

From shear transformations to the Pythagorean theorem

Rosa Marincola

Abstract. *This paper describes some teaching experiments carried out in the first two years of High School: the focus is on the concept of equivalence by using shear transformations. The goal was to show some properties of polygons and to prove the Pitagora's theorem by using the geometry of the transformations and through the utilisation of a dynamic Geometry software.*

Key words. *Area, equivalence, shear, problem solving, polygons.*

Sommario. *(Dalle trasformazioni shear al teorema di Pitagora). Questo contributo descrive alcune sperimentazioni didattiche realizzate con studenti del primo biennio di scuola secondaria superiore, focalizzate sul concetto di equivalenza utilizzando le trasformazioni shear (per scorrimento). L'obiettivo è stato quello di mostrare alcune proprietà di poligoni e di dimostrare il teorema di Pitagora con la geometria delle trasformazioni e attraverso l'utilizzo di un software di Geometria dinamica.*

Parole chiave. *Area, equivalenza, scorrimenti, problem solving, poligoni.*

Introduzione

Il 16 maggio 2017, presso l'Università della Calabria in Arcavacata di Rende, è stato organizzato un convegno dal titolo: "Una giornata di didattica della matematica per Margherita" (fig.1) per ricordare la professoressa Margherita D'Aprile, venuta a mancare nella notte tra il 16 e il 17 ottobre 2016. È stata docente di Geometria nel Dipartimento di Matematica dell'UNICAL dal 1972, anno di nascita dell'Ateneo, fino al 2011. Margherita è stata docente stimata da tutti coloro che hanno avuto l'opportunità di conoscerla, ma è stata anche una persona speciale di cui tutti ricordano il rigore, la gentilezza e il sorriso.

Hanno partecipato a questo evento numerosi docenti universitari e suoi ex-allievi ora docenti e alcuni, tra cui la sottoscritta, su invito del Comitato Organizzatore e Scientifico, hanno portato la loro testimonianza.

La professoressa Margherita D'Aprile è stata mia docente nel corso di Istituzioni di Geometria Superiore e successivamente è stata relatrice della mia tesi di laurea dal titolo: "Sottovarietà riemanniane e immersioni isometriche" (fig.2). Da allora siamo rimaste in contatto per attività di formazione, ricerca didattica (D'Aprile, 2008, [link](#)), sperimentazioni, progetti ([Progetto Lauree Scientifiche](#) e [Libera le Idee](#)), ma soprattutto per scambi di idee, di materiali, discussioni e

momenti di condivisione. Tra le numerose iniziative da me citate nella conferenza ho voluto esporre in particolar modo la nostra ricerca sulle trasformazioni geometriche piane che conservano l'area dei poligoni piani e le relative sperimentazioni d'aula. In questo contributo, oltre a richiamare i contenuti di due articoli in cui abbiamo collaborato e da me presentati nella conferenza, desidero riproporre un ampliamento degli stessi e le sperimentazioni svolte in seguito riguardanti il teorema di Pitagora.

The image is a flyer for a mathematics workshop. It features a dark red vertical bar on the left with the text 'University Club Campus di Arcavacata' and the date '16 maggio 2017'. The main content is on a white background with faint handwritten mathematical text in the background. At the top right, it says 'UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA' and 'DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA'. The title is 'Una giornata di Didattica della Matematica per Margherita'. Below the title is a 'Programma' section with a list of activities and speakers, including M.A. Mariotti, N. Chiriano, R. Marincola, and P.L. Ferrari. At the bottom left, there is a list of the organizing committee members.

**University Club
Campus di Arcavacata**

UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA

Una giornata di
Didattica della Matematica
per Margherita

Programma

14:00-14:30
Registrazione

14:30-15:30
Saluti e testimonianze

15:30-16:15
Immagini e figure nel pensiero geometrico
M.A. Mariotti, Università di Siena

16:20-16:40
Problemi di minimo nel piano. Laboratorio sulla riflessione
N. Chiriano, IS Siciliani, Catanzaro

16:40-17:10
Coffee break

17:10-17:30
Dal concetto di area alle trasformazioni che la conservano:
riflessioni e proposte per attività con studenti
R. Marincola, IIS Marconi-Guarasci, Rogliano (CS)

17:30-18:15
Comunicare matematica fra persone ("Dillo con parole tue")
P.L. Ferrari, Università del Piemonte Orientale

16 maggio 2017

Comitato
Organizzatore e
Scientifico

Prof.ssa A. Canina
Dott.ssa E. Florio
Dott.ssa C. Sabatì
Prof.ssa P. Pietromala
Dott.ssa P. Sdao

Per iscriversi:
paola.sdao@unical.it

Fig.1 - Locandina dell'evento

Quadro teorico

Nelle attività che presenterò nel paragrafo successivo ho voluto far sperimentare agli studenti il gusto del fare matematica, superando le artificiose “frammentazioni del sapere in materie”, come osservava Lucio Lombardo Radice nell’ormai lontano 1976, con un viaggio attraverso le diverse branche della matematica e non solo.

Gli obiettivi di apprendimento si sono configurati sotto forma di “sapere come fare a”, piuttosto che di “conoscere che”; infatti in questo modo gli studenti hanno avuto la possibilità di prendere coscienza del perché è necessario conoscere qualcosa e come una certa conoscenza può essere utilizzata per sviluppare competenze (D’Amore B. e Fandiño Pinilla M.I., 2007, [link](#)). Per i nativi

digitali, abituati a interazioni in modalità sincrone, molti a molti ([link](#)), l'uso delle tecnologie è immediato e continuo, ma induce a facili distrazioni.



Fig.2 - 12 luglio 1993: con la Prof.ssa D'Aprile durante la seduta di laurea

Per comprendere, approfondire, riflettere e memorizzare, occorre concentrazione, l'apprendere attraverso il fare, attraverso l'operare, favorisce questi processi. Sosteneva Piaget (1956): *“L'intelligenza è un sistema di operazioni... L'operazione non è altro che azione: un'azione reale, ma interiorizzata, divenuta reversibile. Perché il bambino giunga a combinare delle operazioni, si tratti di operazioni numeriche o di operazioni spaziali, è necessario che abbia manipolato, è necessario che abbia agito, sperimentato non solo su disegni ma su un materiale reale, su oggetti fisici”*. Tali attività “prettamente manuali” non sono sempre possibili con enti matematici basati su teorie astratte, ma la manipolazione e la simulazione attraverso un software costituiscono un valido strumento per favorire la visualizzazione, l'acquisizione di concetti, di tecniche e procedure di calcolo. Occorre considerare inoltre che non si apprende attraverso il mero fare, affinché l'azione sia didatticamente efficace, è essenziale che l'insegnante guidi la discussione e induca ad un'attenta riflessione. Attraverso le semplici azioni si memorizzano azioni meccaniche, l'esecuzione di algoritmi o i passi di costruzioni geometriche devono essere interiorizzate, ripercorse mentalmente per acquisire consapevolezza. All'azione si deve accompagnare il pensiero: quindi il learning by doing, si deve coniugare col learning by thinking (Tenuta U., [link](#)).

Gli elementi essenziali del quadro teorico che mi hanno guidato nella conduzione e nell'osservazione dei lavori possono essere così sintetizzati:

1. gli studi sul ruolo del linguaggio nell'apprendimento e sui rapporti tra didattica generale e didattica della matematica (Vygotskij, 1966; D'Amore, 1999), nonché come “mediatore tra aspetti percettivi ed empirici e teorici [...] essenziale per l'attività argomentativa” (Ferrara, Laiolo, Paola & Savioli, 2009);
2. gli studi sulla trasposizione didattica operata dall'insegnante per adattare la conoscenza matematica al contesto in cui opera, gli ostacoli epistemologici e la multimodalità nei

processi di apprendimento (Chevallard, 1985; D'Amore, 1999; D'Amore, 2009; Arzarello, Paola, Robutti & Sabena, 2008);

3. il laboratorio e la discussione matematica; i risultati relativi all'uso dei software di geometria dinamica come strumenti per la costruzione di significato in campo matematico (Laborde & Mariotti, 2001; Arzarello & Robutti, 2002; Paola, 2007).

Le trasformazioni che conservano l'area

L'idea di lavorare sul concetto di area e sulle trasformazioni che la conservano è nata nel giugno 2008 e nel 2009 è stata oggetto di un laboratorio nel Progetto Lauree Scientifiche ([link](#)): il problema di fondo era quello di pensare a un percorso didattico di geometria euclidea da sviluppare in tempi ridotti (visti i tagli ai monte ore curricolari di matematica), che dai postulati giungesse almeno a dimostrare il teorema di Pitagora. L'obiettivo era dunque quello di realizzare un percorso snello, ma significativo, riconsiderando i problemi classici di costruzioni con riga e compasso, in cui il focus fosse sulle trasformazioni geometriche e non sul calcolo di aree, in accordo con quanto osservava N. Malara (1996 l.c.) rivolgendosi a insegnanti nella scuola media: *“Per quanto riguarda la misura delle aree, lamentiamo il grosso spazio dato nei testi scolastici a problemi che solitamente si riducono all'applicazione di formule, spesso neppure comprese nella loro genesi, e che contrabbandano per attività di geometria dei puri calcoli aritmetici.”*

Gli studi, il confronto, le sperimentazioni, le revisioni e rielaborazioni del nostro lavoro sono stati riportati in due articoli pubblicati sul n. 2 del mese di giugno 2010 della rivista L'educazione Matematica. Il primo articolo dal taglio più teorico portava la firma di Margherita D'Aprile ed era intitolato: *“Le trasformazioni piane che conservano l'area dei poligoni”* (D'aprile, 2010). Il secondo articolo, da me redatto, riportava le attività didattiche sperimentate, nonché i risultati ottenuti. Il titolo di questo secondo articolo era: *Dal concetto di area, alle trasformazioni che la conservano: riflessioni e proposte per attività con studenti* (Marincola, 2010).

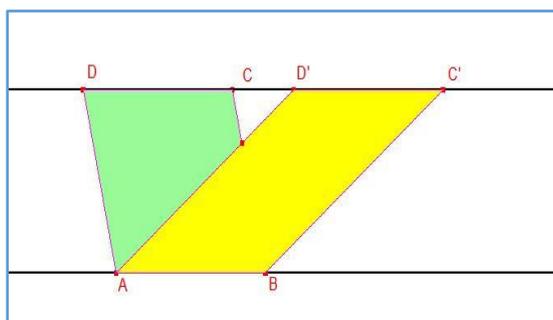


Fig.3 – trasformazione shear

Nel suo lavoro Margherita dopo una serie di considerazioni di carattere didattico riguardanti l'importanza della teoria della misura quale tema indispensabile nella formazione di ogni studente, suggeriva di adottare il metodo sintetico per l'insegnamento della geometria, nell'ambito di “un'isola deduttiva” basata sulle prime 34 proposizioni del libro I degli Elementi di Euclide. Seguiva l'introduzione delle trasformazioni shear e una serie di applicazioni per la dimostrazione di alcune proposizioni classiche. Per individuare una trasformazione per scorrimento, basta assegnare l'asse (ad esempio, la retta AB della fig.3) ed una coppia di punti

corrispondenti (C, C'); lo scorrimento di asse AB che manda C in C' manda il parallelogramma $ABCD$ in $ABC'D'$.

Condividendo il quadro teorico esposto da D'aprile (2010), nel mio articolo (Marincola, 2010), esponevo una serie di attività didattiche svolte nel primo biennio (di due licei scientifici diversi e di un istituto tecnico economico) in un modulo di 15 ore, e orientate alla scoperta di figure equivalenti, prima per via deduttiva e poi utilizzando le trasformazioni shear.

Durante queste attività abbiamo dimostrato i seguenti teoremi:

- Due triangoli aventi le basi coincidenti e il terzo vertice su una retta parallela alla base, sono equivalenti.
 - Ogni triangolo si può trasformare in un parallelogramma equivalente avente per base la metà della sua base ed uguale altezza (fig.5).
 - Un parallelogramma si può trasformare in un rettangolo equivalente aventi basi e altezze relative uguali.
 - Ogni quadrilatero si può trasformare in un triangolo equivalente.
 - Un poligono si può trasformare in un altro equivalente e con un lato di meno
- costruzione fatta realizzare agli studenti con una macro-costruzione col software di geometria dinamica GeoGebra (fig.6).

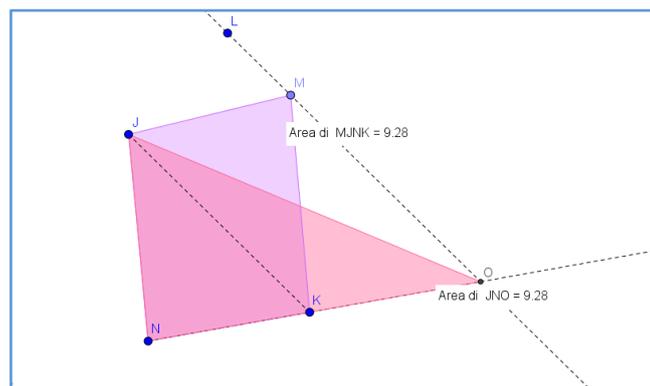


Fig.5

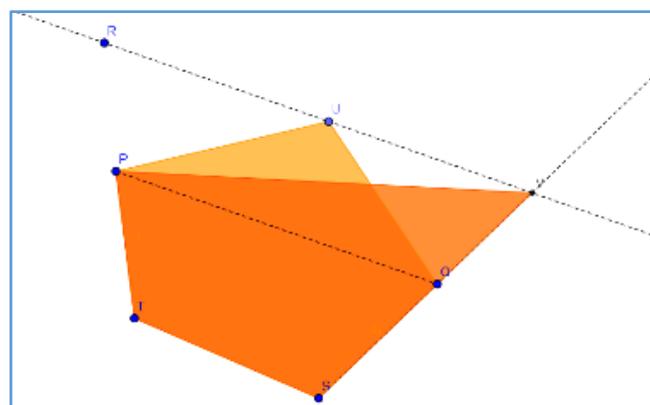


Fig.6

Tra i dati da me osservati e rilevati, evidenziavo che “*una volta scoperti gli scorrimenti, nel risolvere i problemi proposti, gli studenti usavano con maggior naturalezza le trasformazioni e non le costruzioni geometriche euclidee, nonostante che nell’attività curricolare fossero abituati alle dimostrazioni classiche; era evidente che la nuova impostazione appariva loro più semplice e congeniale in quanto avevano acquisito una rappresentazione mentale iconica dei processi eseguiti col software*” (Marincola, 2010; p. 41). Altra attività interessante proposta è stata quella di far realizzare delle macro-costruzioni con i software di geometria dinamica (Cabri II Plus e GeoGebra) per implementare nuovi strumenti personalizzati.

Esempi di attività svolte

Nell’ambito dei progetti PON (Piano Operativo Nazionale) ho realizzato due sperimentazioni (a.s. 2008/2009 e a.s. 2009/2010) che possono essere considerate la continuazione delle attività descritte negli articoli citati nel paragrafo precedente. In questi progetti ho lavorato in qualità di esperto esterno con un gruppo di 20 studenti della seconda classe del Liceo Scientifico “G.B. Scorza” di Cosenza.

I ragazzi hanno lavorato in piccoli gruppi di 2-3 elementi ciascuno, con strumenti da disegno, con i software di geometria dinamica Cabri II Plus e GeoGebra. Alcuni studenti presentavano carenze di base, altri, pur avendo una certa manualità nei calcoli, evidenziavano difficoltà di ordine logico-deduttivo e discontinuità nell’attenzione.

Nelle attività svolte, ho utilizzato inizialmente le trasformazioni shear per condurre gli studenti a dimostrare il Primo Teorema di Euclide. Come si vede in figura (fig.7): considerando lo scorrimento di asse DE e direzione FH , si può trasformare il quadrato $DEHF$, nel parallelogramma equivalente $DEQM$; applicando ad esso una traslazione di vettore DL e successivamente uno scorrimento di asse DL e direzione PN , si ha che il parallelogramma $DEQM$ è equivalente al rettangolo $LNPD$; dunque per la proprietà transitiva si ha la tesi: il quadrato $DEHF$, costruito sul cateto del triangolo rettangolo DCE , è equivalente al rettangolo $LNPD$ avente come dimensioni l’ipotenusa e la proiezione del cateto DE sull’ipotenusa.

Con trasformazioni analoghe si ha che il quadrato $ECKI$, costruito sul cateto EC è equivalente al rettangolo $NOCP$.

Il Teorema di Pitagora discende immediatamente dal Primo Teorema di Euclide, considerando la costruzione in figura (fig.7) poiché dato un triangolo rettangolo (nel nostro caso DCE), la somma dei quadrati costruiti sui cateti sono equivalenti alla somma dei rettangoli $LNCP$ e $NOCP$, ma la somma di questi due rettangoli è equivalente al quadrato costruito sull’ipotenusa.

Ho anche fatto realizzare un semplice modellino con la carta del “Teorema della bustina” (fig.8), per utilizzare altre trasformazioni geometriche per far comprendere agli studenti che il teorema di Pitagora è valido anche se le figure costruite sui cateti e sull’ipotenusa non sono quadrati, ma figure simili tra loro. Manipolando il modellino, li ho invitati a enunciare e dimostrare il teorema; in questa occasione ho notato un progressivo in miglioramento rispetto alla situazione d’ingresso: la comprensione e l’enunciazione della dimostrazione attraverso le simmetrie assiali è stata immediata.

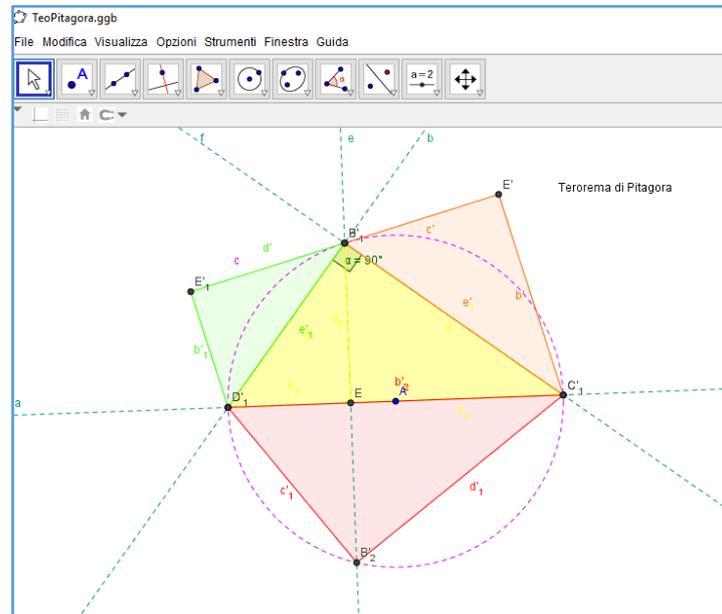


Fig.9 - Teorema della bustina

Ho poi mostrato col videoproiettore la figura (fig.10), per verificare l'effettiva comprensione dei concetti introdotti e ho chiesto agli studenti che cosa rappresentasse quell'immagine.

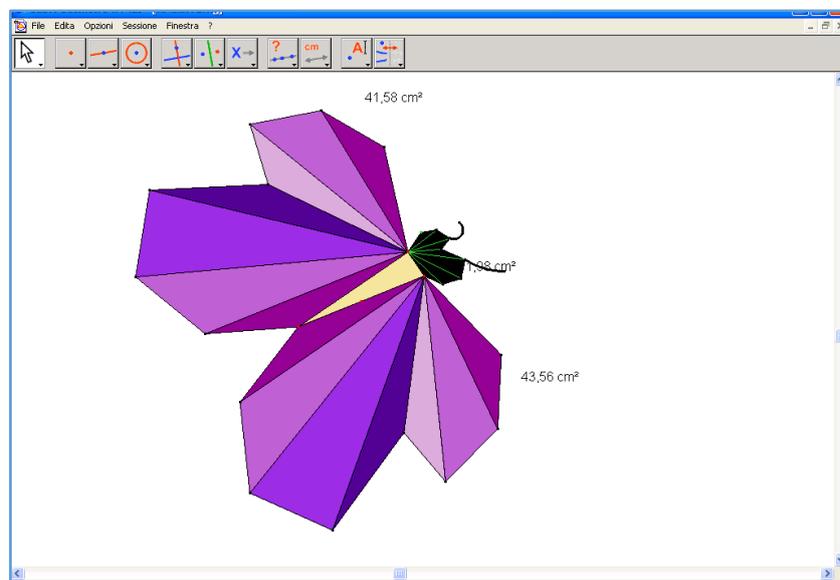


Fig.10

Al primo impatto tutti hanno detto di vedere una farfalla realizzata con Cabri II Plus; ho chiesto loro di osservare meglio, ho modificato un po' la figura e ho ingrandito il triangolo centrale; gli studenti, inizialmente, non riuscivano a cogliere il significato geometrico della figura. Quando ho

mostrato che il triangolo era inscritto in una semicirconferenza, si sono resi conto che si trattava di un triangolo rettangolo e che le figure che apparivano come ali e testa erano simili tra loro; quindi si trattava ancora del teorema di Pitagora in una forma analoga a quello rappresentato in fig. 8 e fig.9.

Nello specifico, per ottenere una figura simile alla figura (vedi fig.10), gli studenti hanno realizzato le seguenti costruzioni:

- 1) hanno costruito un triangolo rettangolo e un poligono su uno dei cateti come in figura (fig.11)

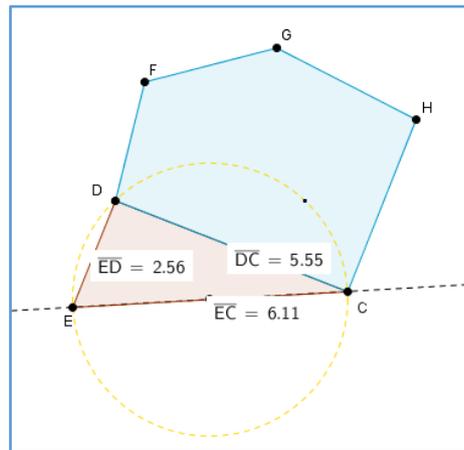


Fig.11

- 2) Hanno calcolato il rapporto di omotetia

$$k = \frac{EC}{DC}$$

digitando nella barra d'inserimento,

$$k = \frac{\text{Distanza}[E, C]}{\text{Distanza}[D, C]},$$

hanno selezionato la trasformazione Omotetia e hanno cliccato sul poligono di lato CD , poi il punto C e hanno inserito k nella finestra di dialogo, ottenendo la figura (fig.12).

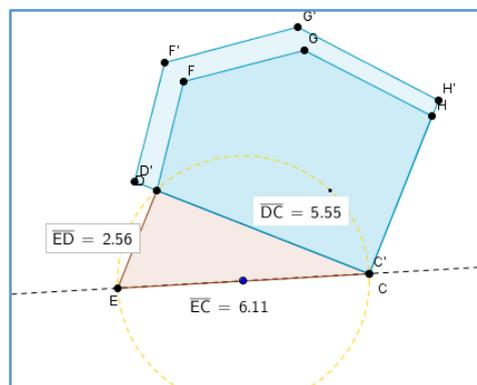


Fig.12

- 3) Successivamente è stata tracciata la bisettrice dell'angolo DCE ed è stata applicata la simmetria assiale del poligono $D'C'H'G'F'$ rispetto alla bisettrice come in figura (fig.13).

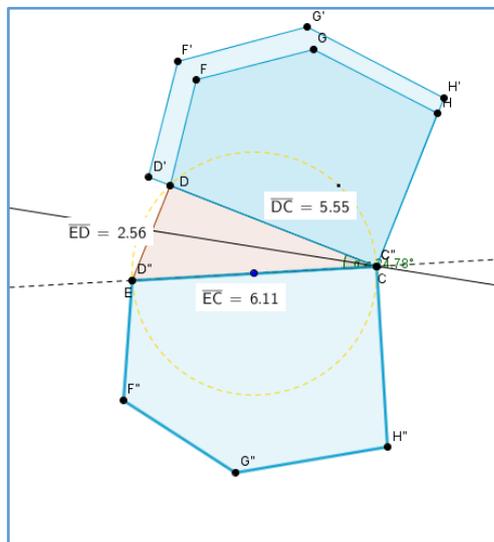


Fig.13

- 4) ripetendo i passi precedenti e nascondendo via via gli oggetti non più necessari, si perviene alla figura (fig.14) e dunque alla generalizzazione del teorema di Pitagora.

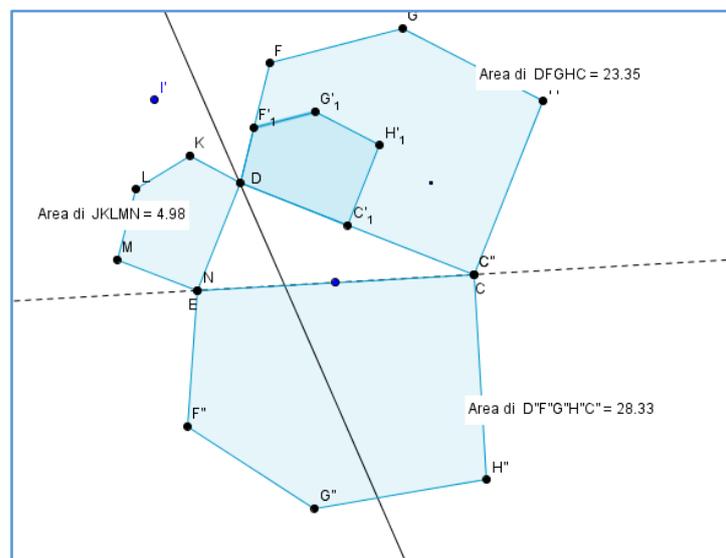


Fig.14

Le costruzioni sono state realizzate attraverso discussioni guidate; grazie anche a sistematiche e frequenti domande, richiamavo continuamente nozioni teoriche e, se necessario, fornivo chiarimenti, ma senza dare subito la risposta, attendendo il tempo necessario affinché qualche studente provasse a rispondere. Discussioni collettive guidate dall'insegnante e gruppi di lavoro autonomi si sono alternati durante tutta l'esperienza, secondo le indicazioni nazionali per il primo

ciclo d'istruzione ([link](#)) e i curricula UMI ([link](#)). Gli studenti hanno partecipato con entusiasmo e quasi sempre attivamente, anche se, talvolta, sono emersi momenti di deconcentrazione e disattenzione che hanno comportato alcuni problemi di comprensione da parte di alcuni. Ritengo che la causa più probabile di questi momenti di distrazione sia dovuta essenzialmente all'abitudine che gli studenti hanno di comunicare in modalità sincrone e reticolari, non sempre possibili nelle fasi del lavoro in classe. Per questi motivi, talvolta è stato necessario soffermarsi e richiamare l'attenzione sui punti essenziali, porre quesiti e verificare l'effettiva comprensione. Il gruppo seppur vivace, non ha creato problemi di carattere disciplinare, anche quando ha manifestato momenti di stanchezza dovuti al fatto che i lavori venivano proposti durante le prime ore pomeridiane.

Conclusioni

In questo lavoro sono state presentate attività di tipo laboratoriale che, attraverso l'osservazione, la manipolazione di modelli reali e la costruzione di una serie di file con software di geometria dinamica, ha condotto gli studenti a uno studio meditato e attento sul teorema di Pitagora utilizzando anche la geometria delle trasformazioni. In particolare, abbiamo scoperto con gli studenti le proprietà e alcune possibili attività con le trasformazioni shear e componendo altre trasformazioni che conservano l'area. Attraverso ricerche in rete sono state evidenziate le applicazioni delle trasformazioni shear nei software di grafica digitale, in reologia, in ingegneria, fisica, scienza dei materiali, ecc.

Le varie costruzioni realizzate hanno aiutato i ragazzi a comprendere meglio le proprietà degli enti geometrici in quanto l'uso delle tecnologie è presente nella quotidianità degli studenti e si rivela più consono ai loro mezzi espressivi. Dal momento che le tecnologie concorrono alla costruzione dei saperi informali e non formali (Finocchiaro S. 2015, [link](#)), appare opportuno sfruttarne le potenzialità per la costruzione dei saperi formali.

Ho voluto evidenziare quanto una didattica basata sul learning by doing, possa essere significativa per gli studenti. Essa, infatti, può creare le condizioni favorevoli per un apprendimento che mira allo sviluppo del pensiero matematico utilizzando, consapevolmente, strumenti diversi, tra cui quelli di calcolo automatico, ed essere al tempo stesso motivante e coinvolgente.

Con le attività realizzate, oltre a esercitazioni di recupero su argomenti segnalati dai docenti curricolari, ho tentato di potenziare la motivazione e di mostrare l'importanza di imparare a usare tecniche e procedure di calcolo in modo consapevole.

Dichiarazione di conflitti di interesse

L'autrice dichiara di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Deposito dei materiali dell'attività

Al seguente link sono depositati eventuali materiali inerenti questo l'articolo. Questi materiali nel tempo potranno essere modificati e arricchiti seguendo l'evoluzione delle idee sottostanti o/e future sperimentazioni svolte dall'autore dell'articolo.

<http://rosamarincola.blogspot.it/2017/05/convegno-una-giornata-di-didattica.html>

Acknowledgements

Ringrazio il Comitato Organizzatore e Scientifico del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'UNICAL: Prof.ssa Annamaria Canino, Dott.ssa Emilia Florio, Dott.ssa Concettina Galati, Prof.ssa Paolamaria Pietramala e Dott.ssa Paola Sdao per avermi dato l'opportunità di ricordare la figura della Professoressa D'Aprile nella giornata a lei dedicata.

Auspico che anche negli anni futuri ne venga mantenuta viva la memoria proseguendone l'opera con iniziative di formazione e ricerca didattica rivolti a studenti e docenti di ogni ordine e grado. Un accorato ringraziamento va alla cara Professoressa Margherita D'Aprile con cui ho condiviso tanti momenti della mia formazione e il cui ricordo resterà indelebile.

Bibliografia

- Arzarello F., Paola D., Robutti O., Sabena C. (2008). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom, *Educational Studies in Mathematics*, Springer Netherlands.
- Arzarello F., Robutti O., (2002). *Matematica*, Editrice LA SCUOLA.
- Amaldi U., (1983). *Sulla teoria della equivalenza*, in F. Enriques, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Parte prima, vol. II, art. VII, pag. 1-59, ristampa della terza edizione, Zanichelli, Bologna.
- Cariani G., Fico M., (2003). *Matematica con... Geometria*, Loescher.
- Cateni L., Fortini R., Bernardi C., (1990). *Nuova Geometria*, Le Monnier.
- Chevallard Y., (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Coxeter H.S.M., (1980), *Introduction to Geometry, second edition*, Wiley, New York.
- Dedò M., (1996), *Trasformazioni geometriche*, Decibel, Padova – Zanichelli, Bologna.
- D'Aprile M., (2008). Per mitigare la solitudine di chi insegna geometria, *La matematica e la sua didattica*, anno 22, n. 4, 2008.
- D'Aprile M., (2010). Le trasformazioni piane che conservano l'area dei poligoni, *L'educazione Matematica*, n. 2 pp. 15-30.
- Euclide, (2007). *Tutte le opere*, a cura di F. Acerbi, Bompiani.
- D'Amore B., (1999). *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, Bologna.
- D'Amore B., (2009). Il ruolo dell'epistemologia dell'insegnante nelle pratiche d'insegnamento, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 32 B, n.2.
- Ferrara F., Laiolo P., Paola D., Savioli K., (2009). Movimento, visualizzazione e costruzione di significato nella scuola primaria, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 32 A, N. 4 pag. 441 - 470.
- Laborde C., Mariotti M., (2001). Grounding the notion of function and graph in DGS, *Cabriworld 2001*, Montreal.
- Lazzarini P., Sarnataro G., (2006). *Geometria*, ETAS.
- Lombardo Radice L., (1976). *Logica e interdisciplinarietà*, in *Introduzione alla logica*, Editori Riuniti, Roma.

- Malara N., (1996). *L'insegnamento della geometria nella scuola media. Questioni teoriche e didattico-metodologiche*, n.7: Alcune osservazioni sulla equiestensione, in M.P.I. – U.M.I. L'insegnamento della geometria, Seminario di formazione per docenti, Lucca, 1995-96.
- Marchini C., (1999). Il problema dell'area, *L'educazione Matematica*, n.1, pag. 27-48.
- Marincola R., (2010). Una rivisitazione del problema della duplicazione del quadrato, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 33B, N. 1 pag. 69 – 86
- Marincola R., (2010). Dal concetto di area, alle trasformazioni che la conservano: riflessioni e proposte per attività con studenti, *L'educazione Matematica*, n. 2 Giugno 2010 pp. 31-42
- Paola D., (2007). *Dal laboratorio alla lezione: descrizione di un esempio*, Innovazione Educativa-Supplemento per l'Emilia Romagna, n. 8 - 2006, 13 - 20, IRRE Emilia Romagna.
- Piaget J., (1956). *Avviamento al calcolo*, la Nuova Italia, Firenze.
- Polo M., (1999). Il contratto didattico come strumento di lettura della pratica didattica con la matematica. *L'educazione matematica*, XX, VI, 1, 4-15.
- School Mathematics Project, S.M.P., (1973). *Un progetto per l'insegnamento della matematica nella Scuola Media*, traduzione curata dall'Unione matematica Italiana, vol. 3, cap. 12, Zanichelli, Bologna.
- Villani V., (2006). *Cominciamo dal punto*, Pitagora, Bologna.
- Vygotskij L., (1966). *Pensiero e linguaggio*. Giunti e Barbera, Firenze.

Sitografia

- <http://matematica.unibocconi.it/articoli/margherita-daprile-un-ricordo>
- <http://www.unical.it/portale/portaltemplates/view/view.cfm?70819>
- <https://www.mat.unical.it/~daprile/pubblicazioni/DAPRILEformat.pdf>
- <https://www.geogebra.org/m/TFJTdpbp>
- <http://docenti.unicam.it/tmp/3608.pdf>

L'Autrice

	<p style="text-align: center;">Rosa Marincola</p> <p>IIS “Marconi-Guarasci” sez. ITE Rogliano Via E. Altomare c.da Turbe 85/A, 87054 Rogliano (Cs) E-mail: rosamarincola@virgilio.it Italia</p> <p>Laureata in Matematica presso l'UNICAL di Cosenza, ha conseguito due specializzazioni scientifiche biennali, due master e quattro corsi di perfezionamento. Ha insegnato Matematica e fisica nelle scuole superiori, attualmente è docente di Informatica. Ha partecipato a diverse iniziative di formazione dei docenti a livello nazionale. Collabora con diverse riviste ed è autrice di svariate pubblicazioni. Si occupa da anni di ricerca didattica, è stata tutor coordinatore per il TFA per le c.c. A047 Matematica e A048 Matematica Applicata. È referente regionale CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica). Scientix Ambassador for Italy.</p>
---	---

Received June 19, 2017; revised July 20, 2017; accepted October 28, 2017; published online March 26, 2018

Open Access This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

