottica della verticalità del curricolo. Poiché la maggior parte dei docenti non conosceva il progetto, in un primo intervento l'ho introdotto collocandolo nella cornice teorica dell'*early algebra* e ho sviluppato poi tre laboratori attraverso i quali i corsisti hanno potuto riflettere sulle relazioni fra il quadro teorico e le attività d'aula.

Presentazione del progetto ArAl

La ricerca internazionale sull'educazione matematica si occupa molto, dagli anni '80, delle principali difficoltà degli studenti fra i 12 e i 15 anni, quando devono fare i conti con le loro conoscenze aritmetiche nel momento in cui incontrano l'algebra - tradizionalmente dalla terza secondaria di primo grado in poi - e devono passare da forme di ragionamento aritmetico a forme di ragionamento algebrico proiettate verso lo studio di relazioni e strutture e verso la generalizzazione. Si è cominciato quindi ad esplorare delle attività che permettessero di capire quali aspetti, di ciò che compete al pensiero algebrico, potessero essere resi accessibili a studenti giovani e potessero quindi aiutarli nella transizione verso lo studio dell'algebra nei suoi aspetti più formali. È da queste premesse che negli anni '90 inizia a svilupparsi l'*early algebra*, che contrappone alla didattica tradizionale, che fa cominciare l'algebra verso i 12-13 anni di età, l'idea che sia non solo possibile, ma anche opportuno, spostare questo inizio ai 6 anni, con un'attenzione crescente verso i grandi della scuola dell'infanzia (5 anni).

Il *progetto ArAl* si colloca in questa prospettiva; le radici epistemologiche del suo quadro teorico, che lo differenziano dalle altre ricerche in questo ambito disciplinare, sono intimamente connesse ad un approccio linguistico alla matematica, che trova la sua espressione più significativa in quello che abbiamo chiamato balbettio algebrico, in analogia con il lento apprendimento degli aspetti semantici e sintattici del linguaggio naturale.

La prospettiva del progetto è quella di devolvere agli allievi l'esplorazione di situazioni problematiche opportunamente costruite dalle quali, attraverso la riflessione sui processi, l'argomentazione, la discussione, possano emergere e affinarsi le conoscenze matematiche e si possano costruire solide premesse per la loro oggettivazione, cioè per la costruzione di traghetti semantici verso la generalizzazione e la modellizzazione. Questo richiede agli insegnanti competenze nuove accanto a quelle che già possiedono e pone in primo piano il problema della formazione e dello sviluppo professionale.

Per approfondire ed esemplificare questi aspetti ho scelto di proporre ai docenti del corso (scuola primaria e secondaria) tre laboratori facenti riferimento ad altrettante Unità della Collana ArAl:

1. Le piramidi (Unità 5 - Le piramidi di numeri)
2. La griglia (Unità 4 - Ricerca di regolarità: la griglia dei numeri)
3. La Matematòca (Unità 3 - Verso il numero sconosciuto: il gioco della matematòca).

Pannello 1: alcuni punti chiave del quadro teorico del Progetto ArAl

Insegnare l'aritmetica con l'obiettivo di favorire lo sviluppo del pensiero algebrico significa guidare gli alunni a spostare l'attenzione dal pensiero *procedurale* che caratterizza la didattica tradizionale – centrata sull'ottica del fare, del calcolare, dello svolgere operazioni, del risolvere problemi cercando risultati – verso il pensiero *relazionale* – centrata sull'ottica del riflettere e dell'argomentare sugli oggetti matematici, del rappresentare relazioni, del porre attenzione ai processi più che ai prodotti.

Anche il segno '=', nel modo in cui viene concepito dalla didattica tradizionale alla scuola primaria, è un veicolo semanticamente povero: non possiede un significato relazionale, nel senso che non indica l'equivalenza fra due quantità.

Fig.1 – punti chiave del quadro teorico del Progetto ArAl.

È la pura traduzione della voce verbale 'fa', per esempio: 3 + 5 = 8 viene interpretato come '3 più 5 fa 8'. La scrittura inversa 8 = 3 + 5 disorienta gli alunni più giovani perché 8 'non fa' 3 + 5: non capiscono come il risultato possa stare a sinistra del segno uguale. Questo imprinting che ricadute ha sull'interpretazione di scritture come 12 + 5 = x o 23 + x = 16?

Per superare questo punto di vista – aritmetico - è necessario costruire, dalla prima primaria, il concetto di rappresentazione di un numero, che porta a vedere ai lati dell''=' (visto nel suo significato algebrico di 'indicatore di simmetria') due rappresentazioni differenti dello stesso numero; nell'esempio:

'8' è la rappresentazione canonica, opaca, del prodotto, '3+5' la rappresentazione *non canonica*, *trasparente*, del *processo*.

La costruzione di questi concetti avviene in un ambiente in cui si esaltano gli aspetti linguistici che promuovono una costruzione sociale della conoscenza: la verbalizzazione, l'argomentazione, la discussione collettiva.

Pannello 2: Laboratorio 'Piramidi di numeri'

Attraverso l'esplorazione di 'piramidi' formate da mattoni contenenti dei numeri si giunge alla rappresentazione della rete di legami fra i numeri stessi. L'attività inizia in un ambiente aritmetico con le mini-piramidi per ampliarsi gradualmente verso l'algebra e la scoperta ingenua dell'uso delle lettere e delle equazioni. La prima scoperta per gli alunni (dalla prima primaria in poi) riguarda la 'regola delle piramidi'; quando si chiede di verbalizzarla la prima definizione è quasi sempre procedurale:

"Per trovare il numero in alto bisogna sommare i due numeri nei mattoni in basso".

Opportunamente guidati, gli alunni giungono ad un'enunciazione relazionale, che spiega cioè non come si trova ma cos'è il numero in alto in relazione ai due numeri alla base (Fig. 2):

"In una mini-piramide il numero in alto è la somma dei numeri scritti nei mattoni alla base".

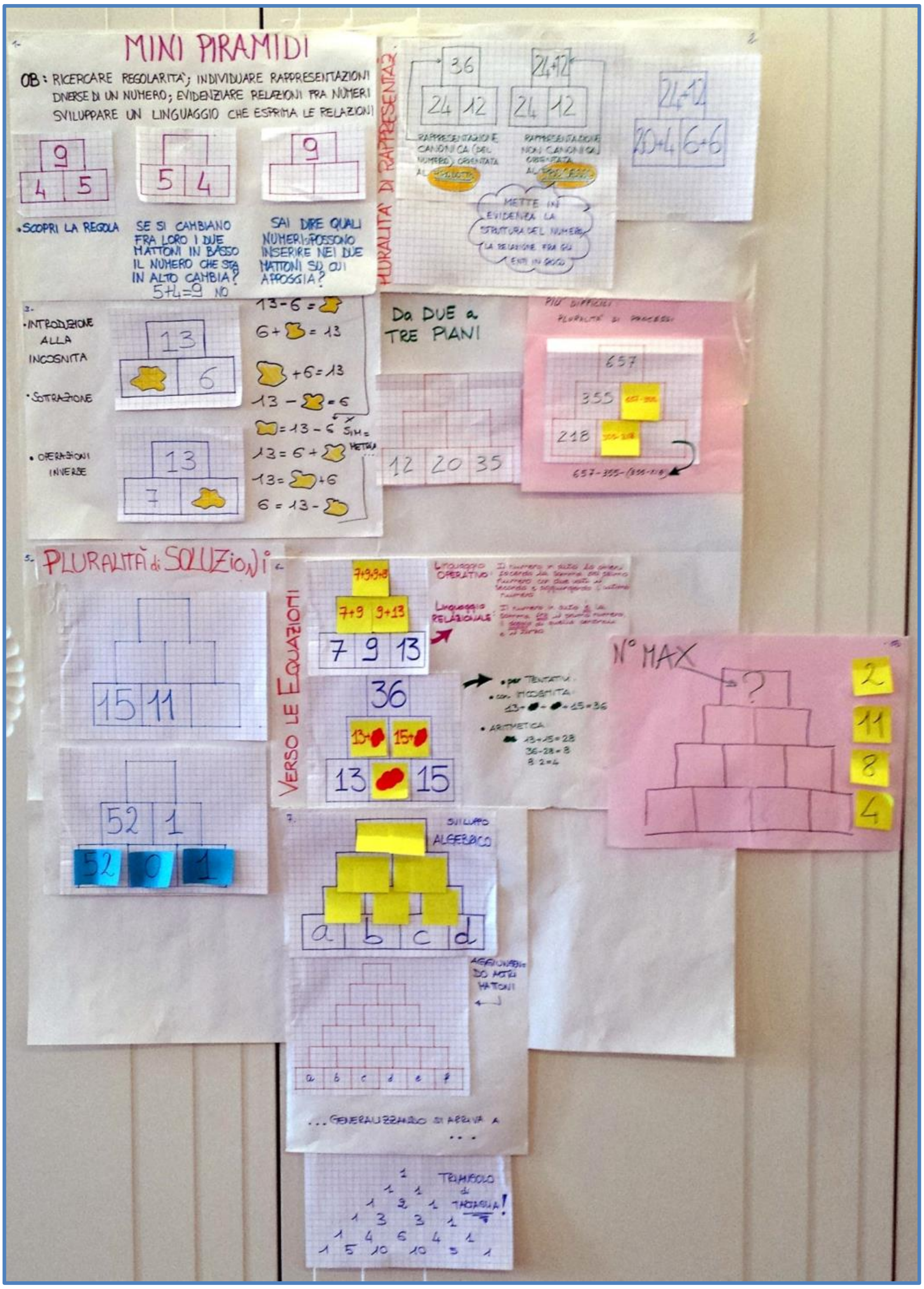


Fig.2 – Piramidi di numeri.

Dalla traduzione in linguaggio matematico della regola (es: 9 = 4 + 5) si passa alla scoperta che una situazione problematica si può rappresentare anche se non si conoscono tutti i numeri; gli alunni propongono macchie e altri simboli sino a conquistare la lettera, ed è in questi lenti passaggi che si manifesta l'evoluzione del balbettio algebrico.

Attraverso l'aumento dei piani della piramide e un susseguirsi di esperienze sempre più evolute gli alunni si avvicinano alla generalizzazione.

Pannello 3: Laboratorio 'La griglia dei numeri'

Il laboratorio si sviluppa attorno all'esplorazione di un quadrato di cento caselle (10×10) numerate da 0 a 99. Attraverso la scoperta di regolarità (Confrontando righe, colonne, diagonali come cambiano i numeri? Cosa cambia e cosa rimane costante?) si giunge all'individuazione delle 'regole' che esprimono quanto misurano gli otto 'spostamenti' da una qualsiasi casella interna alla griglia in quelle adiacenti (Vedi Fig. 3).

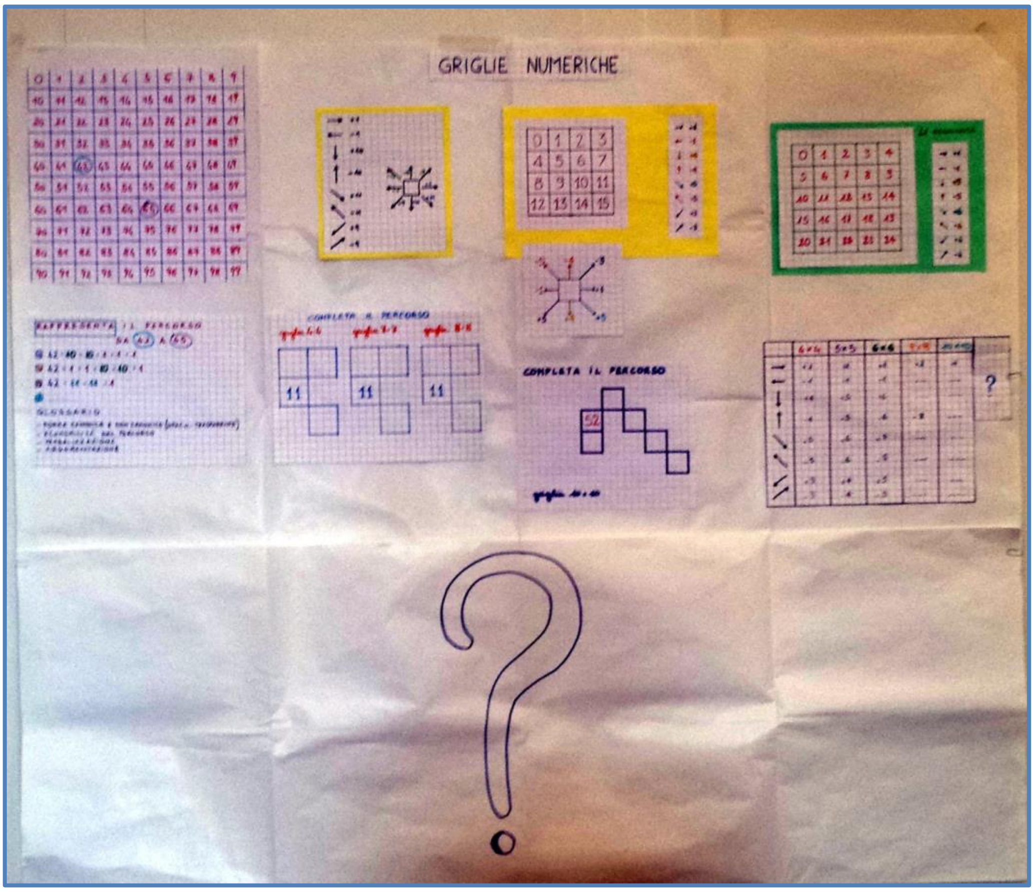


Fig. 3 – La griglia dei numeri.

Le regole vanno esplicitate:

verso destra +1, verso sinistra –1, verso il basso +10, verso l'alto –10 e così via.

Utilizzando le regole così trovate si rappresentano in linguaggio matematico vari percorsi numerici su griglie complete e su frammenti di griglia.

Il confronto tra griglie di dimensioni differenti porta poi ad esplorare, con il supporto di una rappresentazione tabulare, come cambiano di volta in volta le ‘regole’; si giunge così alle loro rappresentazioni generali, valide comunque, indipendentemente dalla dimensione della griglia, sino a giungere alla griglia $n \times n$, ad esempio:

‘Lo spostamento verso il basso è uguale alla dimensione della griglia’, che viene poi tradotto con ‘$+n$’;

‘Lo spostamento verso il basso-destra è uguale alla dimensione della griglia più 1’, tradotto con ‘$n+1$’; e così via.

Pannello 4: Laboratorio ‘La Matematòca’

Fig. 4 – La Matematòca.

Il Gioco si articola in due versioni: in una prima fase gli alunni esplorano la *Matematòca aritmetica* per spostarsi in una seconda fase verso la *Matematòca algebrica* (vedi Fig. 4).
Le tessere aritmetiche (colorate) contengono delle frasi di tipo procedurale (ad es: 'Aggiungi 5 al punteggio del dado e moltiplica per 2') oppure relazionale (ad es: 'La somma di 3 con il prodotto fra 4 e il punteggio del dado'); gli alunni devono interpretarle, lanciare il dado, sostituire nella frase della tessera il punteggio uscito, effettuare il calcolo e spostarsi lungo il percorso di un numero di caselle uguale al risultato ottenuto.
Nella fase successiva devono riconoscere nel pacchetto delle tessere algebriche (bianche, contenenti delle frasi scritte in simboli) le traduzioni in linguaggio algebrico delle frasi corrispondenti delle tessere colorate:

le traduzioni dei due esempi precedenti sono: '$(d + 5) \times 2$' e '$3 + 4 \times d$'.

Le fasi più evolute del gioco portano a situazioni problematiche costruite attorno ad episodi di ipotetiche partite; dal punto di vista dell'early algebra, questi episodi costituiscono delle occasioni in cui gli alunni si misurano con la dualità risolvere/rappresentare una situazione problematica.
Un esempio è riportato in figura (Fig.5):

Fig.5 – Una situazione del gioco *Matematòca*.

Conclusioni

I laboratori che ho proposto fanno parte di un ampio insieme di attività che sviluppano i principali temi dell'*early algebra* e riguardano principalmente la costruzione graduale del linguaggio algebrico e di conseguenza l'affinamento della capacità degli alunni di studiare regolarità, relazioni, proprietà e di esprimerle in linguaggio naturale e in linguaggio matematico. Attualmente, assieme ai docenti degli istituti che collaborano con il progetto ArAl, stiamo sperimentando:

a) in prima primaria: un approccio che inverta l'impostazione classica dell'insegnamento dell'aritmetica di tipo *procedurale* e favorisca lo sviluppo del pensiero *relazionale* (Cannucce & Bicchieri);
b) dall'infanzia alla terza secondaria:
l'esplorazione di situazioni problematiche centrate su incognite e variabili, lo studio di relazioni e la loro rappresentazione in linguaggio matematico lungo un percorso che porta dalle cosiddette 'equazioni per gioco' alle equazioni (Scatole & Biglie);
c) nella primaria-secondaria: vari filoni nell'area dei problemi nella prospettiva del *rappresentare*, superando quella del *risolvere*.

Dichiarazione di conflitti di interesse

L'autore dichiara di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Nota

1. Il *Progetto ArAl, Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero prealgebrico* nasce dai lavori condotti dai primi anni '80 dal GREM (Nucleo di ricerca in Educazione Matematica) operante presso il Dipartimento di matematica dell'Università di Modena e Reggio Emilia, sotto la direzione scientifica di Nicolina A. Malara.

2. L'esperienza descritta prende spunto dalle attività svolte durante il primo corso di "*matematica laboratoriale*" tenuto al Nicotel di Bisceglie in Puglia, dal 3 al 5 novembre 2017. Convegno per insegnanti, organizzato da Margherita Ambrosini in collaborazione con il Centro Orientamento "Don Bosco" e con l'Asilo nido e Scuola dell'Infanzia Paritaria "Stella Stellina" di Bisceglie.

Bibliografia e sitografia

AA.VV. (2003-2018). Collana Progetto ArAl. Pitagora Editrice, Bologna.

Cusi A., Malara N.A. & Navarra G. (2011). *Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Promoting a Linguistic and Metacognitive Approach to the Teaching and Learning of Mathematics*. In J. Cai, J. & Knuth, E. (Eds.), Early algebraization, A Global Dialogue from Multiple Perspectives, 483-510. Advances in Mathematics Education, Berlin: Springer.

Malara N.A., Navarra G., (2016). *Dai risultati ai significati. Mutamenti di prospettiva nell'insegnamento dell'aritmetica: il progetto ArAl*. La vita scolastica, la rivista per la scuola primaria. N.3. Giunti Scuola. Firenze. http://www.giuntiscuola.it/lavitascolastica/. pp.15-17.

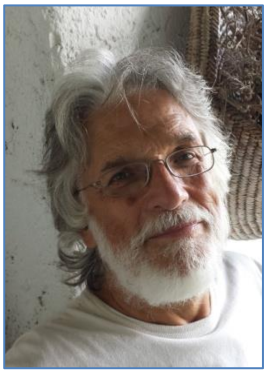
Navarra G. (2008). L'early algebra: una prospettiva per una didattica dell'aritmetica e dell'algebra che favorisca il superamento delle difficoltà nell'insegnamento / apprendimento delle due discipline. In Baldi G. e Moriani F. (Eds.), Atti del Convegno nazionale '*Il piacere di insegnare, il piacere di imparare la matematica*'. Pitagora Editrice Bologna. 133-142.

Navarra G. (2016). "Cinque per tre fa quin…?" "… dici" "Bravo!" La metodologia delle trascrizioni pluricommentate come strumento per lo studio dei comportamenti linguistici dei docenti di matematica e la promozione di sensibilità e competenze in tale ambito. Atti del Convegno Nazionale GISCEL 2014. Roma. 239-252.

www.progettoaral.it

Gruppo progetto ArAl in Facebook

L' autore



Giancarlo Navarra
e-mail giancarlonavarra@gmail.com
Italy

Ha insegnato matematica nella scuola secondaria. È stato professore a contratto presso il dipartimento di matematica dell'università di Modena e Reggio Emilia, dove ha svolto attività di ricerca dal 1986. Dal 1994 si occupa di *early algebra*. È co-responsabile scientifico assieme a N. Malara e coordinatore nazionale del *Progetto ArAl*. Dirige gruppi di studio e ricerca composti da insegnanti impegnati sul versante delle innovazioni metodologiche e curricolari in matematica. Interviene come relatore in convegni e seminari in ambito sia nazionale che internazionale. È autore di un centinaio di pubblicazioni.

Received April 26, 2017; *revised* July 21, 2017; *accepted* September 11, 2017; *published online* October 07, 2018