article

ISSN 2421-7247

Unpaired socks in a dark room. Probability calculation materials for teachers in primary and secondary schools

Fabio Brunelli, Francesco Chesi

Abstract. *The authors report a probability training course for primary and high school teachers. With the theoretical references, the contribution includes materials and proposals for activities to be carried out in the classroom.*

Key words. *Probability, frequency, INVALSI, problem solving, statistics.*

Sommario. (Calzini spaiati in una stanza buia. Materiali di calcolo della probabilità per i docenti di scuola primaria e secondaria di primo grado*). Gli autori riferiscono di un corso di formazione di calcolo delle probabilità destinato agli insegnanti della scuola primaria e della scuola secondaria di primo grado. Oltre a riferimenti teorici, il contributo comprende materiali e proposte di attività da svolgere in classe.*

Parole chiave. *Calcolo delle probabilità, frequenza, INVALSI, problem solving, statistica.*

Introduzione

I colleghi di Bisceglie non si sono sentiti molto attratti dalla Probabilità. Inizialmente abbiamo dovuto raccattarne qualcuno pure dagli altri gruppi, Ci siamo trovati così solo in dodici intorno a un tavolo con i nostri dadi, le nostre monete e le puntine da disegno (Fig.1).

L'accaduto è una ulteriore evidenza di quanto la probabilità metta a disagio alunni e docenti (Anichini, 2018).

Dopo quarantottore di "full immersion", tuttavia, corsisti e formatori avevamo costituito un unicum di piacevole collaborazione e di amicizia.

Pensavamo di avere proposto materiali noti e facilmente reperibili. Invece i colleghi partecipanti li hanno trovati interessanti e ci hanno chiesto di metterli a disposizione di un maggior numero di utenti. Da qui è nata l'idea di raccoglierli in questo contributo.

Fig.1 – Materiali per il laboratorio.

Per iniziare

Volendo seguire la nostra metodologia laboratoriale, dopo le reciproche presentazioni e scambio di indirizzi di posta elettronica, abbiamo posto le seguenti domande e abbiamo aperto una discussione in merito.

Consideriamo i seguenti tre esempi di probabilità, pensiamo in che modo poter formulare una previsione relativa ai seguenti fatti:

1. Lancio di una moneta (lancio di un dado, estrazione di un numero della tombola, ecc.).
2. Lancio di una puntina da disegno.
3. Partita di calcio Salernitana – Bari che si svolgerà sabato prossimo quattro novembre allo stadio Arechi di Salerno.

Non trascriviamo qui l'ampia discussione che si è sviluppata, ma solo le conclusioni:

1. Il primo caso rientra nella così detta "probabilità classica", che qualcuno ha anche definito a priori, matematica, teorica, basata sulle simmetrie, ecc.
2. Il secondo caso rientra nella così detta "probabilità frequentista", che qualcuno ha anche definito a posteriori, statistica, empirica, basata sull'esperimento, ecc.
3. Il terzo caso rientra nella così detta "probabilità soggettiva", definita anche "cognitiva", introdotta da Bruno De Finetti (De Finetti, 1930).
4. Per completezza abbiamo ricordato che esiste la concezione formale-assiomatica di probabilità (Kolmogorov, 1933).

A questo punto abbiamo ricordato le parole di Giovanni Prodi (Fig.2a) che ci teneva a distinguere la cultura dell'insegnante da quella dell'allievo. Nella scuola primaria e secondaria di primo grado i primi due aspetti della probabilità, infatti, sono più che sufficienti.

A proposito di citazioni, Giuseppe Peano (Fig.2b) diceva agli insegnanti: "Non dovete dire tutto ai vostri allievi, ma dovete dire cose vere!" e questo è possibile solo per i docenti che coltivano assiduamente la loro preparazione culturale.

Fig.2a – Giovanni Prodi (1925 – 2010)

Fig.2b – Giuseppe Peano (1858 – 1932)

Cenni storici

Alcune parti della matematica sono antiche (Elementi di Euclide), mentre la probabilità è una disciplina relativamente recente. I giochi probabilistici sono antichi quanto l'uomo, infatti sono stati rinvenuti dadi fatti con ossa di animali che risalgono all'epoca neolitica, oltre 6000 anni fa, e appaiono molto simili a quelli moderni. Tali dadi primitivi si chiamavano *astragaloi* e venivano ricavati da alcune particolari falangi delle pecore che avevano 2 facce arrotondate e 4 facce quadrate quasi uguali (Fig.3). Gli antichi uomini giocavano con questi dadi, scommettendo sugli esiti possibili.

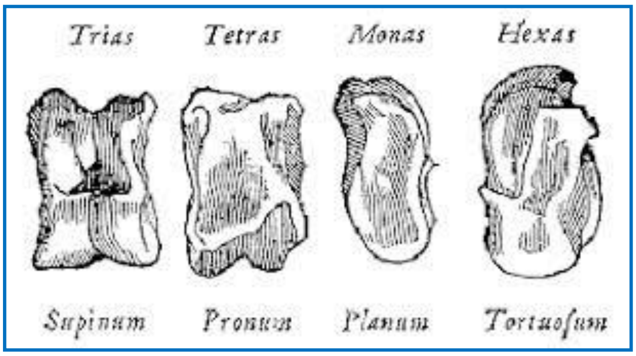


Fig.3 – Astragali romani

Abbiamo notizie di un “Gioco della pietra egiziana” (3500 a.C.) di cui riferisce Cicerone in “De Divinazione” (44 a.C.):

> *“... cercare di descrivere gli eventi che si sono presentati in passato in una medesima circostanza*”.

Gli antichi romani giocavano a dadi (Fig.4), usando anche loro gli astragali di pecora.

Per difendersi dall'imprevedibilità del caso, i Greci avevano inventato addirittura una divinità, la Tiche, dai Romani chiamata poi Fortuna, alla quale appellarsi per ottenere un minimo di benevolenza. Bisognava tuttavia saper cogliere il momento giusto, il cosiddetto *kairós*, un lampo di luce la cui durata era quella di un battito di ali di una farfalla e che dunque si poteva agguantare solo molto rapidamente.

Fig.4 – Fanciulla romana gioca agli astragali

Nella Divina Commedia scritta nei primi anni del '300, Dante Alighieri (Fig.5) parla del gioco della Zara (dall'arabo zahr, dado) nel Canto VI dell'Inferno (vv. 1-12). Tale gioco consisteva nel sommare i risultati del lancio di tre dadi e ogni giocatore scommetteva su un numero da 3 a 18.

"Quando si parte il gioco de la zara,
colui che perde si riman dolente,
repetendo le volte, e tristo impara;
con l'altro se ne va tutta la gente;
qual va dinanzi, e qual di dietro il prende,
e qual dallato li si reca a mente;
el non s'arresta, e questo e quello intende;
a cui porge la man, più non fa pressa;
e così da la calca si difende.
Tal era io in quella turba spessa
volgendo a loro, e qua e là, la faccia,
e promettendo mi sciogliea da essa."

Fig.5 – Dante Alighieri

Nel 1232 Federico II di Svevia promulgò la legge *de aleatoribus* e una ventina di anni dopo, nel 1255, il re di Francia Luigi IX proibì non solo il gioco, ma persino la costruzione dei dadi.

Nel 1423 ritroviamo i medesimi divieti nel sermone *Contra aleatorum ludus* di san Bernardino da Siena, anche se c'è da dire che dal X al XIII secolo si erano susseguiti una serie di editti che vietava allo stesso clero di partecipare al gioco. Addirittura coloro che partivano per la terza Crociata avvenuta tra 1189 e 1192, erano in possesso di una prescrizione che limitava il loro comportamento nei confronti delle scommesse: a nessuno che fosse al di sotto del grado di cavaliere veniva concesso di giocare per denaro e comunque cavalieri e religiosi non potevano perdere più di 20 scellini al giorno (Lissoni, 2011).

Nel libro "Sopra le scoperte dei dadi", Galileo Galilei (1596), su richiesta del Granduca di

Toscana, calcola la probabilità che la somma delle facce di 3 dadi sia uguale ad un certo numero *k*. Il nome del gioco era *Passa dieci*.

Il Cavaliere di Méré, giocatore d'azzardo cavaliere alla corte di Luigi XIV, pose a Blaise Pascal i seguenti 2 problemi: "E' più probabile ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado o avere almeno una volta il doppio 6 lanciando 24 volte 2 dadi? E ancora: Se 2 giocatori ugualmente bravi interrompono un gioco in cui vince per primo chi totalizza un certo punteggio, senza averlo raggiunto, come si divide il premio?"

Pascal cercò il consiglio di Fermat e dalla loro corrispondenza nascono alcune pubblicazioni e le prime leggi della probabilità e del calcolo combinatorio.

Pascal pubblica nel 1654 il *Traité du Triangle Arithmétique* che parla del Triangolo di Tartaglia; tornano alla ribalta i coefficienti binomiali (già studiati precedentemente da Stifel), utili per risolvere diversi problemi di probabilità.

Il primo matematico che diede una vera definizione di probabilità fu così Pierre-Simon de Laplace, che nel suo libro *Essai philosophique sur les probabilités* (1812) scrisse:

> "*La teoria della probabilità consiste nel ridurre tutti gli eventi dello stesso tipo a un certo numero di casi ugualmente probabili, vale a dire, per cui siamo ugualmente indecisi per quanto riguarda la loro esistenza; e nel determinare il numero di casi favorevoli all'evento la cui probabilità è cercata. Il rapporto tra questo numero e quello di tutti i casi possibili è la misura di questa probabilità, che è così semplicemente una frazione il cui numeratore è il numero di casi favorevoli e il cui denominatore è il numero di tutti i casi possibili.*"

Quella definita qui sopra è la cosiddetta definizione classica di probabilità.

Nell'insegnamento della matematica il calcolo delle probabilità è entrata in tempi recenti. Nei programmi del 1979 della scuola media inferiore, nel paragrafo "Matematica del certo e matematica del probabile", si legge:

a) Affermazioni del tipo vero/falso e affermazioni di tipo probabilistico. Uso corretto dei connettivi logici (e, o, non): loro interpretazione come operazioni su insiemi e applicazioni ai circuiti elettrici.
b) Rilevamenti statistici e loro rappresentazione grafica (istogrammi, aerogrammi...); frequenza; medie.
c) Avvenimenti casuali; nozioni di probabilità e sue applicazioni.

Dai *Commenti* agli stessi programmi:

> "*La riflessione sull'uso dei connettivi concorre alla chiarificazione del linguaggio e del pensiero logico. L'introduzione degli elementi di statistica descrittiva e della nozione di probabilità ha lo scopo di fornire uno strumento fondamentale per l'attività di matematizzazione di notevole valore interdisciplinare. La nozione di probabilità scaturisce sia come naturale conclusione dagli argomenti di statistica sia da semplici esperimenti di estrazioni casuali. L'insegnante, evitando di presentare una definizione formale di probabilità, avrà cura invece di mettere in guardia gli allievi dai più diffusi fraintendimenti riguardanti sia l'interpretazione dei dati statistici sia l'impiego della probabilità nella previsione degli eventi. Le*

applicazioni non dovranno oltrepassare il calcolo delle probabilità in situazioni molto semplici, legate a problemi concreti (ad esempio nella genetica, nell'economia, nei giochi)."

Dal 1979 in poi la probabilità e la statistica figurano nei programmi e nelle indicazioni di tutti gli ordini scolastici.

Tanti problemi

Qui di seguito sono presentati i problemi utilizzati nel laboratorio. Per ogni problema sono indicati la prova a cui appartiene, l'anno di pubblicazione, la classe proposta, la percentuale di risposte corrette (ove noto e per ogni domanda presente nel testo).

Legenda: *SNV* = Sistema Nazionale di Valutazione Invalsi (prova intermedia)

PN = Prova Nazionale Invalsi (prova di fine 1° ciclo)

RMT = Rally Matematico Transalpino, gara matematica

L = livello (L1 è 1^a primaria, L6 è 1^a sec. 1° grado, L9 è 1^a sec. 2° grado)

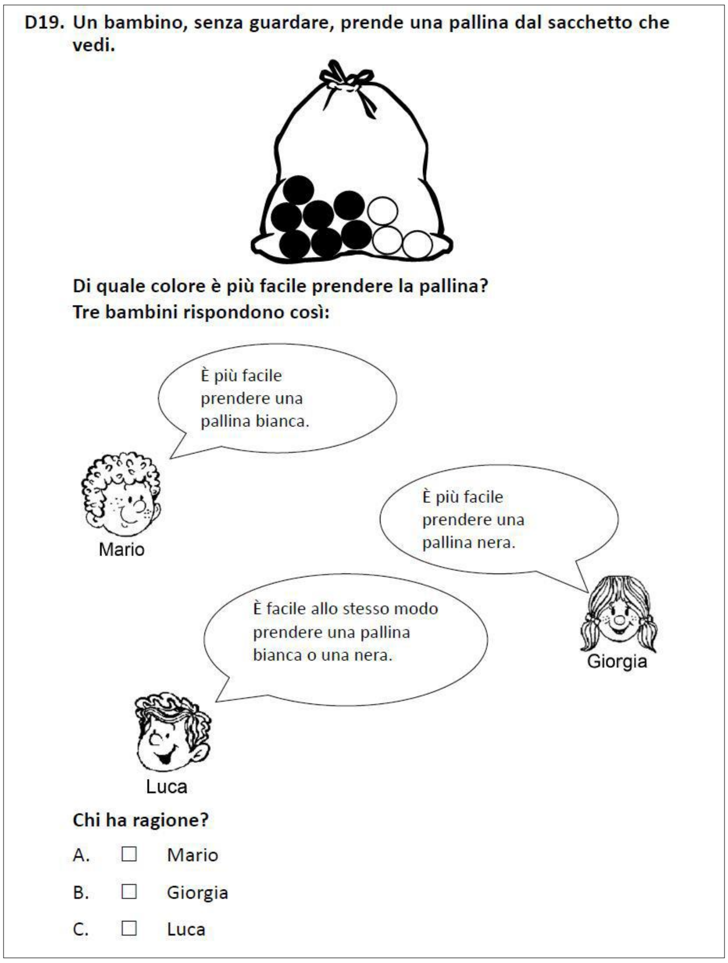


Fig.6 – SNV 2013 – L2

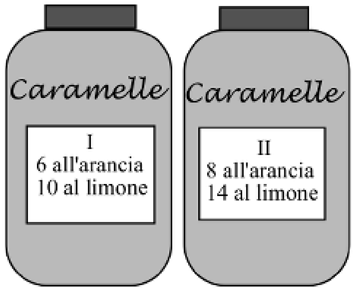
Esempio: *SNV 2016 – L10 – 45%* = problema tratto dalla prova Invalsi del 2016 (SNV 2016) per la classe 2a della sec. 2° grado (L10), il 45% degli studenti italiani ha risposto correttamente.

Nonna Matilde mette in un barattolo 6 caramelle all'arancia e 10 al limone.

In un secondo barattolo mette 8 caramelle all'arancia e 14 al limone. Le caramelle hanno la stessa forma e sono incartate nello stesso modo.

La nonna sa che a Giulio non piacciono le caramelle al limone e quindi gli dice:

«Puoi prendere una caramella. Ti lascio scegliere il barattolo nel quale puoi infilare la mano, senza guardare dentro.»



Giulio ci pensa un po' e sceglie infine il barattolo che, secondo lui, gli offre più possibilità di prendere una caramella all'arancia.

Al posto di Giulio quale barattolo scegliereste?

Spiegate il vostro ragionamento.

Fig.7 – RMT 2006 – L5-10

Il problema delle due monete (Fig.8) è ricco di ricadute didattiche.

D11. Per scegliere chi deve lavare i piatti del pranzo, Marco, Lorenzo e Livia decidono di lanciare due volte una moneta da 1 euro come quella che vedi in figura:

Testa **Croce**

Stabiliscono che:

- **se verranno 2 croci, laverà i piatti Marco;**
- **se verranno 2 teste, laverà i piatti Livia;**
- **se verranno una testa e una croce, laverà i piatti Lorenzo.**

a. Pensi che tutti e tre abbiano la stessa probabilità di lavare i piatti?

☐ Sì

☐ No

b. Giustifica la tua risposta.

....

Fig.8 – PN 2011 – L8 – a33% b16,6%

Una delle maggiori difficoltà è individuare lo spazio degli eventi. In particolare quanti singoli eventi contribuiscono a formare il risultato “una testa e una croce”?

Utile per rispondere alla domanda è una efficace visualizzazione dello spazio degli eventi (per elencazione, con una tabella, con un grafo ad albero, con un diagramma di Venn).

Ancora questo quesito apre la discussione: se il lancio di una moneta ripetuto due volte equivale o meno ad un solo lancio di due monete diverse (utile usare due monete di metalli differenti).

Abbiamo ripreso con approccio statistico il problema del lancio della moneta e della puntina. Divisi in gruppi abbiamo lanciato questi oggetti molte volte registrando i risultati.

Abbiamo raccolto i risultati dei gruppi in un’unica tabella, evidenziando le frequenze relative e assolute degli eventi (Fig.9).

Benché le nostre prove superassero solo di poco il centinaio la frequenza dell’evento “testa” si è ben presto attestata sul valore di 0,5. Mentre la frequenza dell’evento “puntina in su” si è attestata su un valore nettamente inferiore.

Fig.9 – Tabella dei risultati del lancio della puntina.

Oltre al lancio delle due monete abbiamo considerato il lancio di due dadi, introducendolo con la richiesta di sommare i risultati e tabulare tutte le somme.

Abbiamo proseguito con la richiesta di moltiplicare i risultati come richiesto dal quesito Invalsi (Fig.10).

D7. **Anna e Daniele giocano con due dadi. Ciascuno tira i due dadi e moltiplica i due numeri. Ad esempio, in questo caso 4 × 3 = 12.**

Anna vince se il prodotto è un numero pari.
Daniele vince se il prodotto è un numero dispari.

Hanno entrambi la stessa probabilità di vincere?

Fig.10 – PN 2013 – L8 – Risposte corrette solo il 32%.

Il superenalotto è un gioco che coinvolge milioni di italiani. Gli aspetti emotivi e psicologici prevalgono nettamente sulle corrette misure di probabilità. Ne abbiamo discusso affrontando il seguente quesito Invalsi, tratto dalla Prova Nazionale 2015 per il livello 8:

> "*Nel gioco del superenalotto ogni giocatore sceglie almeno sei numeri interi compresi tra 1 e 90. Gli organizzatori estraggono a caso sei numeri, sempre compresi tra 1 e 90. Vincono i giocatori che hanno scelto proprio gli stessi numeri estratti dagli organizzatori del gioco.*
>
> *Sara ha scelto i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6.*
>
> *Guglielmo ha scelto i numeri 7, 12, 15, 23, 28, 34.*
>
> *Sara e Guglielmo hanno la stessa probabilità di vincere?*
>
> *A. No, perché i numeri scelti da Sara sono consecutivi*
>
> *B. Sì, perché tutti i numeri hanno la stessa probabilità di essere estratti*
>
> *C. No, perché Sara e Guglielmo non hanno scelto gli stessi numeri*
>
> *D. Sì, perché non conosciamo i numeri usciti nelle estrazioni precedenti*"

Un problema divertente che sorprende sempre coloro che lo affrontano per la prima volta è senz'altro quello dei calzini spaiati:

> "*In un cassetto mescolati tra di loro si trovano calze blu, calze rosse e calze nere in ugual numero. Ci si trova al buio. Qual è il numero di calze che basta prendere per essere certi di averne due dello stesso colore?*"

Qualcuno ha voluto anche ritagliare e colorare calzini di molti colori diversi e, bendato, procedere a sorteggi (Fig.11). Lo scopo evidente è quello di cercare un approccio didattico coinvolgente e motivante. La risposta al quesito non potrà che essere di tipo teorico. Nel caso più sfortunato, dopo aver scelto tre calzini, avremo tre colori diversi. Basterà scegliere un quarto calzino per avere la certezza di averne due dello stesso colore.

Fig.11 – Estrazioni di calzini colorati.

Conclusione

Due giorni non sono sufficienti per un corso di probabilità. Tuttavia i colleghi partecipanti (Fig.12) nella restituzione finale ai componenti degli altri gruppi hanno dimostrato di essersi impadroniti di alcune attività, che sono riusciti a comunicare con efficacia anche grazie alla loro vivacità ed entusiasmo.

Fig.12 – I partecipanti al gruppo "ProbabilMente".

Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Nota

1. L'esperienza descritta prende spunto dalle attività svolte durante il primo corso di "matematica laboratoriale" tenuto al Nicotel di Bisceglie in Puglia, dal 3 al 5 novembre 2017. Convegno per insegnanti, organizzato da Margherita Ambrosini in collaborazione con il Centro Orientamento "Don Bosco" e con l'Asilo nido e Scuola dell'Infanzia Paritaria "Stella Stellina" di Bisceglie.

Bibliografia e sitografia

Anichini G., (2018). Probabilità, didattica e *giochini* a scuola. *Nuova Secondaria, 6*: 70-73.

de Finetti B., (1930). Fondamenti logici del ragionamento probabilistico. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 9*(5): 258-261.

Galilei G., (1596). *Sopra le scoperte dei dadi.* Barbera, Firenze.

Kolmogorov, (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung [Concetti fondamentali del Calcolo delle Probabilità].* Springer, Berlino.

Laplace P.S.de, (1812). *Essai philosophique sur les probabilités*. Bachelier, Parigi.

Lissoni A., (2011). *Probabilità e caso. La scienza dell'alea.* Edizioni Kangourou Italia.

Pascal B., (1654). *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière.* Desprez, Parigi.

Prodi G., (1991). Didattica della probabilità nella scuola media. Ristampato in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 33A*: 533-551.

I problemi proposti nel nostro laboratorio sono reperibili ai seguenti indirizzi:

http://www.gestinv.it - Gestinv 2.0 Archivio interattivo delle prove Invalsi, realizzato da Cervelli in Azione srl e ForMath srl. sviluppando un progetto realizzato per l'Invalsi.

http://www.armtint.org/ - Associazione Rally Matematico Transalpino (RMT).

http://www.projet-ermitage.org/ARMT/bp-it2.html - Banca dei problemi del RMT.

Gli Autori

Fabio Brunelli
UMI – GRIMeD - GFMT
brunelli1950@libero.it
Italy

Laureato in matematica, ha insegnato matematica e scienze in una scuola secondaria di primo grado.
Si interessa di didattica della matematica e di formazione docenti.
Ha collaborato con INDIRE come autore di materiali didattici on-line per il progetto nazionale M@t.abel e PQM.
Attualmente è consulente di alcuni Istituti Comprensivi per la costruzione del Curricolo Verticale di Matematica.

Francesco Chesi
MIUR - I.C. Guicciardini
Via Ramirez de Montalvo 1, 50141 Firenze (FI)
francesco.chesi@gmail.com
Italy

Laureato in scienze naturali, insegna matematica e scienze in una scuola secondaria di primo grado.
Si interessa di didattica della matematica e di formazione docenti.
Collabora con riviste di didattica.

Received April 23, 2017; *revised* June 29, 2017; *accepted* August 19, 2017; *published online* June 6, 2018