

Pitag'ORA PRO NOBIS

Ivan Graziani, Stefano Babini

Abstract. “Pitag'ORA PRO NOBIS” comes out from our desire to deal with Pythagoras and the Pythagorean school. We decided to fulfil this project by realizing a workshop in an exciting and unconventional way. We took into account the “Indicazioni Nazionali 2012” with reference respectively to the Pre-school and Primary School curriculum, and to the secondary high school “Assi culturali”.

We decided to treat some particularities of the so-called “arithmo-geometry”, introduced by the Pythagoreans, with the study of algebraic numbers and their characteristics, also figured. We then moved on to some examples of demonstrations of the famous theorem, then started to analyze some peculiarities and regularities contained in Pythagorean triples. For these activities we tried to address these nodes in a different and funny way, alternating, at all levels, the mathematical rigor to moments of imagination and games.

We tried to make a mathematician like Pythagoras nicer. In fact, He's well-know for his most famous theorem but at the same time he's not loved by most students. For this reason, this experience involved first by the pre-school including children of 5 years, and then all classes of the primary school, then the secondary school and finally the secondary high school.

Key words. Verticality, numbers, geometry, Pythagoras.

Sommario. “Pitag'ORA PRO NOBIS” nasce dal nostro desiderio di affrontare Pitagora e la scuola pitagorica in modo laboratoriale e non convenzionale, ma soprattutto divertente. Naturalmente anche in verticale e tenendo conto delle Indicazioni Nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione del 2012 e, per quanto concerne il segmento di istruzione superiore, dei relativi Assi Culturali e Indicazioni.

Abbiamo pensato di affrontare alcune particolarità della cosiddetta “aritmo-geometria”, introdotta dai pitagorici, con lo studio dei numeri figurati e delle loro caratteristiche, anche algebriche. Siamo quindi passati ad esempi di dimostrazioni del famoso teorema, per poi giungere ad analizzare alcune particolarità e regolarità contenute nelle terne pitagoriche.

Anche per queste attività abbiamo cercato di affrontare tali nodi in modo diverso e divertente, alternando a tutti i livelli la rigore matematica alla fantasia e al gioco.

Si è cercato così di rendere maggiormente simpatico un matematico troppo spesso presentato solo per il suo teorema più famoso e per questo non amato dalla maggior parte degli studenti.

Per tale motivo, questa esperienza ha visto coinvolte per prima la scuola dell'infanzia, coi bambini di 5 anni, e successivamente tutte le classi della scuola primaria, quelle della scuola secondaria di I grado e, infine, quelle della secondaria di II grado.

Parole chiave. Verticalità, numeri geometria, Pitagora.

Introduzione

Pitagora viene spesso ricordato a scuola solo per il suo famoso teorema.

Inoltre, per come viene presentato, viene “odiato” forse più della stessa matematica ... (Come dice anche Umberto Eco nelle sue “Interviste impossibili”, edite da Bompiani nel 1975: “... *mi chiedo se per molti altri che ci ascoltano il suo nome non evochi soltanto memorie ingrate: la tavola pitagorica, il teorema di Pitagora ...*”).

In molti casi ci sono eccessi di “pitagorismi” concentrati nel secondo anno di scuola secondaria di primo grado con ripetizioni di problemi tutti uguali e spesso astratti rispetto alla realtà.

Insegnando in due ordini di scuola differenti, abbiamo pensato di affrontare Pitagora a modo nostro, in verticale dalla scuola dell’infanzia alla secondaria di secondo grado, con attività legate non solo al famoso teorema, ma anche ad altre applicazioni note ai pitagorici.

Per tale motivo questo è diventato un Pitagora per noi, ossia pro nobis.

Anche questa è stata un’attività collegata al progetto “*Happy verticality in matematica*”, nato due anni fa per coinvolgere studenti e insegnanti in verticale su alcuni nodi concettuali affrontati in modo divertente e che ha portato anche alla formazione di un gruppo di ricerca in didattica della matematica denominato *Divertical-math*.

Abbiamo quindi presentato Pitagora fin dalla scuola dell’infanzia, giocando con i numeri figurati, triangolari e quadrati, insieme ai bambini. Lo stesso argomento è stato quindi proposto, approfondendolo, ai bambini di tutte le classi della primaria, agli studenti della secondaria di primo grado e a quelli della secondaria di secondo grado.

Abbiamo, inoltre, giocato su alcune caratteristiche particolari della tavola pitagorica e su qualche collegamento particolare tra il teorema di Pitagora, le terne pitagoriche e altre applicazioni matematiche.

Destinatari e tempi

L’attività è stata svolta durante l’anno scolastico 2015/2016 presso le scuole dell’Infanzia, Primaria e Secondaria di primo grado dell’Istituto Comprensivo di Santa Sofia (FC) di Santa Sofia e presso alcune classi del Liceo Economico Sociale “Rambaldi – Valeriani – A. Da Imola” di Imola (BO).

Gli incontri nelle classi della scuola dell’Infanzia e in quelle della Primaria sono stati due di due ore ciascuna insieme all’insegnante della classe. Nelle Scuole secondarie di primo e secondo grado sono state effettuate cinque lezioni di due ore ciascuna.

Attività e sperimentazione

I numeri figurati

Alla Scuola dell’Infanzia abbiamo iniziato, insieme alla maestra, a chiedere ai bambini di 5 anni cosa fosse secondo loro la matematica (D’Amore, 2001; Lombardo Radice, 2004) e che cosa facesse un matematico, ottenendo varie risposte alcune delle quali un po’ spiazzanti, tipo “*il matematico lavora in banca*” o la “*matematica serve per scrivere*”.

Dopo aver chiarito qualche dubbio dei bambini, siamo passati a raccontare un po’ la storia di Pitagora e della sua Scuola, mostrando anche l’immagine del “bel” signore che faceva il

“matematico”.

Abbiamo quindi chiesto loro quali numeri e quali figure geometriche conoscevano, aiutandoci anche con le forme che ci ha dato la maestra.

Dopo abbiamo affrontato, come attività-gioco, i numeri figurati, utilizzando della pasta alimentare colorata (i “ditalini”) per costruire numeri triangolari e quadrati anche con l’aiuto delle forme triangolari e quadrate (Fig. 1).



Fig. 1 – bambini all’opera nella costruzione di figure con la pasta colorata



Fig. 2 – i numeri figurati

I bambini hanno realizzato con relativa facilità i diversi numeri fino a 10 per i “triangolari” e fino a 9 per quelli “quadrati”. Alcuni di loro hanno provato a spingersi oltre, soprattutto con i numeri triangolari (Fig. 2).

I bambini hanno apprezzato questo loro primo incontro con i numeri di Pitagora.

Hanno poi incollato la pasta su fogli bianchi con la colla vinilica, tanto cara al “Mucciaccia di Art Attack” e alla fine dell’attività hanno incollato i loro lavori più significativi su un cartellone, con la maestra, per ricordare la giornata dedicata ai numeri figurati (Fig. 3).

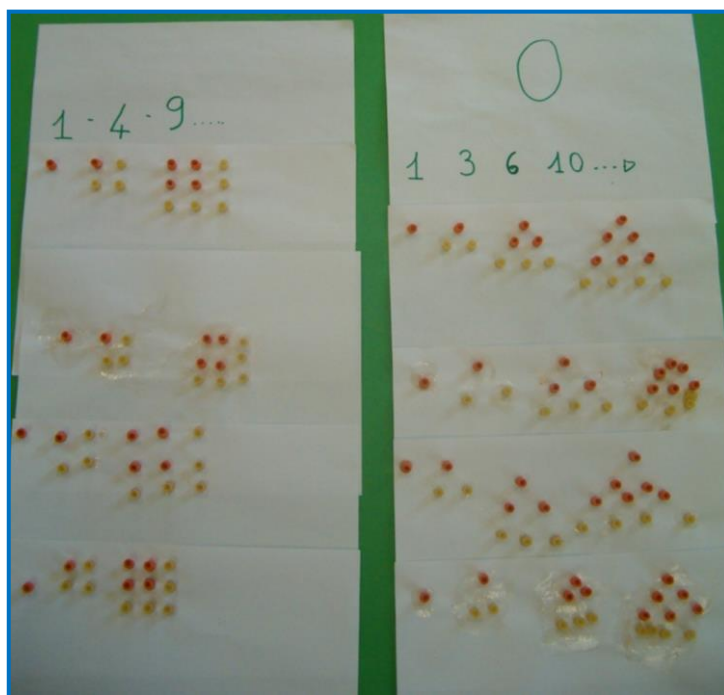


Fig. 3 – Il cartellone

Per il livello di scuola è stato un approccio più che soddisfacente.

Abbiamo poi ripreso i numeri figurati nelle classi prime e seconde della scuola primaria facendo realizzare questi particolari numeri sul foglio di carta con la penna (Simonetti, 1995).

Nella prima parte però abbiamo ripercorso alcuni aspetti della storia della scuola pitagorica, soffermandoci brevemente sul simbolo della Scuola e sul celebre motto “tutto è numero”.

Abbiamo poi introdotto l’aritmo geometria e i numeri figurati, partendo da quelli triangolari, soffermandoci sulle particolarità che osservavano i bambini e provando a generalizzare alla lavagna (Fig. 4).

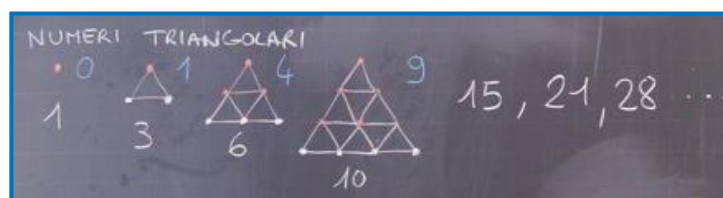


Fig. 4 – Numeri triangolari

Siamo poi passati ai numeri quadrati e abbiamo chiesto ai bambini cosa notassero di particolare (Fig. 5).

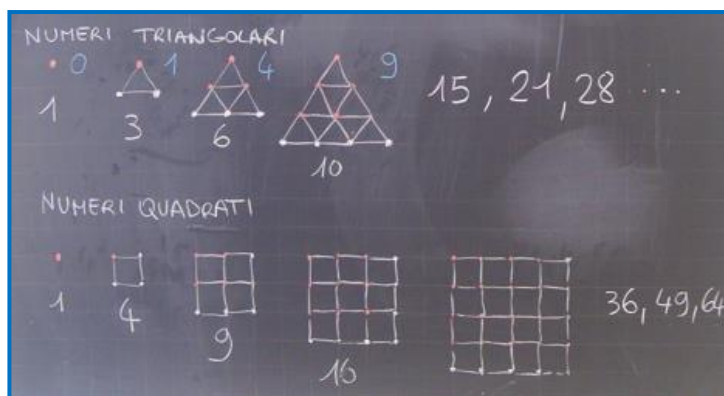


Figura 5 – Numeri quadrati

Si sono alternate osservazioni particolarmente acute sulle similitudini tra i due sistemi e altre un po' più bizzarre, legate all'età dei "nostri scolari", come quella di Nicola che ha detto che "i numeri triangolari sono il tetto di quelli quadrati".

Irene e Andrea hanno notato che "il numero di triangolini realizzati nei numeri triangolari è uguale ai numeri quadrati".

Riccardo e Gianluca hanno notato che "il numero di quadratini dei numeri quadrati è uguale al numero quadrato precedente".

Anche nella classe terza siamo partiti dalla storia dei pitagorici (Agostino, 2002) e poi siamo passati ai numeri figurati, però abbiamo insistito maggiormente sull'abilità di argomentare relativamente alle regolarità e alle caratteristiche particolari di questi numeri.

Ilaria ha notato le differenze tra i numeri e li ha collegati indicando quanto doveva "aggiungere ai numeri per ottenere il numero successivo" (Fig. 6).

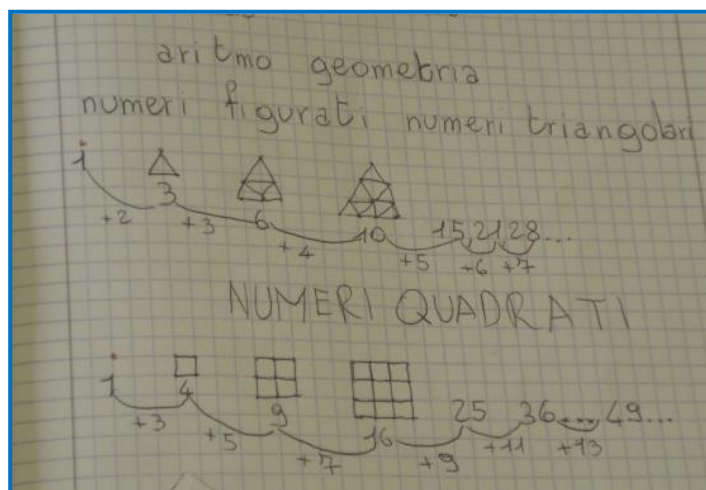


Figura 6 – Regola generatrice dei numeri triangolari e quadrati

Matteo ha notato che per i numeri triangolari si può fare questa sequenza:

$$“1 + 0 = 1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \dots \text{e così via}”.$$

Sofia è stata particolarmente brava ed è arrivata con i numeri triangolari fino a 120 (15° numero triangolare). Tutti i bambini sono arrivati a fare la sequenza dei numeri quadrati fino a 100 (10° numero quadrato).

Martina ha osservato che i numeri quadrati sono il prodotto di “un numero per se stesso”.

Ilaria ha detto che “il numero dei triangolini è uguale ai numeri quadrati” (Fig. 7).

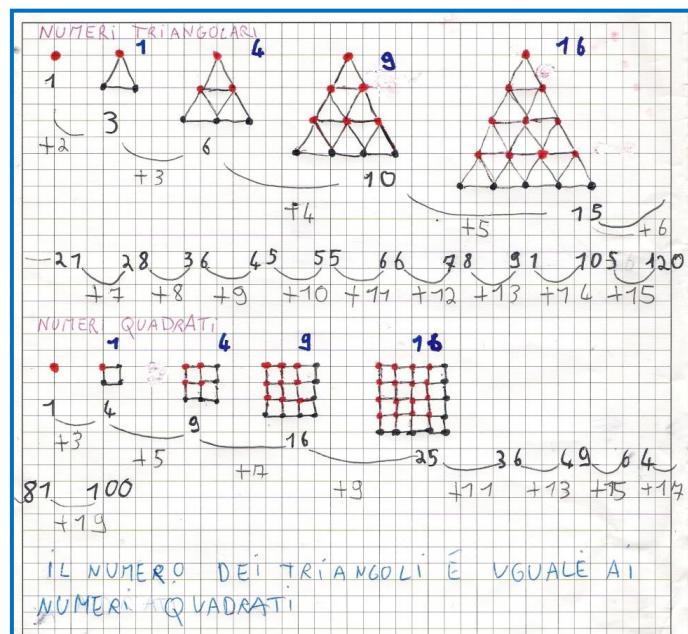


Fig. 7 – Relazione tra i numeri triangolari e i quadrati

In quarta e quinta primaria, avendo i bambini già affrontato le potenze e le superfici (Lang, 1991), abbiamo potuto alzare un po’ il tiro sia nella storia che nelle attività.

La nostra storia del simbolo della scuola è potuta partire dal pentagono e dalle sue diagonali. Il motto “*tutto è numero*” è stato affrontato con bambini che conoscevano già le frazioni e le potenze e quindi abbiamo parlato anche dei “problemi” determinati dalla radice di 2 e di Ippaso da Metaponto.

Nell’attività sui numeri figurati i bambini hanno fatto osservazioni più consapevoli sulle similitudini tra numeri triangolari e quadrati, seppure in modi diversi (Fig. 8a e Fig. 8b).

Inoltre, alcuni di loro hanno subito notato la particolarità dei numeri quadrati di essere dei quadrati perfetti e quindi, come ha detto Alessia:

“*Possiamo prevedere qualsiasi numero quadrato elevando alla seconda il numero dell’ordine*”, in pratica “se voglio l’ottavo numero, basta fare $8^2 = 64$ ”.

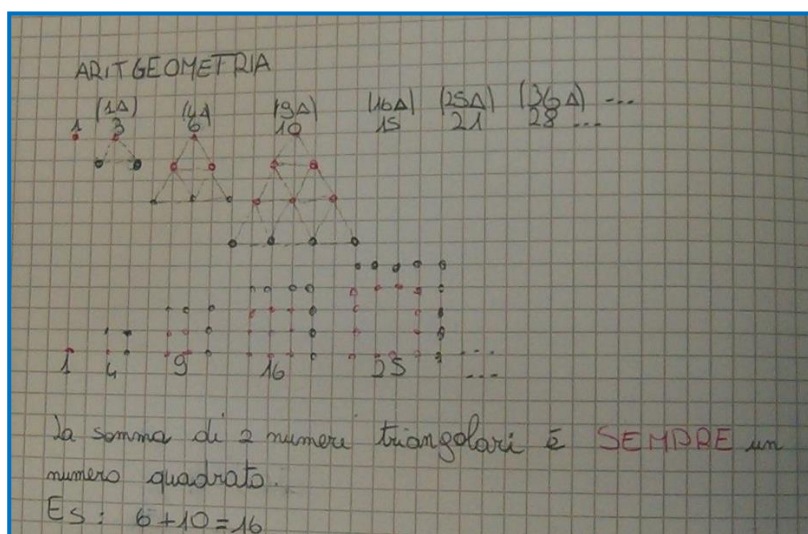


Fig. 8a – Numeri quadrati e quadrati perfetti

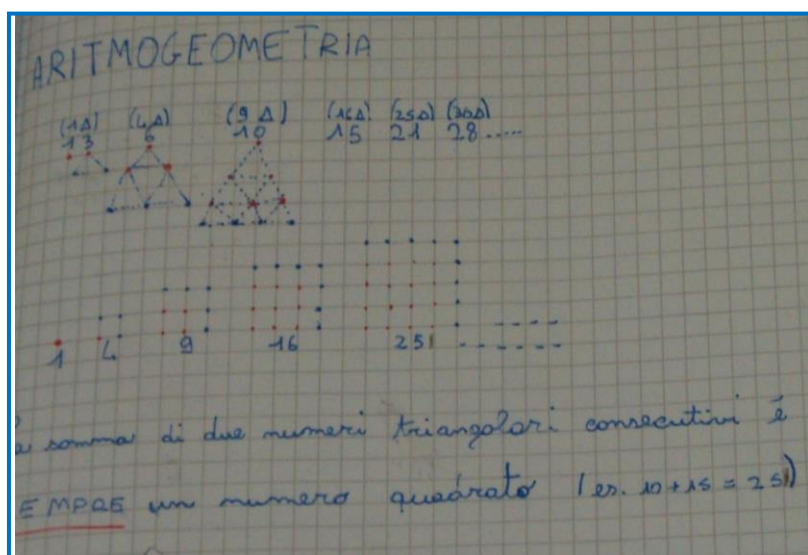


Fig. 8b – Numeri quadrati e quadrati perfetti

L'attività svolta nelle classi prima e seconda della secondaria di primo grado è stata effettuata nel primo periodo dell'anno scolastico, insieme ai numeri naturali e ai numeri razionali.

Siamo sempre partiti dalla storia di Pitagora (Guedj, 2000), dal periodo in cui è vissuto, dalla sua Scuola e dal suo simbolo, che ci ha permesso di svolgere un'ulteriore attività nella classe prima sui segmenti.

Da alcune immagini del passato abbiamo anche potuto scoprire sia gli interessi sia l'importanza del grande Pitagora (Fig. 9a e Fig. 9b).

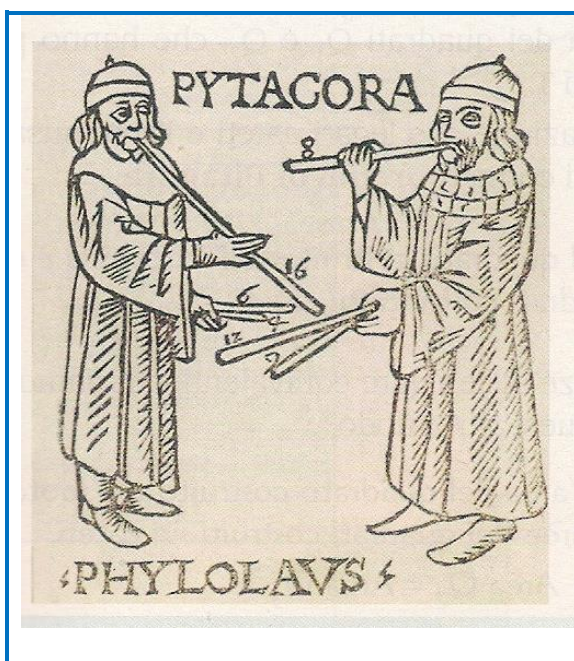


Fig. 9a



Fig. 9b

I numeri figurati sia triangolari che quadrati sono stati costruiti insieme ai ragazzi, sia sui quaderni che sulla lavagna LIM. I ragazzi dovevano poi trovare quali fossero le analogie tra i due tipi di numeri e le particolarità sia dei numeri triangolari che di quelli quadrati.

Giorgia e Vittoria hanno scritto che “da un numero triangolare al successivo si aggiunge un pallino in più del precedente” (Fig. 10).



Fig. 10 – Giorgia e Vittoria

Rocco ha scritto che “il numero quadrato è uguale al numero di triangolini contenuti in quelli triangolari” (Fig. 11).

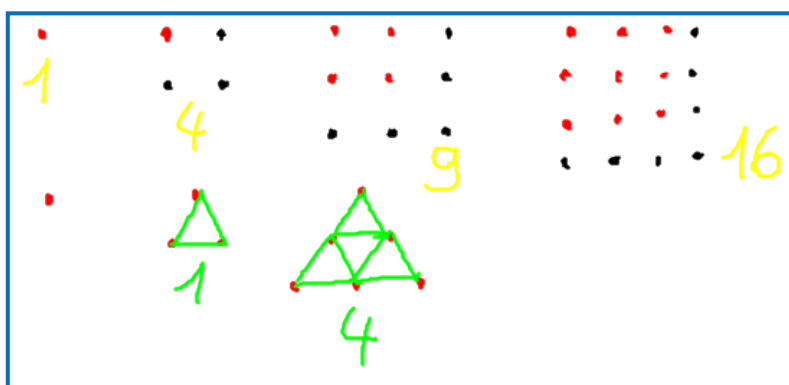


Fig. 11 – Il disegno di Rocco

Andrea ha scritto che “i numeri quadrati sono quelli che posso esprimere come prodotto di due numeri uguali, cioè come quadrato di un numero”.

Alice e Sara hanno detto che “i numeri quadrati sono sempre il quadrato di un numero”.

Guido e Matteo hanno detto che “da un numero quadrato al successivo si aggiungono sempre due pallini in più rispetto a quanto aggiunto al precedente”.

Stefano e Marina hanno notato che “la differenza tra due numeri quadrati successivi è sempre un numero dispari e questo accade anche per la somma di due numeri quadrati successivi”.

$$\text{Es.: } 9 - 4 = 5 \quad 36 - 25 = 11 \quad 9 + 16 = 25 \quad 36 + 49 = 85$$

Alessandro ha detto che “il numero di triangolini e di quadratini che si formano nei due tipi di numeri sono uguali”

Mattia ha detto che i numeri quadrati si ottengono “Sommando successivamente i numeri dispari”.

In seconda abbiamo incontrato anche i numeri rettangolari ed esagonali.

Siamo partiti da quelli rettangolari (Fig. 12) e abbiamo chiesto: “Cosa notate di particolare?”

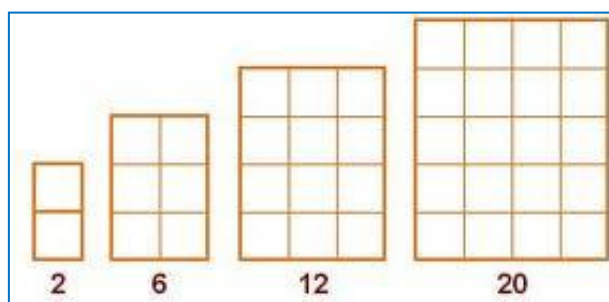


Fig. 12 – Numeri rettangolari

Andrea ha detto:

“Sono sempre numeri pari”.

Abbiamo chiesto allora:

“Perché sarà sempre così?”.

Marina ha risposto:

“Perché uno dei due fattori sarà sempre un numero pari”.

Abbiamo poi domandato:

“Quale relazione trovate tra i numeri rettangolari e quelli triangolari?”.

Matteo ha detto:

“Quelli rettangolari si ottengono sommandone due triangolari uguali”.

Paolo ha aggiunto:

“Allora possiamo dire che sono il doppio dei numeri triangolari, infatti i primi numeri triangolari sono 1 – 3 – 6 – 10”.

Mohamed ha detto:

“Le basi sono i numeri naturali che crescono”.

I numeri esagonali che sono i più difficili da realizzare li abbiamo costruiti insieme in laboratorio con GeoGebra (Fig. 13).

La domanda è stata la solita:

“Cosa osservate?”.

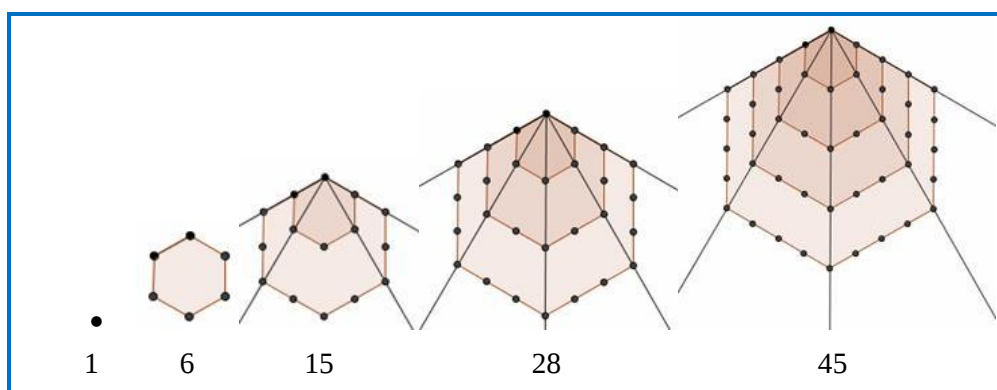


Fig. 13 – Numeri esagonali

Qui rispondere è stato più difficile. Hanno provato a vedere se ci fosse una regolarità nel passaggio tra un numero e il successivo. Dopo un po', Matteo ha detto: “Si aumenta prima di 5 e poi si aggiunge sempre 4... infatti + 5, poi + 9, + 13, + 17 e dopo sarà + 21 e così via”.

Ho quindi mostrato anche un numero esagonale centrato e la relativa sequenza (Fig. 14).

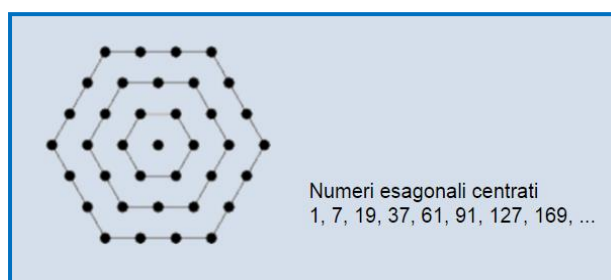


Fig. 14 – Numeri esagonali centrati

Marina ha detto subito:

“Qui è più facile, perché si aumenta sempre di 6 e dei suoi multipli”.

Nella classe terza abbiamo incontrato Pitagora in un'attività di approccio al linguaggio algebrico legata ai numeri figurati. L'abbiamo chiamata “Numeri figurati e inizio di algebra”.

L'attività è stata svolta con gruppi di 4-5 ragazzi, ai quali è stato consegnato un compito svolgibile anche con l'ausilio del computer.

Il compito consisteva nel trovare una formula per determinare l'ennesimo numero figurato (triangolare, quadrato, pentagonale, esagonale e rettangolare) in funzione della posizione occupata.

In questo caso abbiamo introdotto anche il numero pentagonale, che risulta un po' troppo complesso da realizzare per le classi inferiori.

I lavori più significativi sono venuti da due gruppi che nel tempo assegnato di due ore hanno trovato le formule di tutti i numeri richiesti. (Fig. 15a e Fig. 15b)

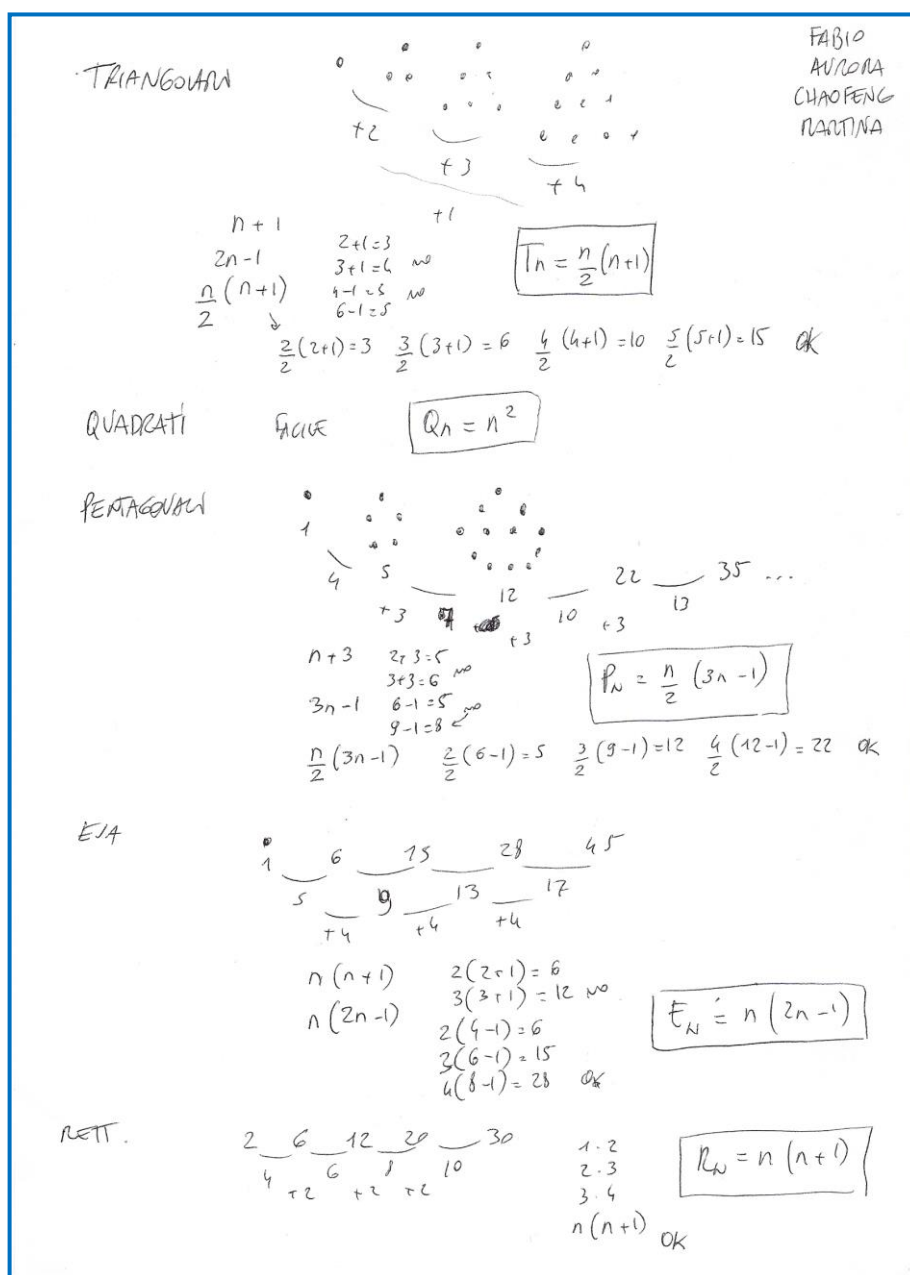


Fig. 15a – Numeri figurati e inizio di algebra – gruppo n. 1

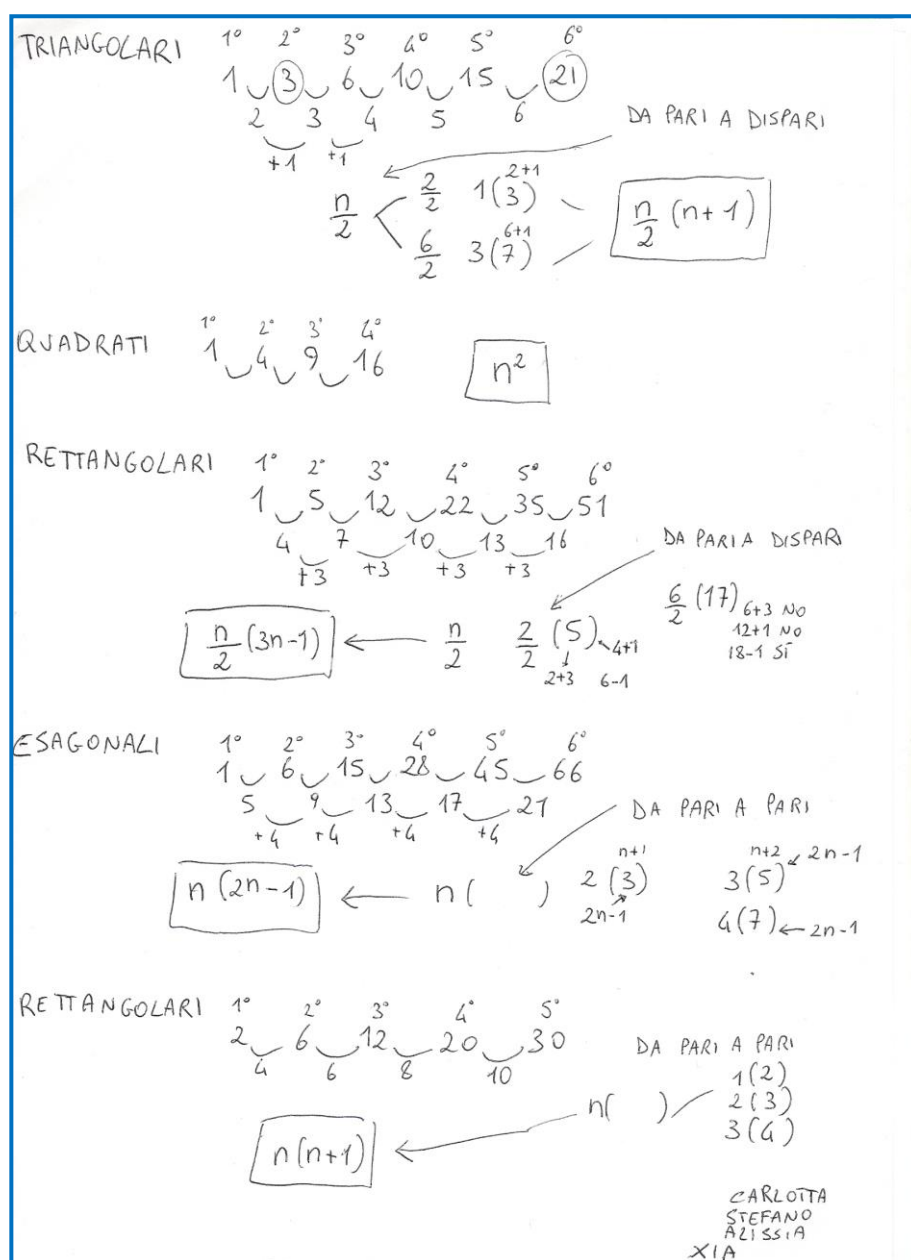


Fig. 15b – Numeri figurati e inizio di algebra – gruppo n. 2

Un gruppo ha anche esteso il compito effettuando con GeoGebra una rappresentazione grafica dei numeri figurati, verificando tra essi la presenza di due rami di parabola.

Nella classe seconda del liceo economico sociale di Imola, relativamente a Pitagora abbiamo toccato tre macro aree:

- Le funzioni
- La geometria Euclidea
- La geometria nel piano cartesiano

Nella prima parte, per quanto riguarda le funzioni, introdotte già nella classe prima, abbiamo considerato la sequenza rappresentata nella figura (Fig. 16a) di seguito riportata.

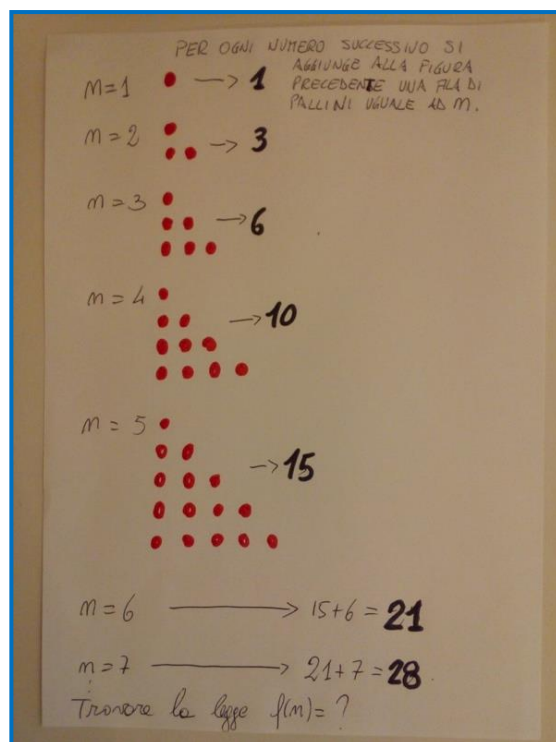


Fig. 16a – Introduzione alle funzioni

Abbiamo poi diviso la classe in 8 gruppi e assegnato loro il seguente compito:

“Trovate la legge che collega il numero n al totale dei ‘pallini’ nei vari casi”

(tempo assegnato 20 minuti).

Un gruppo al termine del tempo assegnato ha trovato la legge $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Abbiamo poi concluso che la sequenza individuata dal numero dei pallini (1; 3; 6; 10; 15; ...) rappresenta i numeri triangolari e la legge che ci permette di trovarli:

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Qualche studente ha anche ricordato di aver già incontrato i numeri triangolari nella scuola secondaria di primo grado.

Nella seconda parte abbiamo rappresentato la funzione precedente $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ che ha come *dominio* l'insieme dei numeri naturali nel piano cartesiano e abbiamo ottenuto un grafico (Fig.16b).

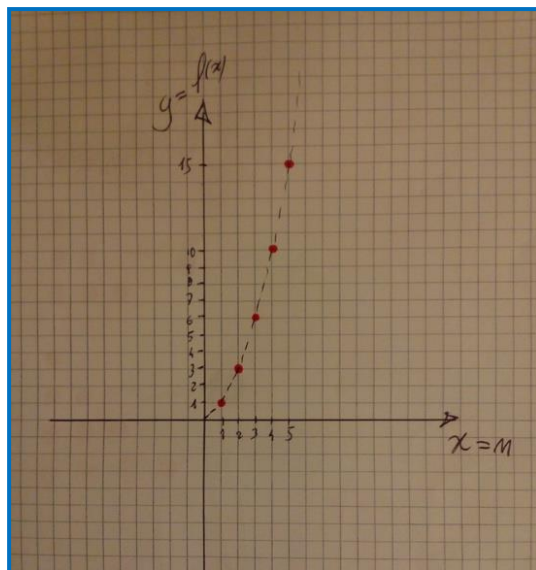


Fig. 16a – Introduzione alle funzioni

I ragazzi hanno osservato che si potevano unire i punti del grafico con una curva ottenendo così una parte di parabola.

Il Teorema

Del Teorema di Pitagora, con differenti approcci, abbiamo iniziato a parlare dalla seconda classe della scuola Primaria.

Abbiamo consegnato ad ogni bambino 8 triangolini rettangoli quadrettati con dimensioni 3, 4 e 5 e tre quadrati quadrettati con lati di 3, 4 e 5.



Fig. 17a



Fig. 17b

Abbiamo poi chiesto ai bambini di provare a costruire con quei pezzetti, suddivisi in due gruppi (uno con i 2 quadrati di lato 3 e 4 e quattro dei triangolini e l'altro con il quadrato di lato 5 e i restanti quattro triangolini), due quadrati "grandi" uguali.

Andrea e Irene sono stati molto veloci e in meno di 3 minuti hanno composto i due quadrati (Fig. 17a e Fig. 17b).

Con qualche minuto in più, anche tutti gli altri bambini sono riusciti a costruire le due figure richieste (Fig. 18).

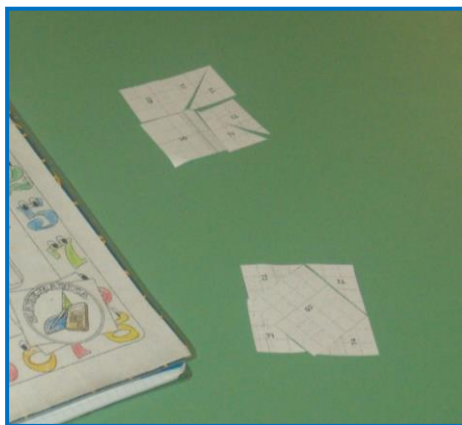


Fig. 18 – Costruzione del quadrato

Abbiamo quindi chiesto; *“Notate qualcosa di particolare in comune tra le due figure appena costruite?”*.

Tutti i bambini hanno osservato che entrambi i quadrati avevano al loro interno 4 triangoli.

Poi Irene ha detto che *“i due quadrati più piccoli sono grandi quanto quello più grande”*. Riccardo, invece, ha detto: *“Occupano lo stesso spazio”*. E questo, non avendo loro fatto ancora le aree, ci basta sicuramente!

Anche nella classe terza, siamo partiti alla costruzione dei quadrati con gli 8 triangolini rettangoli e i 3 quadrati coi lati di 3, 4 e 5 unità.

La più veloce è stata Martina che ha impiegato circa 3 minuti a costruire entrambi i quadrati.

Abbiamo posto la stessa domanda fatta alla classe seconda e Matteo ha notato subito che i due quadrati erano uguali.

Sofia ha detto:

“se tolgo i 4 triangoli per parte mi rimangono 1 quadratone e due quadratini che sono uguali”.

Francesco ha detto che *“è come la proprietà invariante ...”*.

Tutti hanno detto che si sono divertiti e Francesca ha aggiunto che *“le è piaciuto Pitagora, bellissima la sua storia che è vissuto 2600 anni fa ...”*.

Con le classi quarta e quinta abbiamo osato un po' di più con le domande, considerato che i bambini conoscevano già le aree e le potenze.

Anche dalla ricostruzione dei due quadrati uguali con i triangoli rettangoli e i tre quadrati, sono

emerse delle osservazioni interessanti e Letizia ha osservato che *“Il triangolo ha i tre lati che coincidono con i lati dei tre quadrati”*.

A quel punto abbiamo “estratto dal cilindro” altri triangoli rettangoli con lati differenti e diversi quadrati chiedendo ai bambini di associare ai triangoli i quadrati corrispondenti.

Abbiamo poi chiesto di osservare i numeri dei quadratini all’interno delle diverse figure e di dirci cosa ci fosse di particolare.

Alessia e Enrico hanno scritto *“I numeri dei quadratini sulle terne di quadrati sono corrispondenti ai lati dei triangoli rettangoli”* (Fig. 19a e Fig. 19b).

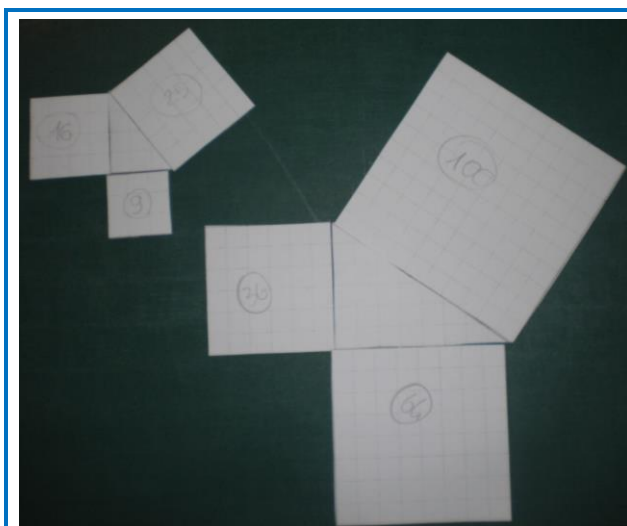


Fig. 19a

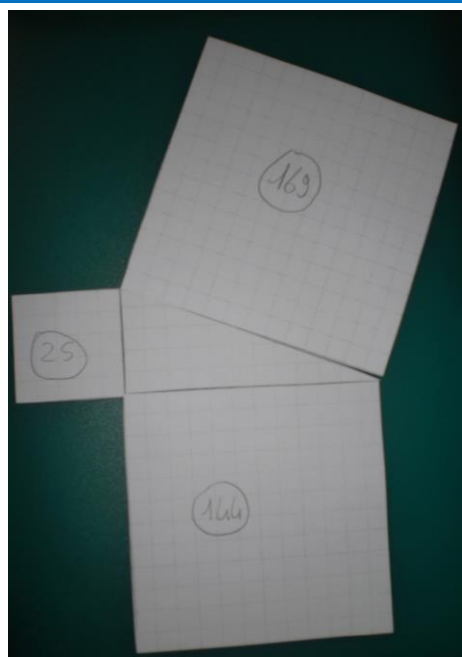


Fig. 19b

Arturo, Federico e Luca hanno poi constatato che *“la somma dei due numeri che corrispondono ai quadrati più piccoli”* di ogni terna *“dà come risultato il numero del quadrato più grande”*.

Letizia ha notato che *“le aree dei due quadrati più piccoli sono uguali al quadrato più grande”*.

Pitagora potrebbe anche essere moderatamente soddisfatto e anche i bambini lo erano.

Nella classe prima della scuola Secondaria abbiamo ripetuto l’attività svolta nelle classi terminali della primaria, soffermandoci maggiormente sulle abilità di argomentare (D’Amore, 2001; Salciccia, 2003) e quindi, dopo che avevano fatto la consueta attività con i tre quadrati e gli otto triangolini, abbiamo chiesto ai ragazzi: *“Provate a spiegare a un vostro compagno cosa c’è di particolare in questi due quadrati uguali.”*

Nicole ha detto: *“Nei due quadrati realizzati si nota che nel primo ci sono 4 triangoli e un quadrato e nel secondo ci sono ancora quattro triangoli, ma due quadrati diversi tra loro e più piccoli dell’altro. Questo vuol dire che il quadrato più grande è uguale agli altri due insieme”*.

Francesco ha detto: *“Questi due quadrati sono formati ciascuno da quattro triangolini uguali tra loro, mentre la restante parte è data in un quadrato dal quadrato più grande mentre nell’altro dai due quadrati più piccoli. Questo vuol dire che l’area del quadrato più grande*

corrisponde alla somma delle aree degli altri due". Il concetto di area era stato appreso nella scuola primaria, ma questa argomentazione ci è sembrata la più corretta.

Anche per la seconda attività, quella con triangoli e quadrati diversi da abbinare tra loro (Fig. 19a e Fig. 19b), abbiamo chiesto di argomentare: *"Spiegate, aiutandovi anche con la carta quadrettata, cosa lega tra loro i tre quadrati che avete abbinato ai triangoli"*.

Mattia ha affermato: *"Se confronto le aree dei tre quadrati noto che in tutti i casi la somma delle aree dei due quadrati più piccoli dà come risultato l'area del quadrato più grande: come 9 più 16 fa 25 e anche 25 più 144 fa 169"*. Il nostro piccolo pitagorico ha già posto le basi per il noto Teorema.

Nella classe prima della secondaria di primo grado, parlando di angoli, e in particolare di angoli retti, abbiamo chiesto ai ragazzi di costruire un triangolo rettangolo utilizzando il Geomag e, dopo alcuni tentativi, il risultato delle loro fatiche ha portato a costruire un triangolo con i lati dati da tre, quattro e cinque pezzetti (Fig. 20).

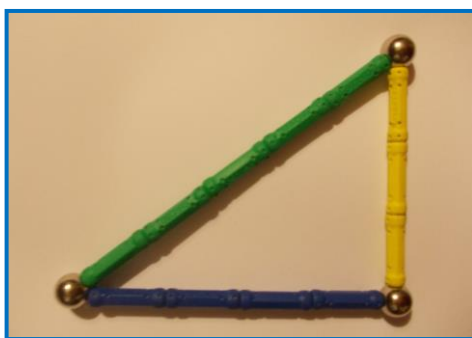


Fig. 20 – Costruzione con Geomag

Nella classe seconda della scuola secondaria siamo partiti, come sempre, da un po' di storia di Pitagora e dei pitagorici e, in particolare abbiamo mostrato un francobollo commemorativo della Grecia (Fig. 21).



Fig. 21 – Francobollo commemorativo

Dal semplice conteggio del numero degli scacchi delle tre scacchiere del francobollo, abbiamo chiesto ai ragazzi cosa notassero.

Marco e Nicolò hanno notato che il triangolo rettangolo non era “disegnato correttamente” (abitudinari!).

È stato spiegato il significato della parola ipotenusa e che il “consueto” disegno è fatto in quel modo solo perché è più semplice rappresentare e costruire l’angolo retto.

Comunque tutti hanno trovato, chi prima chi dopo, la relazione di somma tra i due quadrati più piccoli e quello più grande.

Da qui siamo passati al disegno con carta millimetrata e matita, utilizzando anche, per facilitare il lavoro, la posizione “consueta” del triangolo rettangolo (Fig. 22).

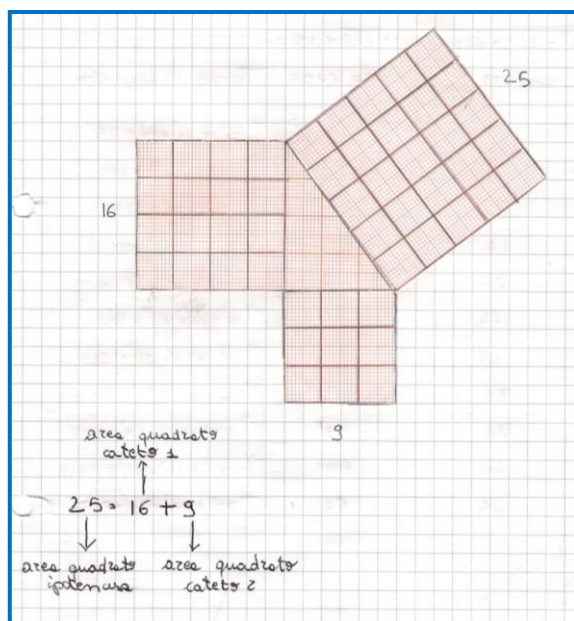


Fig. 22 – Teorema di Pitagora

Per generalizzare la relazione siamo andati al computer e abbiamo cercato di verificare il teorema con GeoGebra (www.geogebra.org). Con questo software di geometria dinamica è infatti possibile modificare le dimensioni dei lati del triangolo, verificando visivamente che la somma delle aree dei due quadrati costruiti sui cateti è sempre equivalente al quadrato maggiore.

Sempre con l’utilizzo del software, abbiamo anche provato a “generalizzarlo” con altri poligoni regolari e anche con il semicerchio. I ragazzi hanno potuto constatare che anche con queste figure la somma delle aree delle due minori è uguale all’area di quella maggiore. Riccardo ha provato anche con poligoni di 100 lati (con GeoGebra si può).

Siamo poi passati alle diverse dimostrazioni su carta e con modelli (Fig. 23a, Fig. 23b e Fig. 23c).

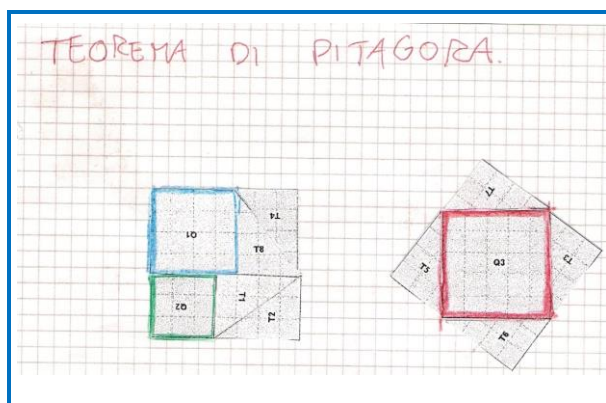


Fig. 23a – Dimostrazione Teorema Pitagora

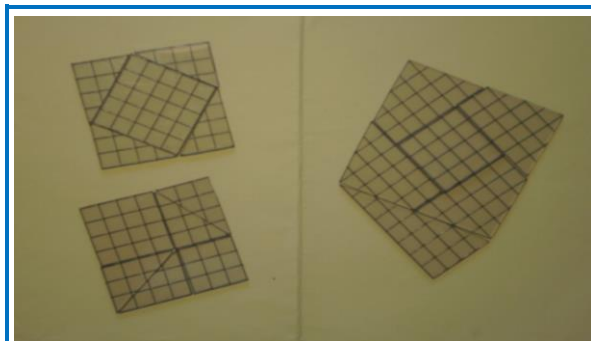
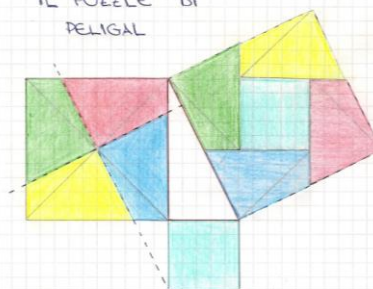


Fig. 23b – Dimostrazione Teorema Pitagora

DIMOSTRAZIONE PITAGORA

IL POZZLE DI
PELIGAL



IL POZZLE DI
BHASKARA

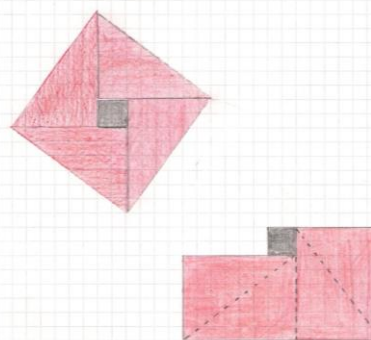


Fig. 23c – Dimostrazione Teorema Pitagora

Abbiamo poi chiesto “Possiamo utilizzare il Tangram per dimostrare il Teorema di Pitagora?” Siamo partiti dal Tangram (Fig. 24).

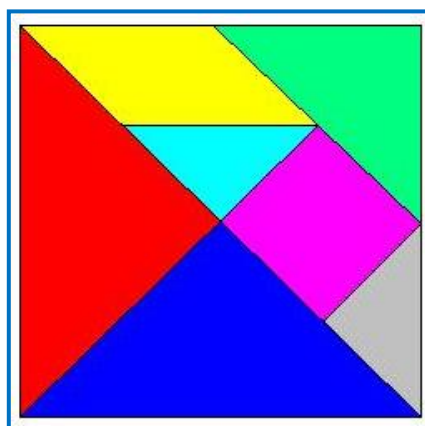


Fig. 24 – Teorema di Pitagora e Tangram

Il gruppo che ha risposto meglio è stato quello di Elena, Martina, Luca e Francesco. Che ha scritto così: “Abbiamo preso uno dei due triangoli rettangoli isosceli (corrispondenti a un quarto, cioè il rosso o il blu). L’ipotenusa di questo triangolo corrisponde al lato del Tangram, per cui il quadrato costruito sopra di esso è proprio il Tangram stesso. Il quadrato sopra uno dei

cateti si può costruire con l'altro triangolo da un quarto insieme al parallelogramma giallo (un ottavo) e ai due triangolini rettangoli TAN. azzurro e grigio (un sedicesimo). La somma delle quattro parti è quindi data dalle frazioni:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \quad (\text{cioè metà Tangram}).$$

Per tale motivo si dimostra che la somma dei quadrati costruiti sui cateti (ciascuno un mezzo o mezzo tangram) equivale al quadrato costruito sull'ipotenusa (Tangram intero)".

Sempre lavorando per gruppi, abbiamo chiesto anche ai ragazzi della classe terza di realizzare un triangolo rettangolo utilizzando dei pezzi di Geomag. Dopo pochi minuti anche loro sono giunti alla stessa costruzione realizzata dagli alunni della prima (Fig. 20).

Partendo dall'analisi di questo manufatto, ci siamo soffermati sulla terna 3-4-5, dicendo anche ai ragazzi che tale terna era già conosciuta tempo prima dell'avvento dei pitagorici.

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 196 225
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29

$25 + 144 = 169$
 $5^2 + 12^2 = 13^2$
 partendo da 5:
 $\frac{5^2-1}{2} = 12 \quad \frac{5^2+1}{2} = 13$

proviamo con altri numeri
 $\frac{4^2-1}{2} = 7,5 \quad \frac{4^2+1}{2} = 8,5$
 $16 + 56,25 = 72,25$
 funziona ma numeri decimali!
 con altri dispari?

$\frac{7^2-1}{2} = 24 \quad \frac{7^2+1}{2} = 25 \quad \frac{9^2-1}{2} = 40 \quad \frac{9^2+1}{2} = 41$
 $49 + 576 = 625 \text{ OK} \quad 81 + 1600 = 1681 \text{ OK}$
 $\frac{11^2-1}{2} = 60 \quad \frac{11^2+1}{2} = 61 \quad \frac{13^2-1}{2} = 84 \quad \frac{13^2+1}{2} = 85$
 $121 + 3600 = 3721 \text{ OK} \quad 169 + 7056 = 7225 \text{ OK}$

con n dispari:
 $n; \frac{n^2-1}{2}; \frac{n^2+1}{2}$
 e con n pari?

Per togliere il problema del denominatore
 abbiamo moltiplicato tutto per 2
 $2n; n^2-1; n^2+1$

$n=4 \quad 8; 15; 17 \quad n=8 \quad 16; 63; 65$
 $64 + 225 = 289 \text{ OK} \quad 256 + 3969 = 4225 \text{ OK}$
FUNZIONA!!!

Fig. 25 – Attività sulle terne pitagoriche

Utilizzando GeoGebra nella LIM in classe, abbiamo provato a vedere se le terne potevano “funzionare” anche con i multipli della terna 3-4-5.

Dopo aver confermato che anche i multipli di 3-4-5 costituiscono terne valide per costruire triangoli rettangoli, abbiamo chiesto loro:

“Provate a vedere se riuscite a trovare altre terne che non siano generate dalla terna 3-4-5”.

Un gruppo ha provato, con un approccio particolare, a scrivere i quadrati dei primi 15 numeri naturali cercando di trovare delle regolarità nella sequenza, ricordando quella emersa con i numeri quadrati.

I ragazzi hanno notato che tra 144 e 169 la differenza è 25, per cui questa poteva essere una terna ottenuta dai numeri 5-12-13.

La domanda che si sono posti era come si potevano ottenere quei tre numeri partendo dal più piccolo.

Nella scheda del gruppo si nota la soluzione esatta, ottenuta però dopo vari tentativi e tutta la procedura successiva per provare a generalizzare (Fig. 25).

Questa attività è stata particolarmente utile per il processo, sempre troppo poco utilizzato a scuola, dell'argomentare e i ragazzi hanno potuto discutere tra loro e successivamente con il resto della classe.

Nella terza classe della scuola secondaria di primo grado abbiamo anche messo in scena uno spettacolo di teatro matematico dal titolo “Un processo matematico”, nel quale, partendo dall'omicidio di Ippaso da Metaponto e dal problema della radice di due, si ripercorre la storia di Pitagora, dei pitagorici e di altri grandi matematici di quel periodo storico, come Talete.

Con un Giudice e un pubblico ministero vengono interrogati i vari personaggi, che, narrando le proprie vicende, tentano con successo di scagionare Pitagora, che viene assolto, come spesso accade anche nella realtà, per insufficienza di prove.

Nella classe seconda della scuola secondaria di secondo grado, abbiamo parlato di Pitagora in geometria Euclidea.

Inizialmente abbiamo ripreso l'enunciato del teorema di Pitagora e la dimostrazione (sfruttando l'area di un quadrato di lato uguale alla somma dei cateti del triangolo rettangolo considerato nell'enunciato del teorema), che tutti ricordavano di aver già visto alla secondaria di primo grado.

Lo abbiamo utilizzato per trovare i legami fra i lati dei triangoli rettangoli con angoli notevoli 30° , 60° , 45° .

Il compito di trovare i legami fra i lati dei triangoli rettangoli con angoli notevoli 30° , 60° , 45° è stato assegnato agli studenti suddivisi in 8 gruppi nella seconda ora di lezione (tempo a disposizione 30 minuti).

Sei gruppi sono riusciti a trovare le relazioni cercate. Il risultato ottenuto viene riportato in figura (Fig. 26).

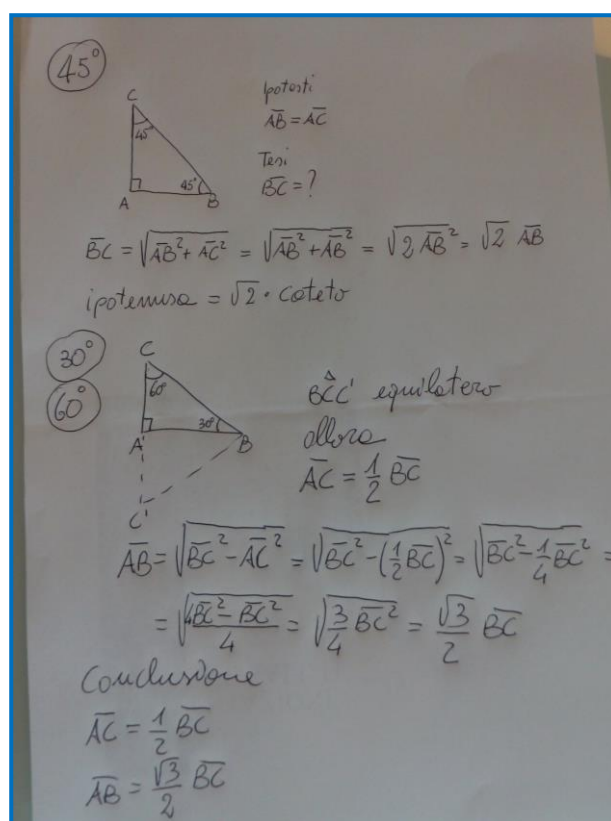


Fig. 26 – Relazioni dei triangoli rettangoli con angoli notevoli

Tale risultato lo abbiamo utilizzato per risolvere problemi con triangoli rettangoli con angoli notevoli.

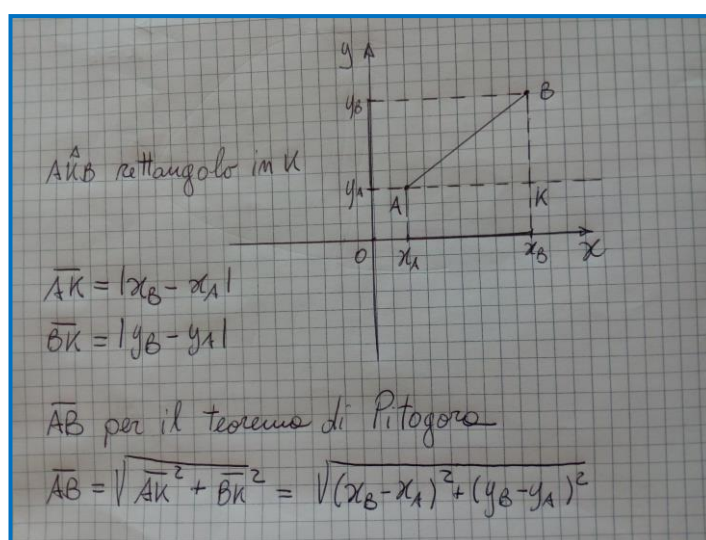


Fig. 27 – Teorema di Pitagora e piano cartesiano

Abbiamo poi parlato nuovamente di Pitagora quando abbiamo affrontato il piano cartesiano.

Durante la prima ora di lezione abbiamo lavorato, con una breve introduzione, sul piano cartesiano con alcune considerazioni sulla nomenclatura. Dopo aver ripreso il collegamento fra coordinate di un punto e collocazione nel piano cartesiano, nella seconda ora abbiamo posto il seguente problema: “*Come si può fare per trovare la lunghezza di un segmento?*”.

Abbiamo assegnato questo nuovo compito sempre suddividendo la classe in 8 gruppi (con 30 minuti a disposizione) dopo aver fatto osservare ai ragazzi che si poteva ottenere molto facilmente un triangolo rettangolo. Cinque gruppi hanno trovato la formula corretta utilizzando il teorema di Pitagora (Fig. 27).

Conclusione

Un antico motto latino recitava “*ludendo docere*” che significa “*insegnare divertendo*” e questo è lo scopo del nostro lavoro, già iniziato con Happy verticality in mathematics e proseguito con il gruppo di ricerca in didattica matematica Divertical-Math, da noi creato.

Lo scopo era duplice: il primo era quello di divertire con la matematica e il secondo era quello di “*sdoganare*” il povero Pitagora dal suo famoso Teorema.

Dall’entusiasmo e dalla curiosità che abbiamo trovato a tutti i livelli scolastici, possiamo dirci soddisfatti del risultato ottenuto.

Studiare Pitagora, ma anche tanti altri matematici, anche dal punto di vista storico, li rende sicuramente più “*umani*” e vicini ai bambini e ai ragazzi. Mostrare che anche i grandi matematici hanno commesso inizialmente degli errori, li rende in fondo più simpatici e fa comprendere agli studenti che anche dagli errori può nascere qualcosa di molto importante.

Contributo degli Autori

Entrambi gli autori hanno contribuito all’ideazione dello studio. I. Graziani ha raccolto e analizzato i dati della scuola dell’infanzia e della secondaria di primo grado. S. Babini ha raccolto e analizzato i dati della scuola primaria e della secondarie di secondo grado, e tutti e due gli autori hanno contribuito alla scrittura del manoscritto.

Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Deposito dei materiali dell’attività

Al seguente link sono depositati eventuali materiali inerenti questo l’articolo. Questi materiali nel tempo potranno essere modificati e arricchiti seguendo l’evoluzione delle idee sottostanti o/e future sperimentazioni svolte dall’autore dell’articolo.

<http://www.edimast.it/J/20150202/03150338GR/>

Bibliografia

Agostino A., (2002). *In viaggio con Pitagora*. Milano, Edizioni Ghisetti & Corvi.

- D'Amore B., (2001). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna, Pitagora Editrice.
- Guedj D., (2000). *Il teorema del pappagallo*. Milano, Longanesi.
- Lang S., (1991). *La bellezza della matematica, Terne pitagoriche*. Torino, Bollati Boringhieri.
- Lombardo Radice L., (2004). *La matematica da Pitagora a Newton*. Roma, Muzzio editore.
- Salciccia E., (2003). *Dietro il teorema – il fascino discreto della matematica nelle vite dei suoi protagonisti*. Roma, Armando editore.
- Simonetti V., (1995). *Ciao Pitagora*. Mantova, Corraini edizioni.

Gli Autori



Ivan Graziani

Istituto Comprensivo di Santa Sofia – Scuola Secondaria di I grado “Galileo Galilei”
Via Arcangeli, 1, 47018 Santa Sofia (FC)
graziani.ivan@tin.it
Italy

Professore a tempo indeterminato di matematica. Formatore in didattica della matematica. Appassionato di ICT, di problem solving e di comunicazione didattica. Si occupa inoltre di processi di apprendimento e di valutazione in vari contesti formativi e di sistema.

Fa parte del “Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica della Matematica – Pisa” (GRSDM). Fa parte del gruppo di ricerca in didattica “Divertical-Math”.

Collabora da diversi anni con l'Università di Bologna, con l'INDIRE (Istituto Nazionale di Documentazione, Innovazione e Ricerca Educativa), con l'INVALSI (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione) e con l'USR Emilia Romagna (Ufficio Scolastico Regionale).



Stefano Babini

Liceo “Rambaldi – Valeriani – A. Da Imola” di Imola (BO)
Via Guicciardini, 4, 40026 Imola (BO)
stefano0011@libero.it
Italy

Professore a tempo indeterminato di matematica e fisica. Appassionato di problem solving, di comunicazione didattica e delle nuove tecnologie applicate alla didattica (docente da diversi anni in classi 2.0).

Si occupa inoltre di processi di apprendimento e di valutazione in vari contesti formativi e di sistema.

Fa parte del gruppo di ricerca in didattica della matematica “Divertical-Math”.

Collabora da anni con l'INVALSI (Istituto Nazionale per la VALutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione).

Received August 17, 2016; revised August 22, 2016; accepted September 27, 2016; published online October 21, 2016

Open Access This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

