article

EDiMaST
ISSN 2421-7247

Star polygons ... and beyond.
Path to a vertical curriculum in the first cycle of education

Antonella Castellini, Alfia Lucia Fazzino

Abstract[1]***.*** *This document describes a path that can be reached in the first cycle of education proposed during a training course for primary and secondary teachers. The laboratory work of the proposal allows an approach to polygons that crosses different themes: from space and figures to numbers and also relationships and functions.*

Key words. *Regular polygons, stellar polygons, modular arithmetic, tessellation of the plane, chamber of mirrors.*

Sommario. (Poligoni stellati ... e oltre. Percorso per un curricolo verticale nel primo ciclo). *Si riferisce di un percorso realizzabile nel primo ciclo di istruzione proposto durante un corso di formazione per i docenti di primaria e secondaria di primo grado. La laboratorialità della proposta permette un approccio ai poligoni che attraversa diversi temi: da spazio e figure a numeri e anche relazioni e funzioni.*

Parole chiave. *Poligoni regolari, poligoni stellati, aritmetica modulare, tassellazione del piano, camera di specchi.*

Introduzione

L'attività è stata svolta all'interno del corso residenziale "Matematica del concreto" tenutosi a Bisceglie il 3- 4 e 5 novembre 2017 e destinata ai docenti della scuola primaria e secondaria di 1° grado nell'ottica della verticalità del curricolo. L'impostazione del corso è stata simile al lavoro di classe perché non ci può essere consapevolezza delle difficoltà degli alunni se non si sperimenta noi stessi in modo diretto. Gli insegnanti, dunque, sono stati messi in situazione problematica, così come si fa con i ragazzi e lasciati liberi di discutere fra loro argomentando le proprie congetture e di scoprire direttamente le competenze sottese delle attività. Tenendo presente che la matematica non si fa a compartimenti stagni, abbiamo proposto attività concrete, facilmente spendibili in classe, che permettessero di attraversare più nuclei tematici spaziando dalla geometria all'aritmetica passando anche dalle funzioni.

Inizio del percorso

L’attività inizia da un modello molto semplice ma molto versatile: due sbarrette in plastonda o cartoncino rigido uniti con fermacampione e il terzo lato in elastico (vedi Fig. 1).

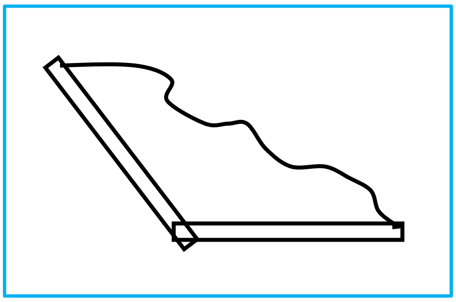


Fig.1 – modello dinamico.

Il modellino è dinamico e muovendolo si vede che variando un angolo cambia anche la lunghezza del lato in elastico a conferma del fatto che il triangolo è una struttura rigida. Il modello permette di discutere anche sulla somma degli angoli interni di un triangolo perché nel caso limite quando l’angolo fra le due sbarrette è di 180° gli altri due sono entrambi zero.

La camera di specchi

Siamo passati poi ad utilizzare una camera di specchi (due specchietti rettangolari uniti tra loro per mezzo di un lato in modo da potersi muovere l’uno rispetto all’altro e quindi di formare angoli diversi). Mettendo un triangolo isoscele in modo che l’angolo di apertura dei due specchi sia uguale all’angolo al vertice, vediamo che in base all’angolo varia il numero delle immagini riflesse.

Tabulando i valori dell’angolo e il corrispondente numero di immagini, si vede subito che si tratta di una relazione di proporzionalità inversa (Fig. 2) $x \cdot y = 360$ dove x è l’ampiezza dell’angolo e y il corrispondente numero di immagini. Rappresentando i valori su un piano cartesiano otteniamo un ramo d’iperbole “tronco”; infatti lo specchio ha un limite perché ci permette di “vedere” solo uno degli asintoti della curva.

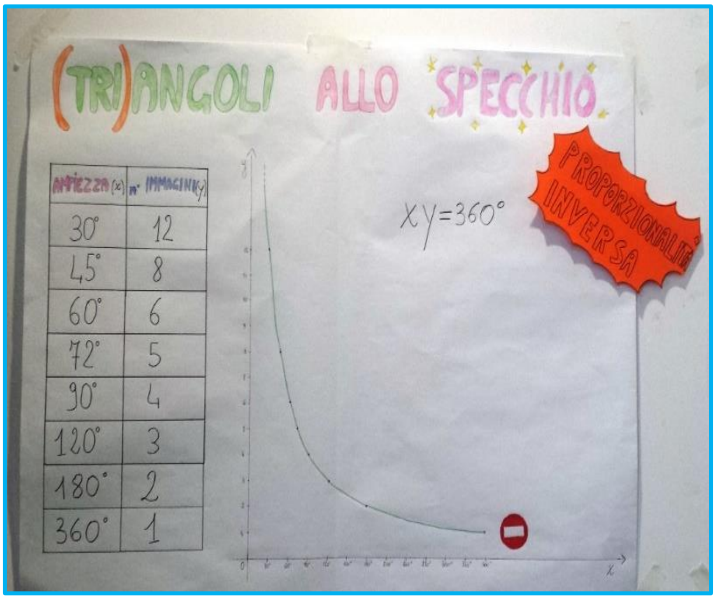


Fig. 2 – Costruzione del ramo di iperbole.

Se l’angolo tende a zero, le immagini vanno all’infinito:

quindi abbiamo per asintoto l’asse *y* ma non possiamo avere l’asse *x* come asintoto perché non si potrà avere un angolo infinito (la massima apertura possibile è di 360°) quindi il ramo si ferma al punto (360°, 1).

Inserendo tra gli specchi i triangoli isosceli otteniamo tutti e soli poligoni regolari il cui numero dei lati dipende dall’angolo che è inserito tra gli specchi (vedi Fig. 3).

Fig. 3 – Camera di specchi e poligoni.

Fig. 4-5-6-7 – Geometria e natura.

Gli specchi rappresentano gli assi di simmetria del poligono, ma questi assi sono le diagonali? O le mediane? E quanti sono? C'è una relazione con il numero dei lati?

L'osservazione permette di congetturare e in seguito, usando lo strumento, si può verificare l'esattezza delle ipotesi e di argomentare sulle scoperte fatte.

Gli specchi ci permettono di visualizzare gli assi e di stabilire una prima relazione: sono tanti quanti il numero dei lati del poligono (Fig. 4-5-6-7). Per capire cosa rappresentano per il poligono stesso può aiutare l'inserimento di uno stuzzicadenti a rappresentare l'altezza relativa alla base del triangolo inserito (Fig. 8).

Fig. 8 – Assi di simmetria.

Fig. 9 – Tabella riassuntiva degli assi di simmetria

Se il poligono ha un numero pari di lati gli assi di simmetria sono per metà "mediane" (apotema del poligono) e per metà diagonali. Se il poligono ha un numero dispari di lati allora gli assi di simmetria sono solo mediane (Fig. 9).

Lo strumento "visualizza concretamente" che tutti i poligoni regolari sono scomponibili in triangoli isosceli uguali che sono tanti quanti sono i lati. È molto facile dedurre l'area del poligono come somma delle aree dei triangoli in cui è scomposto.

Si può trovare anche un legame tra il numero dei triangoli, quindi dei lati, e la somma degli angoli interni. Si vede bene che se *n* sono i lati di un poligono, abbiamo *n* triangoli isosceli quindi $n \cdot 180°$ è la somma di tutti gli angoli da cui dobbiamo sottrarre l'angolo al centro ottenendo $n \cdot 180° - 360°$

La tassellazione

Lavorando con i poligoni regolari non si può non trattare il problema della tassellazione del piano. Ricordiamo che un poligono tassella se ricopre il piano senza lasciare spazi vuoti tra essi e senza sovrapposizioni.

Abbiamo consegnato dei poligoni regolari in cartoncino con la stessa misura di lato per provare delle pavimentazioni utilizzando inizialmente solo poligoni di uno stesso tipo e abbiamo predisposto uno schema dove riassumere le osservazioni fatte. I risultati sono contenuti nel seguente schema completo.

Tab. 1: Poligoni e Tassellazione

Poligoni regolari	Misura di ciascun angolo interno	Numero di angoli aventi un vertice comune nella piastrellatura ottenuta	Somma degli angoli con il vertice comune	I poligoni ricoprono tutta la superficie ?
triangolo	60	6	360	si
quadrato	90	4	360	si
pentagono	108	5	324	no
esagono	120	3	360	si
ettagono	128,57	7	899,99	no
ottagono	135	8	405	no
decagono	144	10	1440	no
dodecagono	150	12	1800	no
pentadecagono	156			no

Dalla tabella (Tab.1) emerge che non tutti i poligoni regolari tassellano. È importante chiedere agli alunni quando ciò diventa possibile.

Se utilizziamo un solo poligono regolare, la misura dell'angolo del poligono regolare dovrà essere un divisore intero di 360° e quindi i poligoni regolari che possono tassellare il piano sono solo il triangolo equilatero (60·6), il quadrato (90·49 e l'esagono (120·3). Di conseguenza (vedi Fig. 10) abbiamo 3 sole configurazioni possibili (tassellazione regolare).

Fig. 10 – Tassellazione regolare

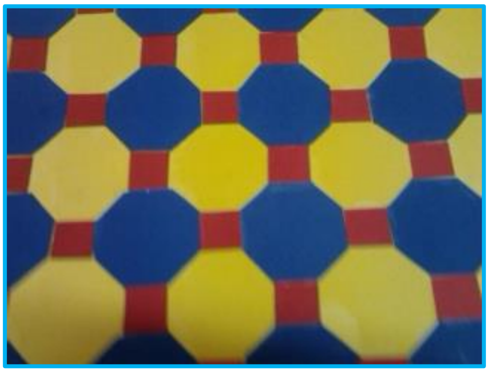
Con più tipi di poligoni regolari, perché sia possibile tassellare, è necessario che ogni vertice abbia intorno a sé lo stesso numero e lo stesso tipo di poligoni regolari disposti nello stesso ordine.

Proponiamo l'attività di scoperta seguendo le regole:

a) ciascun lato sia comune con un lato di un poligono
b) da ciascun vertice di un poligono esca uno stesso tipo e uno stesso numero di poligoni disposti nello stesso ordine
c) la somma degli angoli dei poligoni aventi il vertice in comune sia 360°.

In questo caso parleremo di tassellazioni semi-regolari.

Dopo diversi tentativi ed errori i docenti hanno scoperto che esistono solo 11 tipi di tassellazioni: 3 regolari e 8 semi–regolari (vedi Fig. 11-12).



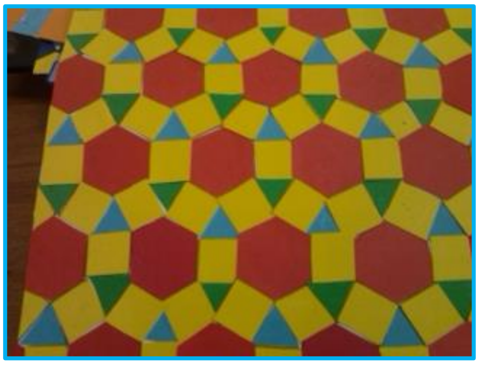


Fig. 11-12 – Tassellazioni semi-regolari.

Veder ... gli stellati!

I poligoni regolari che abbiamo incontrato finora sono tutti poligoni convessi; ma esistono anche dei particolari poligoni non convessi regolari che hanno lati uguali, angoli concavi e convessi uguali, detti poligoni stellati.

Tra questi ultimi poligoni possiamo distinguere gli stellati semplici ottenuti con una sola linea spezzata che si chiude nel punto di partenza; gli stellati composti invece sono formati dalla sovrapposizione di due o più poligoni regolari ruotati di un angolo costante.

Abbiamo utilizzato dei rettangoli in plastonda (Fig. 13) sui quali sono stati disegnati dei poligoni regolari e disposto dei ferma-campioni in ogni vertice del poligono. Legando un filo a uno qualunque dei vertici e facendolo passare saltando regolarmente uno o più vertici, ci siamo chiesti cosa avremmo ottenuto.

Il triangolo e il quadrato non generano nessun poligono stellato.

Nel triangolo equilatero ottengo la figura di partenza mentre nel quadrato, saltando un vertice, si ottiene una diagonale e saltandone due si ottiene il quadrato di partenza.

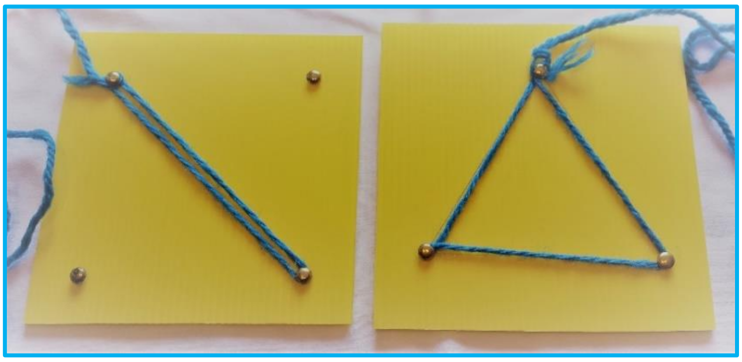


Fig.13 – Triangolo e quadrato non generano poligoni stellati

Nel pentagono (vedi Fig. 14). Fissato il filo ad un vertice proviamo a saltarne uno, genericamente diciamo passo due perché un vertice si salta e sul secondo leghiamo il filo, matematicamente lo indichiamo (5,2). Otteniamo, con un unico giro, un poligono stellato semplice.

Fig.14 – Pentagono, passo 2: si ottiene uno stellato semplice

Se rifacciamo il percorso partendo dall'inizio, facendo passo 3 si ottiene ancora un poligono stellato (5,3) identico al primo ma percorso in senso opposto. Quindi dal pentagono si ottiene un solo poligono stellato.

Facciamo osservare e descrivere il poligono stellato ottenuto: come sono i lati? come sono gli angoli? Cosa otteniamo al centro?

La domanda che ne consegue è se qualunque poligono regolare darà origine a un poligono stellato. I docenti hanno eseguito molte prove, fatto congetture, cercato analogie argomentano le loro proposte per arrivare a stabilire una regola: la stella si forma quando il numero dei vertici e il numero del passo sono primi tra loro.

Dai poligoni agli orologi con l'aritmetica modulare

Se numeriamo i vertici dei poligoni regolari partendo da 0 come fosse un orologio possiamo eseguire somme "strane". Ad esempio abbiamo proposto sul pentagono l'operazione 1 + 7. Partendo da 1 percorriamo i vertici contandone 7 e arriviamo al 3. Riflettiamo:

1 + 7 = 8 ma nell'aritmetica finita del pentagono significa che faccio un giro e mi fermo a 3. Cosa rappresenta il 3? Eseguendo 8:5 abbiamo 1 come quoziente (il giro) con il resto di 3.

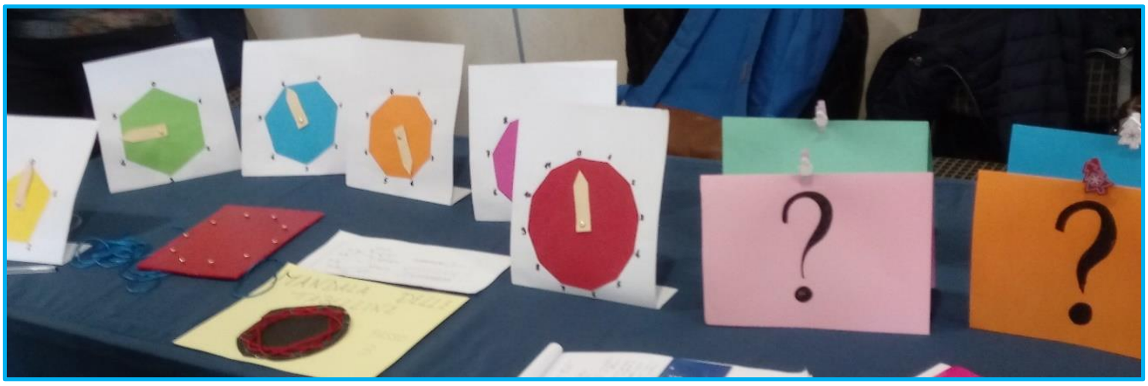


Fig.15 – dai poligoni regolari all'aritmetica modulare al mandala delle tabelline.

Lavorando con l'aritmetica modulare (vedi Fig. 15) possiamo risolvere situazioni reali oltre ovviamente a comprendere l'orologio analogico e digitale. Per esempio possiamo chiederci se oggi è sabato che giorno sarà tra 47 giorni. Questo problema diventa facilmente risolvibile attraverso l'aritmetica modulare: modulo 7.

L'ultima attività su cui abbiamo lavorato è stata il Mandala delle tabelline in altre parole: i poligoni stellati in un semplice contesto aritmetico. In tal caso si costruisce un poligono a 10 vertici numerati da 0 a 9. Consideriamo come esempio la tabellina del 3; partendo con il filo da 0 ci si ferma al 3, poi al 6, al 9 eccetera. Mentre si ripete la tabellina compare la stella in questo caso a 10 punte!

Pillole di didattica

Il percorso è stato presentato in forma laboratoriale dove il "*laboratorio*" è inteso esattamente come riportato nelle Indicazioni Nazionali:

> *"momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive."*

Le Indicazioni Nazionali (I.N.) si rivolgono agli alunni ma in questo caso noi abbiamo cambiato il punto di vista: il docente in formazione si è trasformato in alunno! D'altro canto Emma Castelnuovo diceva che la cosa fondamentale per un docente, è mettersi allo stesso livello degli allievi!

Il gruppo di docenti, eterogeneo per provenienza (da tutta Italia) per formazione e per livello scolare di appartenenza, simulava perfettamente una classe delle nostre scuole. Tutti hanno lavorato gomito a gomito per tre giorni, ritagliando, incollando, ideando e costruendo modelli (Fig. 16).

Fig.16 – I docenti del gruppo al lavoro.

Un ambiente che

> "*è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti*"

(http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica).

Nel laboratorio si costruiscono significati grazie alle interazioni tra le persone che si creano svolgendo l'attività. Sempre citando Emma Castelnuovo:

> "*Costruire insieme mette tutti allo stesso livello, mentre la testa crea maggiori diversità.*"

Fig.17 – I docenti del gruppo GeometricaMente

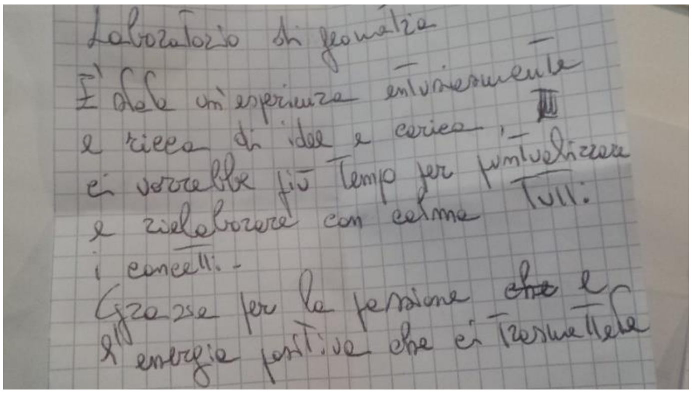
Conclusioni

Riportiamo alcuni messaggi lasciati dai docenti che hanno seguito il corso (Fig. 17): sicuramente molto più espliciti di un qualunque commento personale.

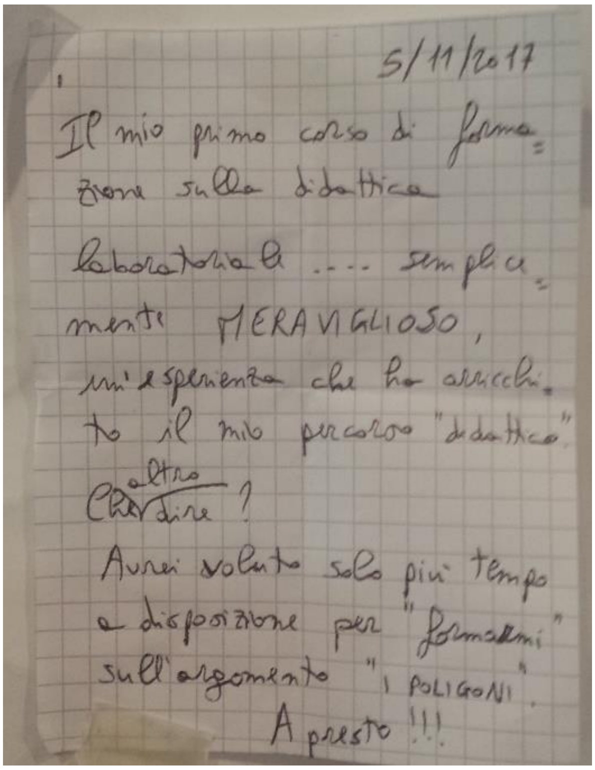
Esperienza bellissima! Queste sono le cose che ti fanno venire voglia di andare avanti su questa strada. Grazie

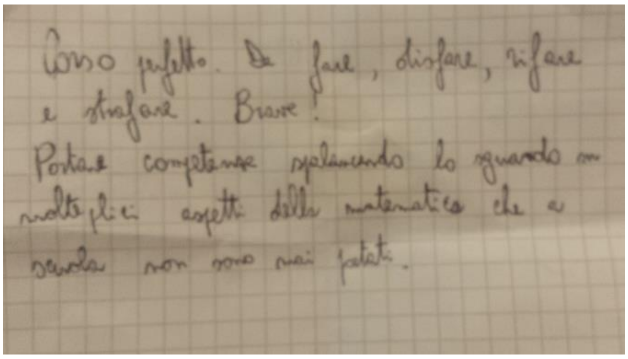
Corso perfetto da fare, disfare, rifare, strafare. Brave! Portare competenze spalancando lo sguardo su molteplici aspetti della matematica che a scuola non sono mai portati.

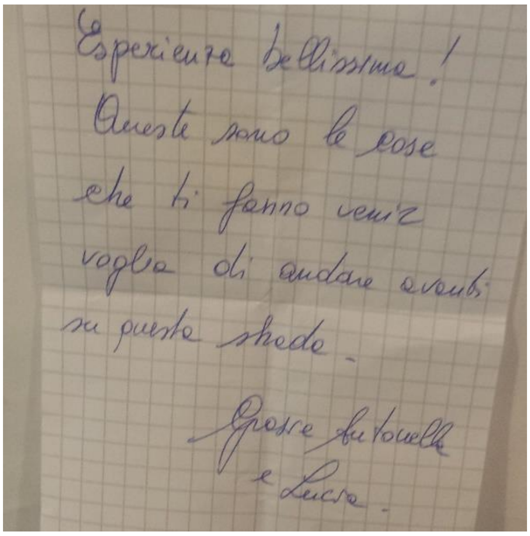
Il mio primo corso di formazione della didattica laboratoriale ... semplicemente "meraviglioso". Un'esperienza che ha arricchito il mio percorso didattico.


Laboratorio di geometria
È stata un'esperienza entusiasmante
e ricca di idee e carica, III
ci vorrebbe più tempo per puntualizzare
e rielaborare con calma tutti
i concetti. -
Grazie per la passione ~~che~~ e
l'energia positiva che ci trasmettete

Che altro dire? Avrei voluto solo più tempo a disposizione per formarmi sull'argomento poligoni È stata un'esperienza entusiasmante ricca di idee e carica. Ci vorrebbe più tempo per rielaborare con calma tutti i concetti. Grazie per la passione e l'energia positiva che ci trasmettete.


5/11/2017
Il mio primo corso di forma=
zione sulla didattica
laboratoriale .... semplice=
mente MERAVIGLIOSO,
un'esperienza che ha arricchi=
to il mio percorso "didattico".
Che altro dire?
Avrei voluto solo più tempo
a disposizione per "formarmi"
sull'argomento "I POLIGONI".
A presto !!!


Corso perfetto. Da fare, disfare, rifare
e strafare. Brave!
Portare competenze spalancando lo sguardo su
molteplici aspetti della matematica che a
scuola non sono mai trattati.



Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Nota

1. L'esperienza descritta prende spunto dalle attività svolte durante il primo corso di "matematica laboratoriale" tenuto al Nicotel di Bisceglie in Puglia, dal 3 al 5 novembre 2017. Convegno per insegnanti, organizzato da Margherita Ambrosini in collaborazione con il Centro Orientamento "Don Bosco" e con l'Asilo nido e Scuola dell'Infanzia Paritaria "Stella Stellina" di Bisceglie.

Bibliografia e sitografia

Castelnuovo E., (1993), *Pentole, ombre, formiche. In viaggio con la matematica*, La Nuova Italia, Firenze.

Castelnuovo E., Barra M., (1976 e 2000), *Matematica nella realtà*, Boringhieri, Torino.

Castelnuovo E, (2003), *Emmatematica – insegnamento di Emma Castelnuovo*, Edifir Edizioni, Firenze.

Castelnuovo E., (1990), *Didattica della matematica*. La nuova Italia, Firenze.

D'Amore B., (2001), *Didattica della matematica*. Edizioni Pitagora, Bologna.

http://giocosamente.weebly.com/blog-di-luisa/altri-poligoni-stellati

https://elenapenati.wordpress.com/2009/11/08/intervista-a-emma-castelnuovo/

http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica/

http://online.scuola.zanichelli.it/sammaronedisegno/wp-content/uploads/Zanichelli_Sammarone_Poligoni_Stellati.pdf

http://www.cidi.it/cms/doc/open/item/filename/672/poligoni-stellatifusani2012.pdf

https://www.matematicamente.it/magazine/luglio2007/Centomo_poligoni_stellati.pdf http://specchi.mat.unimi.it/matematica/specchi/Specchi_27_1_11.pdf

Le autrici

Antonella Castellini
MIUR Istituto Comprensivo 1, Viale Garibaldi 30-32
53036 Poggibonsi (SI)
e-mail antocastellini@gmail.com
Italy

Laureata in matematica, insegna nella scuola secondaria di primo grado. Si interessa di didattica della matematica e di formazione docenti. Ha collaborato con Indire nei progetti nazionali m@t.abel e PQM. ha conseguito due master in didattica della matematica. Ha ricoperto il ruolo di tutor coordinatore nel TFA per l'Università di Siena. Autrice per una rivista nazionale di didattica per la scuola primaria. Svolge attività di ricerca-azione anche a livello internazionale nell'ARMT. Coautrice di diverse pubblicazioni su esperienze didattiche. Ha svolto il ruolo di esperto per la costruzione di curricoli verticali per diversi istituti e per un progetto triennale della Regione Toscana.

Alfia Lucia Fazzino
Istituto Comprensivo 1, Poggibonsi - Scuola secondaria di primo grado "Plesso Marmocchi"
Viale Garibaldi, 30/32 - 53036 Poggibonsi (SI)
aluciafazzino@gmail.com
Italy

Laureata in matematica, ha conseguito un master in didattica della matematica. Insegna nella scuola secondaria di primo grado.
Docente formatore in didattica della matematica.
Appassionata di Problem-solving e di comunicazione didattica.
S'interessa di formazione dei docenti. Svolge da diversi anni attività di ricerca azione per il Rally Matematico Transalpino. Coautrice di diverse pubblicazioni su esperienze didattiche.

Received April 23, 2017; *revised* June 29, 2017; *accepted* August 19, 2017; *published online* July 30, 2018