article

EDiMaST

ISSN 2421-7247

Experiential learning cycle in Mathematics

Elsa Malisani

Abstract. *What is a mathematical competence? What conditions support the "know how to act with competence"? How can we prepare educational activities to facilitate the "act with expertise in mathematics"? The aim of this paper is try to answer these questions. We show the experimentation of a situation-problem in mathematics, proposed for high school, able to start the experiential learning cycle.*

In particular, we want to describe the different phases of the experiential learning cycle, explaining the activities that teacher and students develop; identify difficulties and obstacles encountered by students to solve the problem and explain the methodology to overcome; evaluate the experience, indicating strengths and weaknesses.

Key words. *Experiential learning cycle, Mathematical competence, Mathematics education, Teaching and Learning.*

Sommario. *Cos'è una competenza matematica? Quali sono le condizioni che favoriscono il "saper agire con competenza"? Come predisporre attività didattiche che facilitino l'"agire con competenza in matematica"? L'obiettivo di questo articolo è cercare di rispondere a queste domande, presentando la sperimentazione di una situazione-problema in Matematica, progettata per la scuola secondaria di secondo grado, atta a far partire il ciclo di apprendimento esperienziale.*

In particolare, vogliamo: descrivere le diverse fasi del ciclo di apprendimento esperienziale, esplicitando cosa fa il docente e cosa fanno gli alunni; individuare le difficoltà e ostacoli che incontrano gli studenti per risolvere il problema ed esplicitare le metodologie per il superamento; valutare l'esperienza, indicando i punti di forza e i punti di debolezza.

Parole chiave. *Ciclo di apprendimento esperienziale, competenza matematica, didattica della matematica, insegnamento/apprendimento.*

Resumen. *¿Qué es una competencia matemática? ¿Cuáles son las condiciones que favorecen el "saber actuar con competencia"? ¿Cómo preparar actividades didácticas que faciliten el "actuar con competencia en matemática"? El objetivo de este artículo es tratar de responder a estas preguntas, presentando la experimentación de una situación-problema en Matemática, proyectada para la escuela secundaria, que permita el desarrollo del ciclo de apprendizaje experiencial.*

En particular, queremos: describir las distintas fases del ciclo de aprendizaje experiencial, explicando qué cosa hace el profesor y qué cosa hacen los alumnos; individuar las dificultades y los ostacúlos que encuentran los estudiantes para resolver el problema y explicar la metodología utilizzada para superarlos; evaluar la experiencia indicando los *puntos fuertes y los puntos débiles.*

Palabras claves. *Ciclo de aprendizaje experiencial, competencia matemática, didáctica de la matemática, enseñanza/aprendizaje.*

Introduzione

L'indagine internazionale OCSE-PISA verifica l'acquisizione di competenze chiave in matematica, scienze e lettura da parte dei quindicenni scolarizzati. Nelle diverse rilevazioni triennali dei test PISA gli studenti italiani hanno ottenuto risultati medi in matematica inferiori alla media OCSE, tuttavia l'Italia è uno dei Paesi che ha registrato, tra il 2003 e il 2012, i maggiori progressi nei risultati di matematica. Gli studenti ottengono risultati particolarmente bassi quando la valutazione verte sulla loro capacità di formulare situazioni in modo matematico, ma raggiungono una performance migliore negli item in cui devono interpretare, applicare e valutare risultati matematici (OECD, 2013).

Il processo Formulare in forma matematica prevede l'identificazione delle opportunità di applicare e usare la matematica, o meglio rendersi conto del fatto che è possibile applicare la matematica per comprendere o risolvere un particolare problema o sfida (INVALSI, 2013). Questo processo comprende le seguenti attività: identificare gli aspetti matematici rilevanti del problema reale e formulare la situazione in forma matematica, basandosi sui concetti e sulle relazioni individuati e sulle ipotesi semplificatrici formulate, infine trasformare il "problema contestualizzato" in un "problema matematico", cioè gestibile in modo matematico. In questo modo si conferisce al problema una struttura, una rappresentazione e una specificità di tipo matematico.

Quindi i risultati dei test PISA evidenziano che gli studenti italiani incontrano delle difficoltà nel passaggio dalla situazione di problema reale al modello matematico (Bolondi, 2014). Gli alunni non sanno applicare le conoscenze e le abilità apprese a scuola a un contesto meno strutturato, in cui le istruzioni sono meno chiare e in cui devono decidere quali siano le conoscenze pertinenti e come esse si possano utilmente applicare per risolvere il problema. La formazione matematica offerta a scuola sembra fornire, e non a tutti, conoscenze e abilità, ma non appare idonea a produrre competenze per la vita.

Cos'è una competenza matematica?

Secondo il Quadro Europeo dei Titoli e delle Qualifiche (EQF) competenza è: «la comprovata capacità di usare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e/o personale; le competenze sono descritte in termine di responsabilità e autonomia».

La legislazione nazionale (D.M. 139/2007) richiama questa definizione sottolineando che «le competenze … non riguardano una versione riduttiva del saper fare; costituiscono, invece, quel saper fare ad ampio spettro che conferisce senso autentico e motivante alle "cose apprese e utilizzate", perché siano riconducibili a sé e utilizzabili in più campi e con versatilità».

In particolare, nella descrizione degli assi culturali, il D.M. 139/2007 considera che la "finalità dell'asse matematico è l'acquisizione … delle abilità necessarie per applicare i principi e i processi matematici di base nel contesto quotidiano della sfera domestica e sul lavoro, nonché per seguire e vagliare la coerenza logica delle argomentazioni proprie e altrui in molteplici contesti di indagine conoscitiva e di decisione”. La competenza matematica comporta la capacità e la disponibilità … di esplorare situazioni problematiche, di porsi e risolvere problemi, di progettare e costruire modelli di situazioni reali.

Da questo punto di vista, per essere competente in matematica non basta possedere un buon bagaglio di conoscenze, abilità e capacità, è necessario poter mobilitare efficacemente le proprie risorse per affrontare una situazione-problema in modo di interpretarla adeguatamente, scegliendo le strategie da mettere in atto con l’obiettivo di proporre risposte adeguate (Cfr. Trinchero, 2015).

Quadro teorico

Quali sono le condizioni che favoriscono il “saper agire con competenza”?

Trinchero (2015) presenta quattro componenti che caratterizzano la possibilità del soggetto di “agire con competenza”, che costituiscono il modello R-I-Z-A:

- *Risorse (R)*: possedute e suscettibili ad essere mobilitate in termini di conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche adeguate alla situazione-problema
- *Modelli (I)*: espliciti o impliciti, che guidano l’interpretazione della situazione-problema da parte del soggetto e la conseguente scelta delle strategie da mettere in atto. Il soggetto competente, prima ancora di cercare una strategia, cerca di ridefinire il problema in una forma ottimale per la sua soluzione. L’autore chiama questi modelli *strutture di interpretazione*
- *Strategie operative (Z)*: che il soggetto mette in atto per raggiungere gli scopi che si prefigge, in presenza di una data situazione-problema. Trinchero chiama queste *strategie strutture di azione*
- *Capacità autoriflessiva e autoregolativa (A)*: riguarda la capacità del soggetto di capire se le strategie adottate sono effettivamente le migliori possibili e di cambiarle opportunamente in caso contrario. L’autore chiama queste capacità *strutture di autoregolazione*.

Trinchero (2012) ritiene che le quattro componenti dell’“agire con competenze” possono emergere quando lo studente deve risolvere problemi aperti. I problemi aperti possono avere dati sovrabbondanti o dati mancanti; nel primo caso lo studente deve selezionare quelli utili per la soluzione del problema e nel secondo deve stimare alcuni dati o reperirli autonomamente. I problemi aperti sono suscettibili a numerose interpretazioni e risolvibili con diverse strategie, alcune migliori di altre. Quindi il soggetto dovrà riflettere sulle interpretazioni e le strategie adottate per individuare i punti di forza e i punti di debolezza. In questo modo lo studente potrà valutare l’adeguatezza, l’efficacia e l’efficienza dei modelli interpretativi utilizzati e delle strategie messe in atto.

Il ciclo di apprendimento esperienziale di Pfeiffer e Jones

Come predisporre attività didattiche che facilitino l’“agire con competenza”?

Trinchero (2012) presenta un modello di strutturazione di attività didattiche basato sul ciclo di apprendimento esperienziale enunciato da Pfeiffer e Jones (1985) e Pfeiffer e Ballew (1988), schematizzato in figura (Fig.1).

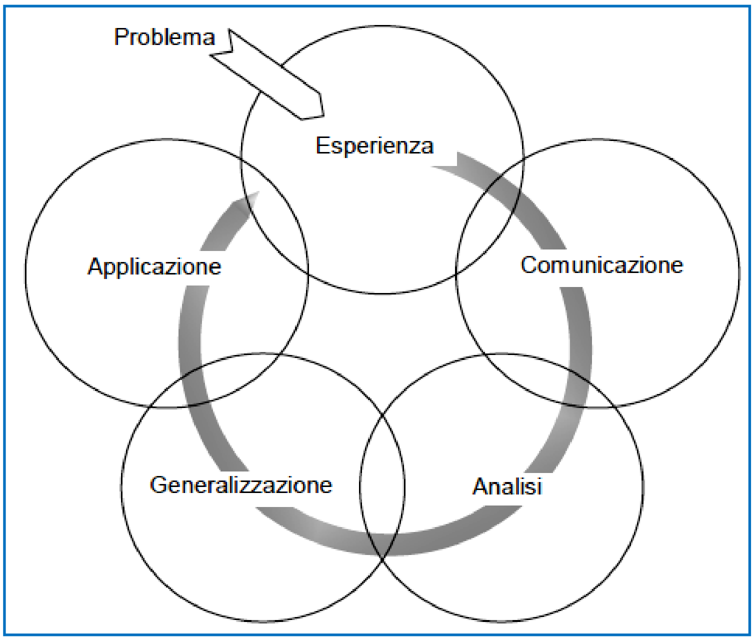

Fig. 1 - Il ciclo di apprendimento esperienziale di Pfeiffer e Jones

- *Problema*: il ciclo parte da un *problema aperto*, non affrontato prima in classe, significativo per lo studente (che rappresenti una sfida), né troppo facile, né troppo difficile, da risolvere a coppie o in piccoli gruppi, ma potendo contare sempre sull'interazione con i compagni o con l'insegnante e sulla consultazione di materiali didattici.
- *Esperienza*: per risolvere il problema l'alunno compie un'*esperienza* all'interno di un contesto sociale, il gruppo classe. Gli studenti formulano possibili soluzioni utilizzando le risorse di cui dispongono e facendo emergere le proprie misconcezioni(1) o misconcetti sull'argomento relativo al problema.
- *Comunicazione*: il portavoce di ogni coppia o di ogni gruppo espone alla classe il processo risolutivo eseguito e le soluzioni trovate, motivando le loro scelte.
- Analisi: il docente con il gruppo classe individua i punti di forza e i punti di debolezza delle soluzioni proposte, spiegando il perché. Suggerisce anche buone idee non emerse dalla discussione.
- *Generalizzazione*: il docente con il gruppo classe fa una sintesi dei punti di forza di tutte le soluzioni presentate per produrre una o più soluzioni ottimali. Il docente fornisce anche le risorse e i principi generali necessari per affrontare i problemi appartenenti alla stessa famiglia del problema iniziale.
- *Applicazione*: il docente propone alla classe un nuovo problema che gli studenti devono risolvere applicando le risorse ed i principi generali appena formulati nella fase di generalizzazione.

Il ciclo di apprendimento esperienziale in Matematica

L'obiettivo di questo articolo è presentare la sperimentazione di una situazione-problema in Matematica, progettata per la scuola secondaria di secondo grado, atta a far partire il ciclo di apprendimento esperienziale. In particolare, vogliamo:

- Descrivere le diverse fasi del ciclo di apprendimento esperienziale, esplicitando cosa fa il docente e cosa fanno gli alunni
- Individuare le difficoltà e gli ostacoli che incontrano gli studenti per risolvere il problema ed esplicitare le metodologie per il superamento
- Valutare l'esperienza, indicando i punti di forza e i punti di debolezza.

I destinatari sono gli studenti di due classi quarte del Liceo Scientifico dell'Istituto di Istruzione Secondaria Superiore "F. Crispi" di Ribera (AG), precisamente 13 alunni della classe 4A e 15 alunni della classe 4C. La sperimentazione è stata condotta nelle due classi dalla stessa docente (autore dell'articolo), durante il terzo trimestre dell'anno scolastico 2015/2016. Sono state previste per l'attività 5 ore curricolari in ogni classe: 3 ore per le fasi di *Esperienza*, *Comunicazione*, *Analisi e Generalizzazione* e 2 ore per la fase di Applic*a*zione (che non verrà presentata in questo articolo).
L'attività proposta prevede lo sviluppo delle seguenti competenze:

- Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi;
- Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico rappresentandole anche sotto forma grafica.

I principali contenuti disciplinari coinvolti nella sperimentazione sono: i teoremi sui triangoli rettangoli, gli angoli tra rette parallele, la pendenza di una retta e la funzione tangente.
In seguito presentiamo la descrizione delle diverse fasi del ciclo esperienziale.

Problema: La rampa di accesso

Per accedere a un edificio pubblico ci sono 6 gradini alti 16 cm e profondi 30 cm; è necessario costruire una rampa di accesso per carrozzine.
Lo spazio libero di fronte alla base dell'edificio è di 16 m, di cui 4 m per la circolazione pedonale e 12 m per il verde pubblico.
Lungo la parete dell'edificio di fianco alla scala si potrebbe costruire uno scivolo di accesso a due o più rampe. A destra della scala lo spazio disponibile è di 7 m, a sinistra, invece, è di 5m.
La normativa prevede che la massima pendenza (ovvero il rapporto tra lo spostamento verticale e quello orizzontale) delle rampe sia dell'8%.
Quale sarebbe la soluzione ottimale dal punto di vista funzionale e /o estetico? (Vedasi Fig. 2)

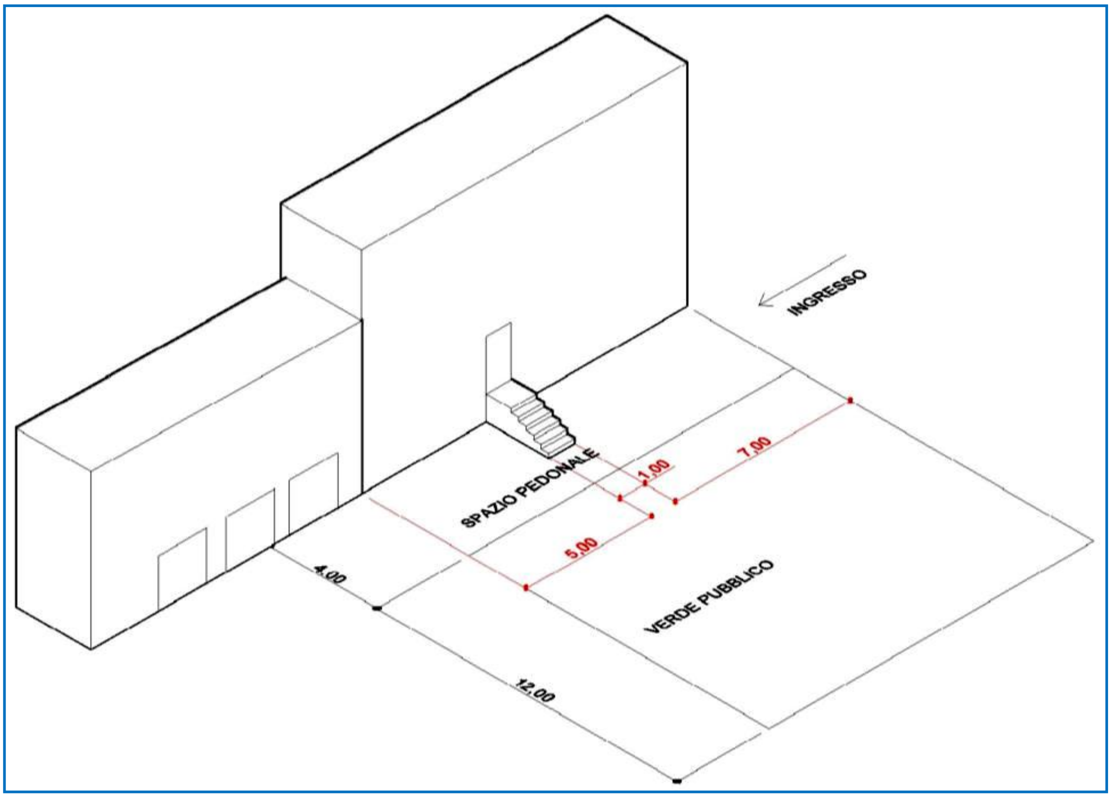

Fig. 2 - Rappresentazione grafica del problema

Esperienza

Inizialmente la docente ha diviso le classi in gruppi di tre alunni e ha scelto, come portavoce di ogni gruppo, l'alunno con il voto più basso in matematica.
In ogni classe i gruppi hanno elaborato possibili soluzioni discutendone animatamente. Le poche domande che hanno formulato all'insegnante erano relative alla presentazione del processo risolutivo:

"Dobbiamo fare anche il disegno?"; "È difficile disegnare in prospettiva, possiamo fare il disegno in pianta?"; "Possiamo presentare il foglio di consegna con il disegno e un foglio a parte con i calcoli?", ecc.

La descrizione delle fasi successive (*Comunicazione*, *Analisi e Generalizzazione*) è realizzata separatamente per ogni classe, per poter effettuare un'analisi più esaustiva e situata del ciclo esperienziale nel contesto sociale di riferimento: la propria classe.

Classe 4C

Comunicazione

Il portavoce di ogni gruppo ha presentato il processo risolutivo e le soluzioni trovate.

- Il *gruppo 5* ha calcolato l'altezza della scala: 0,96 m e ha analizzato due casi.

Il primo caso considerava la costruzione dello scivolo lungo la parete dell'edificio a destra della scala, utilizzando lo spazio disponibile di 7 m. La rampa proposta aveva 0,96 m di altezza e 7 m di lunghezza (spostamento orizzontale). Gli alunni hanno calcolato l'ampiezza dell'angolo acuto alla base dello scivolo che è inferiore a 8° [(2)] (Vedasi Fig. 3).

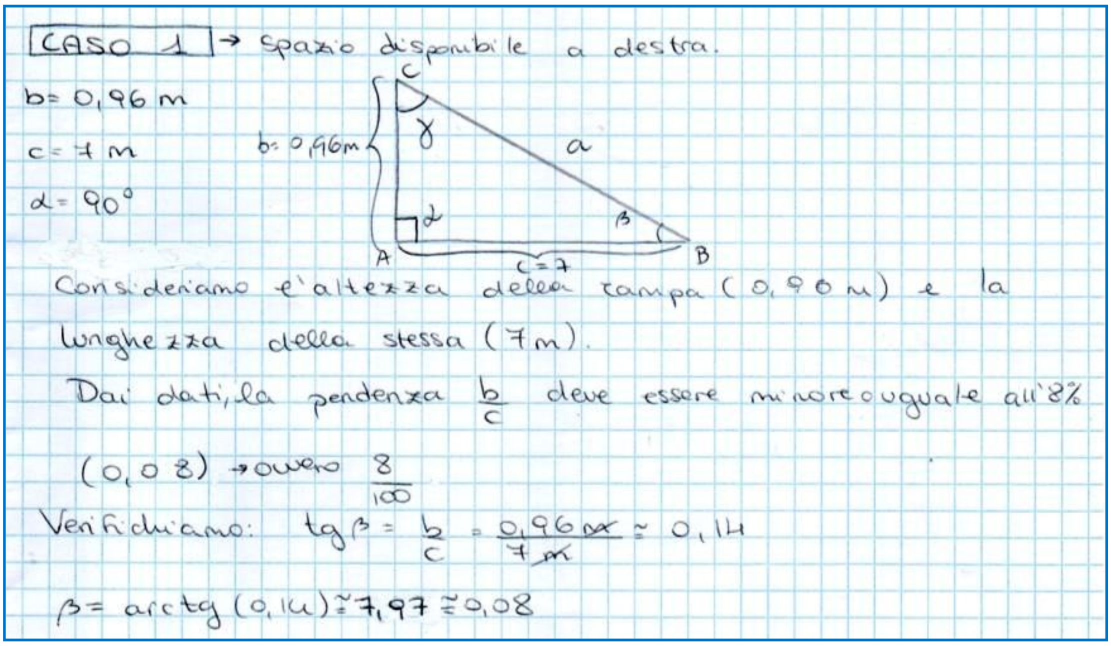

Fig. 3: Risoluzione del problema (1° caso) - Gruppo 5 – 4C

Il secondo caso prevedeva la costruzione della rampa lungo la parete dell'edificio a sinistra della scala, utilizzando lo spazio disponibile di 5 m. Lo scivolo aveva 0,96 m di altezza e 5 m di

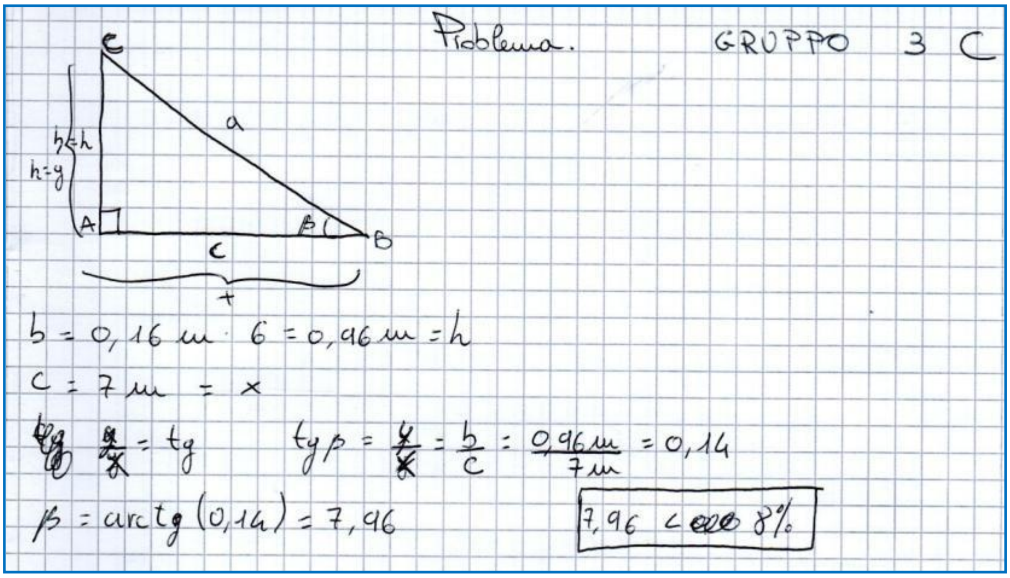

Fig. 4 - Risoluzione del problema (1° caso) - Gruppo 3 – 4C

lunghezza (spostamento orizzontale). I ragazzi hanno trovato l'ampiezza dell'angolo acuto alla base dello scivolo che risultava 10,76°. Siccome la normativa prevedeva una pendenza massima dell'8%, il relatore ha spiegato alla classe che la rampa per le carrozzine si poteva costruire solo a destra della scala.

- Il *gruppo 3* ha analizzato i due casi descritti in precedenza, ma del secondo non ha presentato i calcoli(3) (Vedasi Fig. 4).

Gli alunni hanno anche provato a costruire la rampa con alcune curve, ma l'hanno considerata funzionalmente scomoda per le carrozzine. Quindi il relatore ha concluso l'intervento, considerando che la soluzione più corretta era quella descritta in figura (Fig. 4).

- Il *gruppo 4* ha calcolato l'altezza dello scivolo di 0,96 m e ha applicato la normativa, impostando una disequazione fratta, per determinare la lunghezza minima (spostamento orizzontale) di 12 m. (Vedasi Fig. 5)

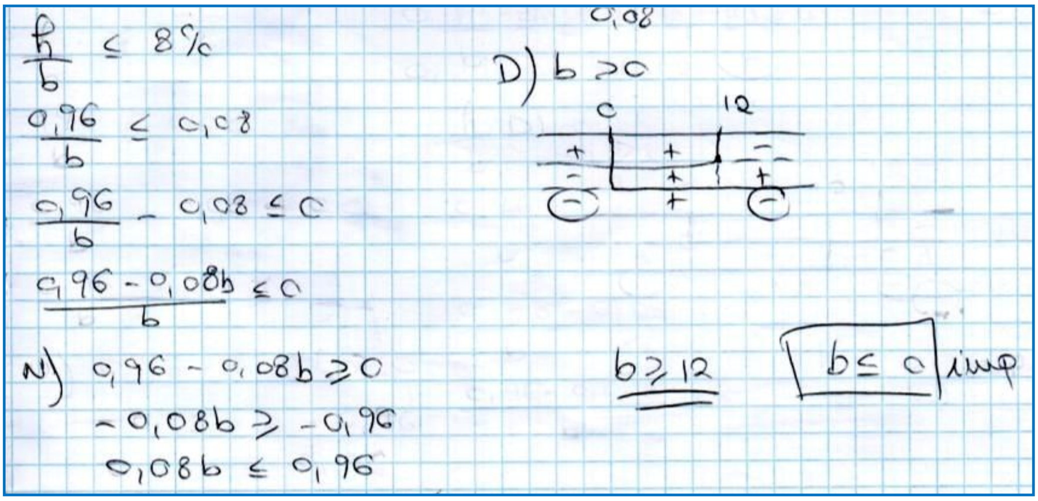

Fig. 5 - Risoluzione della prima parte del problema - Gruppo 4 – 4C

Gli studenti hanno proposto uno scivolo a due rampe perpendicolari: una da 7 m, a destra della

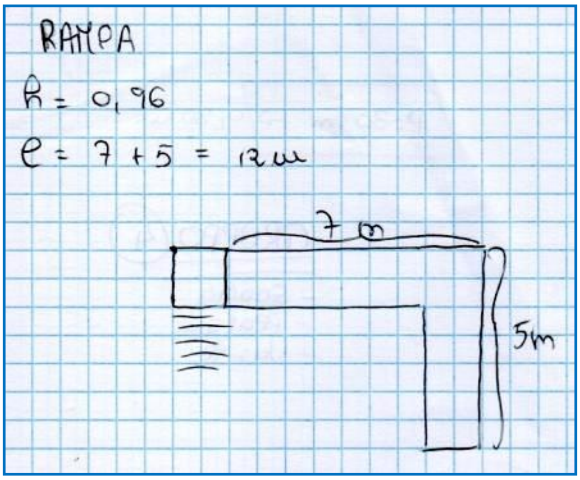

Fig. 6 - Grafico dello scivolo - Gruppo 4 – 4C

scala e lungo la parete, e l'altra da 5m (Vedasi Fig. 6).

- Il *gruppo 2* ha proposto uno scivolo alto 0,96 m e lungo 13 m, a due rampe perpendicolari: una da 7 m, lungo la parete dell'edificio a destra della scala, e l'altra perpendicolare da 6 m. Gli alunni hanno verificato che la pendenza fosse inferiore all'8% (Vedasi Fig. 7)

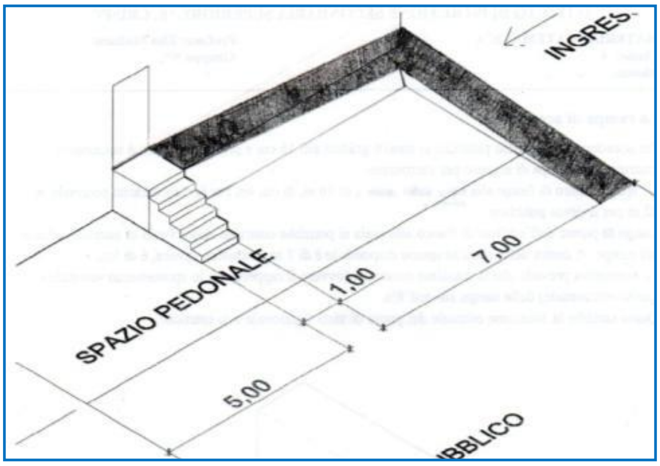

Fig. 7 - Grafico dello scivolo - Gruppo 2 – 4C

- Il gruppo 1 ha calcolato l'altezza dello scivolo: 0,96 m e, applicando la normativa, ha trovato la lunghezza minima (spostamento orizzontale) di 12 m. I ragazzi hanno proposto uno scivolo, lungo la parete a destra della scala, a due rampe parallele: ciascuna alta 0,48 m e lunga 6 m con un pianerottolo da 2 m x 1 m. (Vedasi Fig. 8)

Fig. 8 - Grafico dello scivolo - Gruppo 1 – 4C

Analisi

I disegni con le soluzioni proposte dai cinque gruppi sono rimasti sulla lavagna, seguendo l'ordine di presentazione. Per ogni soluzione la docente ha chiesto alla classe di trovare i punti di forza e i punti di debolezza.

Gli alunni dei gruppi 3 e 5, dopo aver ascoltato i gruppi successivi, si sono accorti di aver confuso il concetto di ampiezza dell'angolo di inclinazione della rampa con quello di pendenza espressa in percentuale. Quindi, le soluzioni proposte non erano corrette.

L'insegnante ha fatto notare la difficoltà, emersa nel processo risolutivo presentato dal gruppo 3, nel nominare le variabili del problema: c e x, h, b e y. Un integrante del gruppo ha evidenziato che, indipendentemente dal nome delle variabili, per la risoluzione del problema era importante la relazione fra b e c (h e c), cateti del triangolo rettangolo che rappresentava la rampa, o fra x e y, coordinate dei punti della retta che riportava l'inclinazione dello scivolo. In tutti due i casi la relazione è la tangente trigonometrica dell'angolo che forma la rampa con un piano orizzontale.

Alcuni studenti hanno segnalato che i gruppi 2 e 4 non avevano affrontato il problema dell'unione delle due rampe perpendicolari e hanno suggerito di creare un pianerottolo di un metro quadrato.

La docente ha chiesto alla classe di analizzare questa possibile soluzione nello scivolo proposto dal gruppo 4. Un alunno del gruppo 1 ha fatto notare che il pianerottolo sottraeva 1 m ad ogni rampa, quindi le rampe da 7 m e 5 m diventavano così da 6 m e 4 m rispettivamente. Di conseguenza dovevano essere aggiunti altri due metri di scivolo. La rampa perpendicolare alla parete diventava lunga 6 m, più 1 m di pianerottolo occupava 7 m, ostacolando completamente l'ingresso. Si rendeva necessario spostare l'ingresso nella zona del verde pubblico.

Gli alunni del gruppo 2, dopo aver ascoltato le riflessioni precedenti, si sono accorti dei propri errori e hanno suggerito di creare un pianerottolo di un metro quadrato e di allungare la seconda rampa di un metro. In questo modo la loro soluzione diventava uguale a quella del gruppo 4, con le stesse problematiche.

L'insegnante ha chiesto alla classe di analizzare la soluzione proposta dal gruppo 1. Ha fatto inoltre notare che la seconda rampa finiva contro la scala e quindi i gradini ostacolavano l'ingresso delle carrozzine. Un alunno del gruppo 1 ha suggerito di creare un secondo pianerottolo di un metro quadrato e di aggiungere una terza rampa di un metro di lunghezza, perpendicolare alle altre due. (Vedasi Fig. 9)

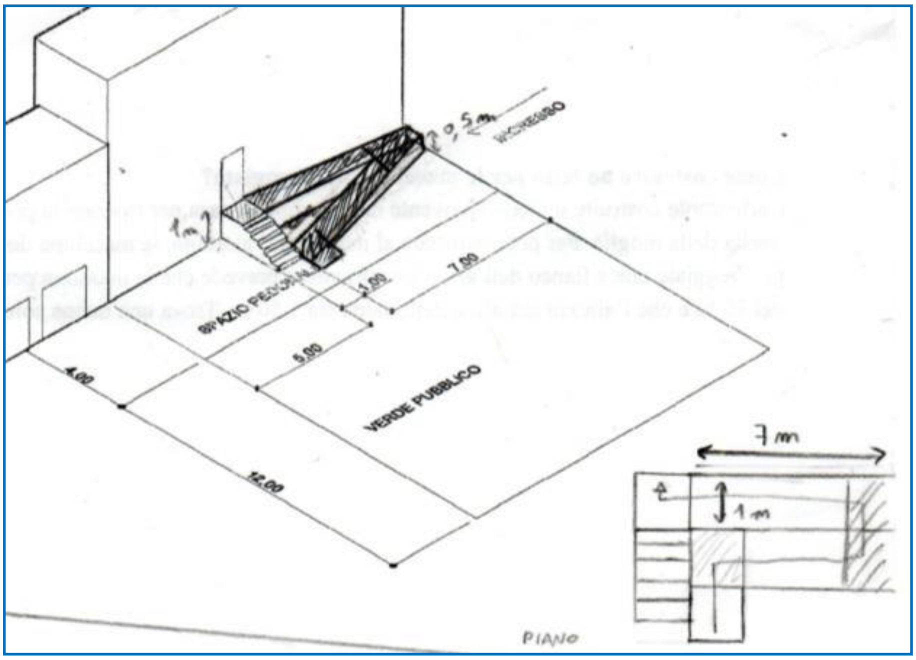

Fig. 9 - Grafico dello scivolo - Gruppo 1 – 4C

Generalizzazione

La docente ha chiesto agli alunni:

"*Secondo voi, quale soluzione risulta ottimale dal punto di vista funzionale e/o estetico?*"

Tutti gli studenti hanno considerato che la soluzione ottimale era quella proposta dal gruppo 1, perché non ostacolava l'ingresso, anche se ridotto da 4 m a 2 m, e perché risparmiava il verde pubblico.

L'insegnante ha ripreso i concetti di tangente di un angolo, pendenza di una retta e pendenza espressa in percentuale, per offrire ulteriori chiarimenti agli alunni che hanno avuto qualche difficoltà nella fase di risoluzione.

La docente ha domandato agli alunni:

"*Se doveste spiegare ad un muratore che la pendenza massima dello scivolo deve essere del 8%, come fareste? Possiamo parlare con il muratore della tangente dell'angolo?*". In questo modo l'insegnante ha spiegato alla classe che: "*La pendenza dell'8% significa che lo scivolo si alza 8 cm ogni 100 cm (ogni metro). Quindi un muratore farà il seguente calcolo: per una altezza di 96 cm, 96 diviso 8 è 12 (96 ÷ 8 = 12), quindi lo scivolo sarà lungo 12 m*".

Successivamente i ragazzi hanno ricavato la regola generale per risolvere problemi di questo tipo, considerando che la pendenza di una retta (o semiretta), anche espressa in percentuale, rappresenta la tangente goniometrica dell'angolo che forma la retta (o semiretta) con il semiasse positivo delle ascisse.

Classe 4A

Comunicazione

Il relatore di ogni gruppo ha presentato il processo risolutivo e le soluzioni trovate.

- Il *gruppo 4* ha calcolato l'altezza e la lunghezza dello scivolo: 0,96 m e 12 m rispettivamente, impostando un sistema di equazioni (Vedasi Fig. 10).

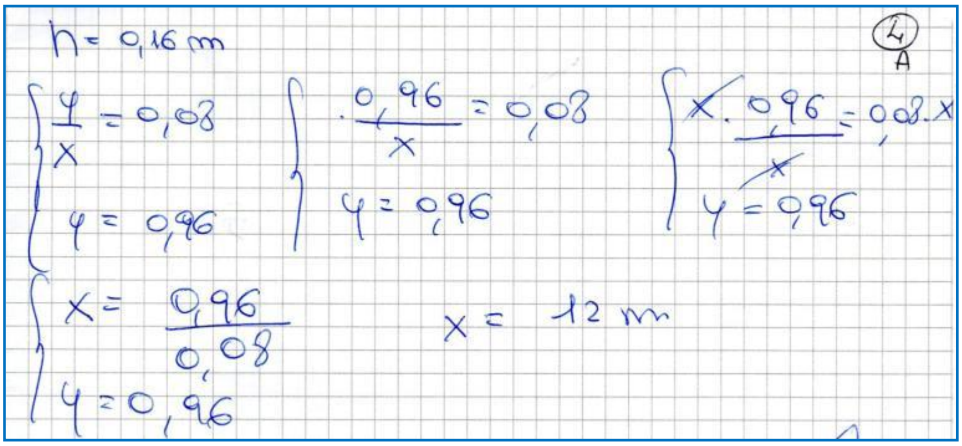

Fig. 10 - Risoluzione prima parte del problema - Gruppo 4 – 4°

Il portavoce ha presentato alcuni calcoli superflui per trovare gli angoli acuti del triangolo rettangolo che rappresenta lo scivolo. Successivamente ha proposto di costruire uno scivolo lungo la parete dell'edificio a destra della scala, a tre rampe parallele lunghe 6 m, 5 m e 1 m, con due pianerottoli da 2 m x 1 m. (Vedasi Fig. 11)

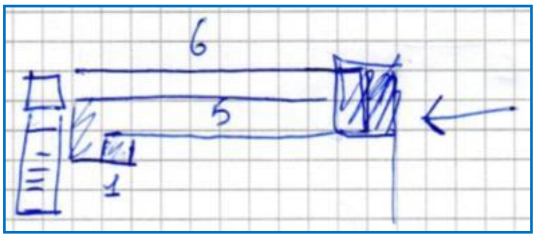

Fig. 11 - Grafico dello scivolo - Gruppo 4 – 4A

- Il <u>*gruppo 1*</u> ha calcolato l'altezza della scala di 0,96 m. Il relatore ha proposto uno scivolo, lungo la parete dell'edificio, a destra della scala, a tre rampe con due pianerottoli da 2 m x 1 m. La prima rampa era alta 48 cm (pari a 3 gradini) e lunga 6 m, con una pendenza dell'8 %; la seconda aveva un'altezza di 32 cm (pari a 2 gradini) e una lunghezza di 5 m, con una pendenza del 6,4 %, e la terza era alta 16 cm (pari a 1 gradino) e lunga 2 m, con una pendenza dell'8 %. (Vedasi Fig. 12)

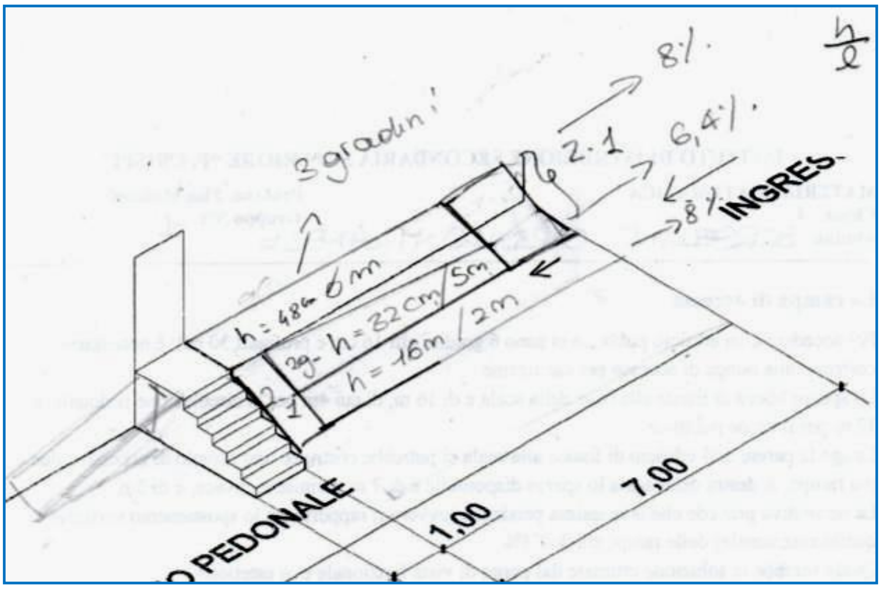

Fig. 12 - Grafico dello scivolo - Gruppo 1 – 4A

- Il gruppo 3 ha trovato l'altezza e la lunghezza dello scivolo e ha proposto la costruzione, sulla parte destra dell'edificio, di cinque rampe perpendicolari fra loro e di cinque pianerottoli. Le rampe avevano: una lunghezza pari a 3 m, 2,50 m, 1 m, 3,50 m e 2 m rispettivamente e una larghezza pari a 1 m in alcuni tratti e 0,50 m in altri. (Vedasi Fig. 13)

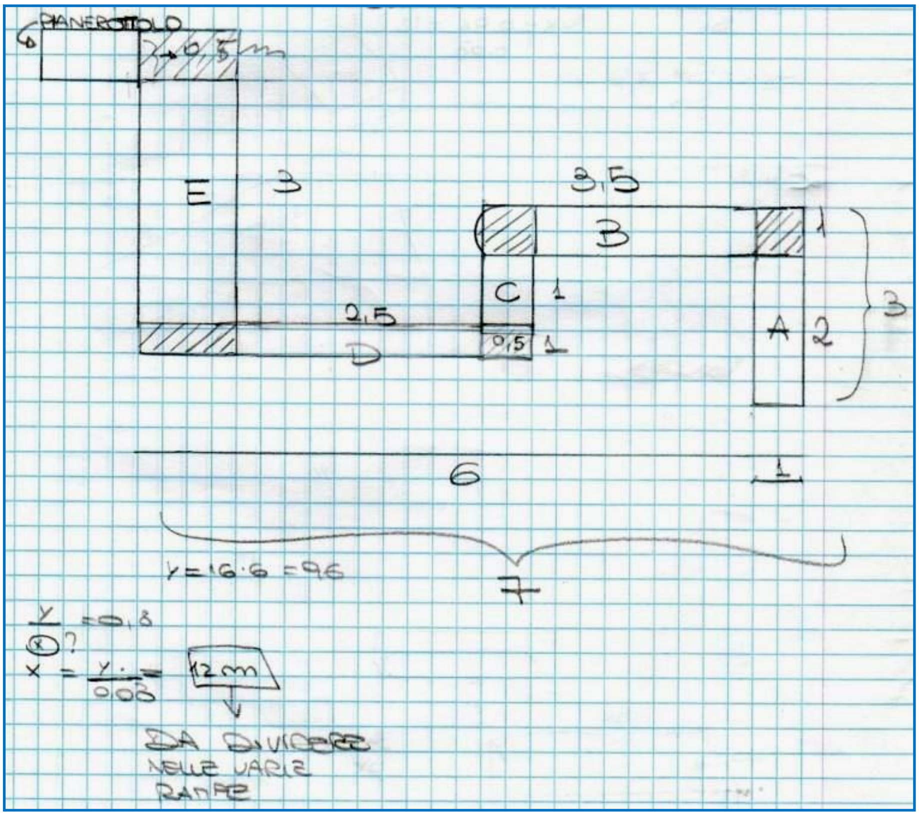

Fig. 13 - Grafico dello scivolo - Gruppo 3 – 4A

- Il *gruppo 2* ha calcolato l'altezza e la lunghezza dello scivolo: 0,96 m e 12 m rispettivamente. Il portavoce ha proposto uno scivolo, lungo la parete dell'edificio a destra della scala, composto da tre rampe da 32 cm di altezza (pari a due gradini) e 4 m di lunghezza, con una pendenza dell'8%. Rispetto all'ingresso dello scivolo, i primi due pianerottoli erano da 2 m x 1 m e l'ultimo pianerottolo, quello adiacente alla scala, era da 1 m x 1 m. (Vedasi Fig. 14)

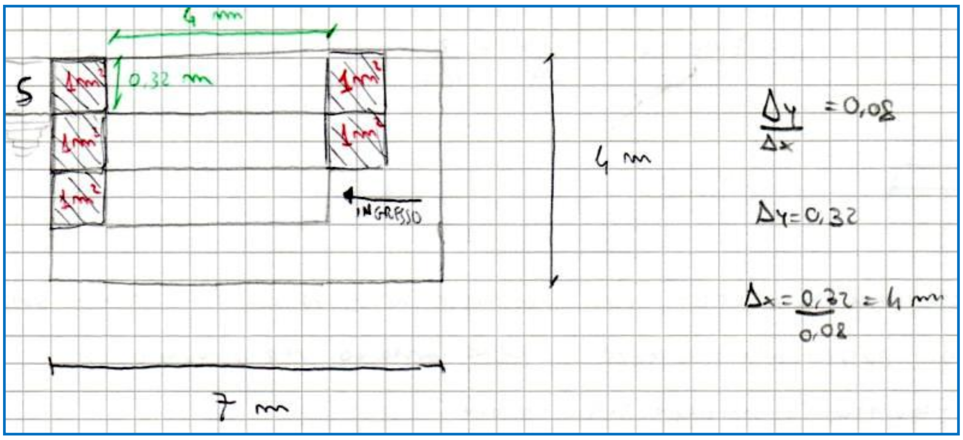

Fig. 14 - Grafico dello scivolo - Gruppo 2 – 4A

Analisi

I disegni con le soluzioni proposte dai quattro gruppi sono rimasti sulla LIM, seguendo l'ordine di presentazione. L'insegnante ha chiesto alla classe di trovare i punti di forza e i punti di debolezza delle soluzioni da loro proposte.

Gli alunni hanno segnalato che tutte le soluzioni rispettavano la normativa sulla pendenza massima; tuttavia la proposta del gruppo 3 presentava qualche problema, perché alcuni pianerottoli, da 50 cm di larghezza, erano troppo stretti per permettere il passaggio di una carrozzina. Qualche alunno ha fatto notare che il pianerottolo e la rampa dovevano avere la stessa larghezza pari a 1m. Con questa modifica le rampe parallele alla parete dell'edificio da 2,50 m e da 3,50m diventavano rispettivamente lunghe 3 m e 4 m, e se a queste misure si aggiungeva ancora la larghezza dell'ingresso di 1 m si arrivava ad una lunghezza complessiva di 8 m. Le rampe perpendicolari all'edificio avevano una dimensione di 5 m. In questo modo, parte dello scivolo (1 m) arrivava sul marciapiede o sulla strada, ostacolando completamente l'ingresso. Quindi la proposta del gruppo 3 non era una buona soluzione.

Gli studenti hanno constatato che le tre soluzioni presentate dai gruppi 1, 2 e 4 avevano caratteristiche simili, in quanto risparmiavano il verde pubblico e non intralciavano completamente l'ingresso.

Generalizzazione

L'insegnante ha chiesto alla classe:

"*Secondo voi, quale soluzione risulta ottimale dal punto di vista funzionale e/o estetico?*"

Gli studenti hanno rilevato che, nelle soluzioni proposte dai gruppi 1 e 4, l'ingresso veniva ridotto da 4 m a 2 m e il corridoio laterale per arrivare alla scala veniva ristretto a 2 m, nella prima parte, e a 1 metro, nella seconda. Nella proposta del gruppo 2, l'ingresso rimaneva invariato, ma il corridoio veniva ridotto a 1 m.

La maggior parte della classe riteneva che la soluzione ottimale era quella proposta dal gruppo 2, perché non modificava l'ingresso.

Allo stesso modo che nella classe 4 C la docente ha domandato agli alunni:

"*Se doveste spiegare ad un muratore che la pendenza massima dello scivolo deve essere del 8%, come fareste? Possiamo parlare con il muratore della tangente dell'angolo?*".

La parte finale della fase di Generalizzazione corrisponde esattamente a quella descritta per la classe 4C.

Applicazione

In questa fase gli alunni delle due classi 4A e 4C dovevano applicare il concetto di pendenza e/o tangente di un angolo ad un nuovo problema reale.

La docente ha proposto la seguente consegna:

Come costruire un tetto per le macchine parcheggiate?

Carlo vuole costruire un tetto spiovente nel giardino di casa per riparare la propria macchina e quella della moglie. Per poter sfruttare al massimo il giardino, le macchine dovrebbero essere parcheggiate una a fianco all'altra. La normativa prevede che la massima pendenza della tettoia sia del 30 % e che l'altezza massima della falda sia di 1,50 m. Trova una buona soluzione per Carlo.

Questo problema ha dato inizio ad un nuovo ciclo esperienziale. La descrizione delle sue diverse fasi potrebbe essere l'obiettivo di un prossimo articolo.

Punti di forza dell'esperienza

- Ogni gruppo ha lavorato con grande entusiasmo, cercando la propria soluzione. Gli alunni con più difficoltà in Matematica sono stati fortemente coinvolti perché erano i relatori dei gruppi. Gli alunni più bravi di ogni gruppo cercavano di dare tutte le spiegazioni possibili al portavoce sulla soluzione trovata, in modo che egli potessi presentare adeguatamente il processo risolutivo durante la fase di *Comunicazione*.
- Le reazioni dei ragazzi nei confronti di questa modalità di lavoro sono state molto positive. Gli studenti hanno chiesto espressamente di poter utilizzare questa metodologia con maggior frequenza.
- Questa esperienza ha permesso agli studenti:
  - Di esprimere la loro creatività nel lavoro di gruppo
  - Di difendere il proprio punto di vista, motivando le scelte effettuate ed elaborando argomentazioni coerenti
  - Di capire e di accettare il punto di vista degli altri
  - Di lavorare in gruppo in modo collaborativo.

Punti di debolezza dell'esperienza

Il portavoce di qualche gruppo non è riuscito a spiegare dettagliatamente il procedimento eseguito e/o la soluzione trovata, quindi i compagni volevano intervenire.
La docente ha fatto notare che solo il relatore del gruppo poteva parlare e ha posto qualche domanda allo studente in difficoltà perché potesse spiegare meglio il processo risolutivo svolto.

Conclusione

Nella classe 4C, durante la fase di *Esperienza*, sono emerse delle difficoltà nel processo di nominalizzazione delle variabili del problema e qualche preconoscenza o misconcezione. Ad esempio, alcuni studenti hanno confuso la nozione di ampiezza di un angolo (inclinazione della rampa) con quella di pendenza espressa in percentuale. Abbiamo anche osservato nelle due classi una certa rappresentazione ingenua sulle "cose del mondo", quello che la Zan (2010) chiama *conoscenza enciclopedica*. Alcuni esempi di idee ingenue: collegare due rampe successive di uno scivolo senza prevedere un pianerottolo; progettare le rampe o i pianerottoli per il passaggio di carrozzine, senza considerare la larghezza standard di una carrozzina (sicuramente maggiore di 50 cm), ecc.

Nella classe 4A non sono emerse misconcezioni e tutte le soluzioni proposte, alcune migliori di altre, rispettavano la normativa.

In questa sperimentazione gli studenti hanno avuto la possibilità di confrontare i diversi processi risolutivi di un problema aperto, di trovare i punti di forza e i punti di debolezza di ogni soluzione e di individuare le "buone soluzione". Per poter compiere queste attività gli alunni hanno dovuto riflettere sui propri modelli interpretativi e sulle proprie strategie operativi adottate per risolvere il problema; in questo modo essi hanno dovuto esercitare le capacità

autoriflessive e autoregolative (Cfr. Trinchero 2012, 2015).
È interessante mettere in evidenza che con questa modalità di lavoro l'apprendimento diventa un processo costruttivo e sociale, perché lo studente costruisce, ricostruisce e/o modifica le proprie rappresentazioni mentali anche attraverso gli scambi e il confronto con gli altri.

I ragazzi hanno focalizzato l'attenzione non tanto sulla soluzione del problema, ma soprattutto sul processo risolutivo, in quanto dovevano: saper spiegare perché avevano risolto il problema proprio in quel modo (fase di *Comunicazione*), ricavare la regola con la quale è possibile affrontare problemi dello stesso tipo (fase di *Generalizzazione*) e applicare quanto appreso ad una nuova situazione (fase di *Applicazione*) (Cfr. Trinchero 2012, 2015).

Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Deposito dei materiali dell'attività

Al seguente link sono depositati eventuali materiali inerenti questo l'articolo. Questi materiali nel tempo potranno essere modificati e arricchiti seguendo l'evoluzione delle idee sottostanti o/e future sperimentazioni svolte dall'autore dell'articolo.

http://www.edimast.it/J/20160202/03390356MA/

Note

1. Una misconcezione è un concetto errato, ma chiamarle errori è troppo semplicistico e banale. Lo studente rivela le proprie misconcezioni quando applica correttamente regole scorrette. Spesso, all'origine di questo fatto c'è una mancata comprensione od un'errata interpretazione. Dunque, le misconcezioni si possono interpretare come concezioni momentanee non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica (D'Amore, 2014).
2. Nell'ultimo passaggio della risoluzione mostrata in Fig. 3 si osserva un errore nell'approssimazione 7,97 ≈ 0,08. Dal ragionamento seguito dagli studenti si evince che essi volessero scrivere 7,97 ≈ 8%. Questa scrittura rappresenta un nuovo errore che verrà affrontato nella fase di Analisi.
3.Nella risoluzione presentata in Fig. 4 gli studenti evidenziano certe difficoltà nel nominare le variabili del problema: la base del triangolo viene chiamata c e x, l'altezza h, b e y. Le lettere b, c e h si utilizzano generalmente nell'ambito della risoluzione di problemi sui triangoli rettangoli o sui triangoli qualsiasi; le variabili x e y si usano soprattutto nel contesto della geometria analitica, per esprimere, ad esempio, l'equazione della retta. Si rileva in questa risoluzione quello che Arzarello et al. (1994), chiamano difficoltà nel processo di nominalizzazione (Cfr. anche Malisani & Spagnolo, 2009).

Bibliografia

Arzarello F., Bazzini L. & Chiappini G., (1994). *L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*. Progetto Strategico CNR – Tecnologie e Innovazioni Didattiche, Quaderno n. 6.

Bolondi G., (2014). Le valutazioni esterne in matematica (prove Invalsi, TIMSS, OCSE-Pisa): utilità, limiti, ricadute. *Atti del Convegno Nazionale "La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire"*. Associazione Asfodelo - Nucleo di Ricerca in Didattica dell'Università di Bologna. Tricase (Lecce), pp. 10-13. Testo disponibile online su Internet http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/818%20Atti%20Tricase%20e%20Prefazione.pdf (verificato accesso in data 31/08/3016).

Comunità europee, (2009). Quadro Europeo dei Titoli e delle Qualifiche (EQF). Brochure italiana, pag. 11. https://ec.europa.eu/ploteus/sites/eac-eqf/files/broch_it.pdf (verificato accesso in data 12/08/2016).

D'Amore B., (2014). La ricerca in didattica della matematica e la sua applicazione concreta in aula. *Atti del Convegno Nazionale "La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire".* Associazione Asfodelo - Nucleo di Ricerca in Didattica dell'Università di Bologna. Tricase (Lecce), pp. 14-17. Testo disponibile online su Internet http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/818%20Atti%20Tricase%20e%20Prefazione.pdf, (verificato accesso in data 31/08/3016).

INVALSI, (2013). OCSE PISA 2012. Sintesi dei risultati per l'Italia. http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012/rappnaz/Sintesi_OCSE_PISA__2012.pdf, (Verificato accesso in data 09/09/2016).

Malisani E. & Spagnolo F., (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: the role of the "variable". *Educational Studies in Mathematics*, 71(1), 19-41. Testo disponibile online su SpringerLink web site: http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-008-9157-x. DOI 10.1007/s10649-008-9157-x. ISBN 0013-1954 (Print) 1573-0816 (Online).

MIUR, (2007). Decreto Ministeriale 139 del 22/08/2007. Regolamento recante norme in materia di adempimento dell'obbligo di istruzione, pag. 4, 18. http://archivio.pubblica.istruzione.it/news/2007/allegati/obbligo_ istruzione07.pdf , (Verificato accesso in data 09/09/2016).

OECD, (2013). PISA. Risultati PISA 2012. https://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-italy-ITA.pdf , (verificato accesso in data 09/09/2016).

Pfeiffer J. W., Ballew A., (1988). *Using Structured Experiences in Human Resource Development*. San Diego, University Associates.

Pfeiffer J. W., Jones, J. E., (1985) (eds.). *A Handbook of structured experiences for human relations training*, Vols. 1-10. San Diego, University Associates.

Trinchero R., (2006). *Valutare l'apprendimento nell'e-learning. Dalle abilità alle competenze*. Trento, Erickson, pp. 195-229.

Trinchero R., (2012). *Costruire, valutare, certificare competenze. Proposte di attività per la scuola*. Milano, Franco Angeli.

Trinchero R., (2015). *Apprendere dall'esperienza per costruire competenza*. Un approccio evidence-based. http://www.edurete.org/ps/sp.asp?id=3 , (Verificato accesso in data 13/08/2016).

Zan, R., (2010). *L'errore in matematica: alcune riflessioni. Materiale del Piano Nazionale Qualità e merito (PQM).* Firenze, INDIRE.

L’ Autrice

Elsa Malisani (PhD)
Istituto di Istruzione Secondaria Superiore “F. Crispi”
Via Presti, 2 – 92016 Ribera (AG)
e.malisani@alice.it
Italia

Laureata in Matematica, ha conseguito nel marzo 2006 il Dottorato di Ricerca in *Didattica della Matematica*. Docente a tempo indeterminato di Matematica e Fisica. Professoressa a contratto nei corsi S.I.S.S.I.S. di Palermo dal 2006 e nei corsi T.F.A. di Palermo ed Enna dal 2013.
Collabora da anni con l’INDIRE (Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa) e con l’INVALSI (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione).
Formatrice accreditata in “Valutazione degli apprendimenti e di sistema” – SNV. Si occupa da anni della formazione dei docenti di livello primario, medio e superiore.
Ha svolto attività di ricerca in Didattica della Matematica presso l’“Instituto Rosario de Investigación en Ciencias de la Educación” (IRICE) di Rosario (Argentina) e il “Gruppo di Ricerca in Didattica della Matematiche” (G.R.I.M.) di Palermo
È autore di numerosi articoli su Didattica della Matematica e ha partecipato a numerosi convegni nazionali e internazionali come relatrice.

Received July 18, 2016; *revised* September 16, 2016; *accepted* October 21, 2016; *published online* November 4, 2016