Meaning Equivalence Reusable Learning Object
An unexpected mathematical problem: the Dido's myth

Susanna Abbati, Alberto Cena, Arianna Coviello, Santina Fratti, Luigia Genoni,

Germana Trinchero, Fiorenza Turiano

Abstract. *This paper describes a learning activity carried on in the third class of a first level secondary school (middle school) and in the first two years of a second level secondary school (high school). The teaching practices we have adopted, are based on the educational model of peer-education and focus on the use of meaning sharing as object of learning. The habit of discussing and comparing activated a spontaneous transfer of knowledge, emotions and experiences within each group. One of the goals was to develop the competences in students about the ability to detect a particular conceptual situation, through multiple representations of sign systems (which are the different semantic registers); it has followed the ability to read a multiform one-to-many transformation of the meaning connected with a mathematical object.*

In this educational context that has developed the habit of creating, recognizing and managing a mathematical model, the MERLO methodology has also encouraged the habit of using a correct logical-mathematical language.

Key words. *Argumentation, Meaning equivalence, Isoperimetric, Duvall, Merlo Project, Mathematic model*

Sommario. *Questa proposta è la descrizione di un percorso didattico attuato nella terza classe della scuola secondaria di primo grado e nel primo biennio della scuola secondaria di secondo grado. Le pratiche didattiche da noi adottate, ispiratesi al modello educativo della peer education, sono centrate sull'uso della condivisione di significato come oggetto di apprendimento. La consuetudine all'argomentazione e al confronto ha permesso di attivare un processo spontaneo di passaggio di conoscenze, emozioni e di esperienze all'interno di ogni gruppo. Uno degli obiettivi è stato quello di costruire la competenza degli allievi circa la capacità di individuare una particolare situazione concettuale, attraverso molteplici rappresentazioni tra sistemi di segni (che sono i diversi registri semantici); questo ha implicato il saper leggere una poliforme trasformazione uno-a-molti di significato di un oggetto matematico.*

In un contesto didattico che ha voluto creare le condizioni per il raggiungimento di un'abitudine alla creazione, nonché al riconoscimento e alla gestione consapevole, del modello matematico, una metodologia, quale MERLO, ha anche favorito l'abitudine all'uso di un corretto linguaggio logico-matematico.

Parole chiave. *Argomentare, Condivisione di significato, Duvall, Isoperimetria, Merlo Project, Modello matematico*

Introduzione

In questo lavoro è descritto un laboratorio matematico rivolto a studenti di scuola secondaria di primo e secondo grado, progettato e realizzato da un gruppo di docenti che, nel corso del secondo anno del Master biennale di 2° livello per *Formatori in didattica della Matematica*, presso l'Università di Torino - Dipartimento di Matematica, ha preso parte alla ricerca e sperimentazione di un progetto denominato M.E.R.L.O. (*Meaning Equivalence Reusable Learning Object).*

L'obiettivo principale del lavoro si basa sull'uso di un innovativo strumento didattico e metodologico, appunto MERLO, il cui scopo è il riconoscimento di un significato condiviso attraverso dichiarazioni rappresentate in diversi sistemi di segni.

La creazione di questo percorso didattico scaturisce dalla volontà di rendere accattivante e inconsueto lo studio della matematica mediante pratiche didattiche laboratoriali integrate con questo nuovo strumento. Esso come vedremo, ha caratteristiche estremamente versatili e ben si presta ad essere utilizzato sia in forma di verifica formativa, sia come stimolo alla discussione di classe, sia come forma di ripasso di concetti e relativi significati. La caratteristica di MERLO è di attivare abilità e competenze, presenti anche a livello inconsapevole, attraverso il riconoscimento di un significato condiviso in diverse rappresentazioni semiotiche di un concetto.

È ben noto che il coordinamento di molteplici rappresentazioni dello stesso oggetto matematico in diversi registri semiotici è fondamentale per la comprensione e l'apprendimento del significato matematico sottostante (Duval, 2006). Inoltre, è anche ben riconosciuta l'importanza degli aspetti sociali nei processi di apprendimento umani, perché l'apprendimento sociale precede lo sviluppo delle competenze individuali (Vygotskij, 1934).

L'uso dello story-telling è risultato efficace per veicolare competenze. La leggenda su Didone ha permesso di affrontare il misconcetto relativo all'isoperimetria di figure piane, spesso, confusa con la loro equivalenza e viceversa.

Quadro teorico

La nostra proposta didattica trae origine da un lavoro di ricerca, condotto a partire dagli anni '90 presso l'Università di Toronto (Canada) dai docenti universitari Uri Shafrir (Ontario Institute for Studies in Education) e da Masha Etkind (Ryerson University - Department of Architectural Science) che ha portato all'elaborazione di uno strumento metodologico e didattico innovativo denominato MERLO. In tale progetto confluiscono gli esiti più significativi della ricerca su:

- la relazione tra gli aspetti cognitivi e affettivi nei processi di apprendimento, anche in contesti di difficoltà;
- il pensiero concettuale;
- la peer education;
- la Concept Science.

La metodologia Merlo esalta il modello educativo della *peer education*, in quanto, come dice Giorgio Chiari (Università di Trento) in *"Educazione interculturale e apprendimento cooperativo: teoria e pratica nella educazione tra pari"*, è volto ad attivare un processo spontaneo di passaggio di conoscenze, emozioni e di esperienze da alcuni membri di un gruppo ad altri membri. I benefici sono maggiori in presenza di una relazione positiva e di un bilanciamento di potere tra i partecipanti.

All'interno di un'attività Merlo si può rilevare la competenza degli allievi circa la capacità di individuare una particolare situazione concettuale, attraverso molteplici rappresentazioni tra sistemi di segni (che sono i diversi registri semantici); questo implica il saper leggere una poliforme trasformazione uno-a-molti di significato di un oggetto matematico.

Le attività MERLO (Arzarello, Kenett, Robutti, Shafrir, 2010) con lo scopo di migliorare l'apprendimento concettuale, si avvalgono dell'uso di un database multi-dimensionale, che permette la selezione e la mappatura dei concetti importanti rappresentati in diversi registri.

Il design di una scheda MERLO

Le attività MERLO si propongono di esplorare la comprensione profonda dei concetti matematici, attraverso il riconoscimento della comunanza di significato in diverse forme di rappresentazione.

Ciascuna attività è progettata in relazione a un certo concetto matematico e ai relativi nodi concettuali. Scelto il nodo è possibile creare un insieme con diverse forme di *rappresentazioni* che condividono lo stesso significato. Tale insieme viene detto Boundary of Meaning–BoM (vedi Fig.1), perché definisce il confine del significato condiviso. All'esterno del BoM, in un insieme disgiunto, stanno altre rappresentazioni-affermazioni che non hanno in comune alcuna radice semiotica con il concetto in questione, ma possono eventualmente contenere una somiglianza apparente dovuta alla presenza di termini o di registri comuni. Tutte le rappresentazioni, interne ed esterne al BoM, sono vere dal punto di vista matematico.

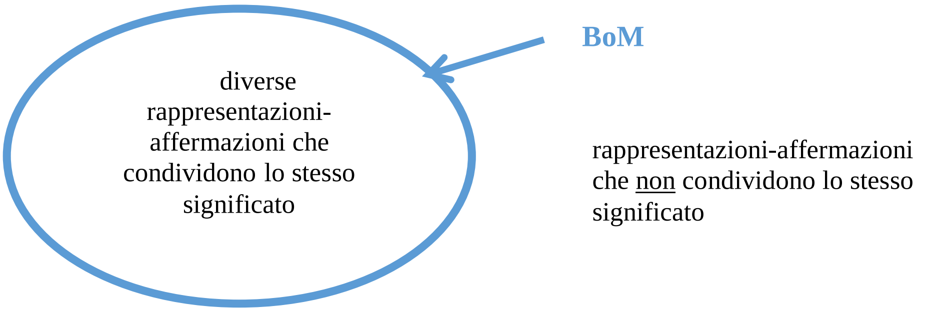


Fig. 1- BoM

La successiva costruzione di schede-quesito contenenti oggetti prelevati dai due insiemi disgiunti ha lo scopo di esporre lo studente al confronto tra oggetti interni ed esterni al BoM, in modo che egli possa**,** anche attraverso il dialogo tra pari**,** pervenire alla corretta individuazione delle rappresentazioni che condividono lo stesso significato. Una generica scheda MERLO (vedi Fig.2) è così composta:

1. un Target Statement (TS) che è una esemplificazione del concetto ;
2. 4 rappresentazioni, ciascuna delle quali può appartenere ad uno dei seguenti 4 tipi:
   - tipo Q1: *condivide un significato* (equivalent meaning) con il TS ed *ha una somiglianza di registro* (surface similarity) con il TS;
   - tipo Q2: *condivide un significato* (equivalent meaning) con il TS e *<u>non</u> ha una somiglianza di registro* (surface similarity) con il TS;
   - tipo Q3: *<u>non</u> condivide una equivalenza di significato* (equivalent meaning) con il TS ed ha una *somiglianza di registro* (surface similarity) con il TS;
   - tipo Q4: *<u>non</u> condivide una equivalenza di significato* (equivalent meaning) con il TS e <u>non</u> ha una *somiglianza di registro* (surface similarity) con il TS.

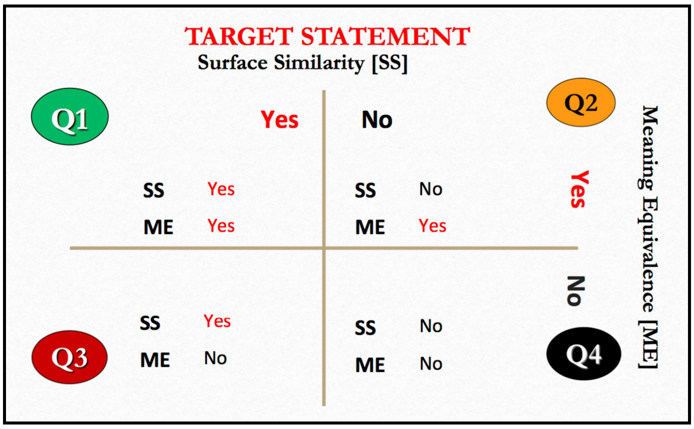


Fig.2 - MERLO Item family

Un esempio di scheda MERLO

Una tipica scheda MERLO è composta da una consegna e da 5 riquadri:

1. un target statement TS - dichiarazione bersaglio
2. 4 statements a scelta tra i tipi Q1, Q2, Q3, Q4.

In una stessa scheda–test MERLO possono essere presenti due o più statements di tipo Q2 insieme ad un numero variabile di Q3 e Q4. La prima parte della consegna chiede allo studente di individuare almeno due riquadri che condividono lo stesso significato con il TS, per indagare se i ragazzi riconoscono le diverse rappresentazioni semiotiche di un concetto matematico.

La seconda parte della consegna chiede di motivare la scelta ed è didatticamente molto importante, perché porta alla discussione delle ragioni di ciascuno studente e permette all'insegnante di apprezzare i collegamenti che i ragazzi costruiscono (eventualmente errati) tra concetti e rappresentazioni.

Di ogni scheda MERLO vengono prodotte due versioni, una per l'insegnante (vedi Fig.3) e una per gli studenti. Quella della Fig. 3 è la versione docente, perché contiene le etichette TS e i Qi (i= 1,2,3,4).

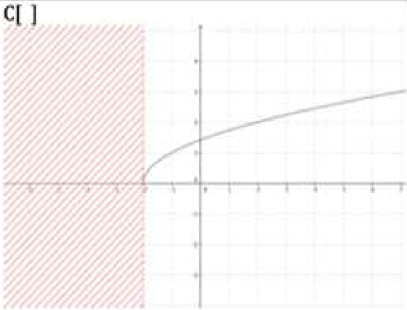
	TS	**Q2**
1. Segnare le affermazioni che condividono lo stesso significato matematico (due o più); 2. Indicare le ragioni che guidano nella scelta.	A[ ] $y = log(x+1)$ $x > -1$ **condivisione di significato**	B[ ] Data una funzione $f : X \to Y$ il dominio $X \subseteq \Re$ della funzione f è l'insieme : $D = \{x \in \Re / \exists y = f(x), y \in \Re\}$ **condivisione di significato**
Q2	**Q3**	**Q4**
C[ ]  **condivisione di significato**	D[ ] $y = \frac{x+3}{x-1}$ $x < -3 \quad x > 1$ **distrattore**	E [ ] $\lim_{x \to -\infty} log(x^2 - 1) = +\infty$ **distrattore**

Fig.3 - esempio di scheda MERLO docente

Nella versione studente i Ts e i Qi non compaiono e gli item sono mescolati.

Feedback per l'insegnante

Le attività MERLO forniscono utili informazioni agli insegnanti per valutare i problemi di comprensione degli studenti relativi a un preciso concetto matematico.

La valutazione formativa diventa, in questo modo, un processo contemporaneo e interno alla fase di costruzione del sapere intorno ad un concetto: i ripetuti feedback rendono formatrice l'azione dialogata di confronto con il proprio sapere in evoluzione e con il sapere dei compagni.

Se i ragazzi tralasciano di segnare alcune affermazioni di tipo Q2 significa che non riconoscono uno stesso concetto se si presenta sotto vesti diverse.

Se scelgono rappresentazioni di tipo Q3 significa che la comprensione è superficiale e influenzabile da rappresentazioni simili.

La scelta di un Q4 diventa significativa quando quest'ultimo, pur non presentando né una somiglianza di rappresentazione né un significato condiviso, è "vicino" all'ambito a cui appartiene il nodo concettuale.

Metodologia MERLO

Secondo la metodologia MERLO l'attività di classe si articola in tre fasi. La durata delle fasi dipende dal numero di schede su cui gli allievi sono chiamati a lavorare. Al fine di realizzare un percorso didattico di costruzione e ri-costruzione di significati matematici, è auspicabile che l'insegnante organizzi le attività con la classe intorno ad un numero variabile di schede sullo stesso concetto matematico.

1. Prima fase (individuale): ogni ragazzo riceve le schede ed è chiamato ad individuare quali riquadri siano legati da un concetto matematico riportando le riflessioni che lo hanno guidato nelle scelte. È importante insistere sulla richiesta di argomentazione (5 minuti per scheda);
2. Seconda fase (a piccoli gruppi, tre o quattro ragazzi): viene consegnata a ciascun gruppo una copia in bianco delle schede che, singolarmente, sono già state analizzate. I ragazzi devono confrontarsi per valutare se le scelte di ognuno sono condivise o meno dagli altri. Il gruppo può pervenire ad un'unica scelta condivisa da tutti oppure può mantenere la diversità di opinioni espresse dai singoli. Le argomentazioni di scelta condivisa o non condivisa vanno riportate sulla scheda;
3. Terza fase (classe intera): in una discussione aperta, in cui è fondamentale il ruolo dell'insegnante quale mediatore culturale, si raccolgono i punti di vista dei gruppi e dei singoli che non sono arrivati ad un accordo con il proprio gruppo. Segue ancora la fase di metacognizione volta al chiarimento e alla riflessione sul processo personale di costruzione del proprio sapere;

La seconda fase è quella della *peer cooperation* in cui gli individui, secondo un approccio vygotskijano, cercano di capirsi reciprocamente e costruiscono il significato attraverso la loro interazione con gli altri.

Destinatari

L'attività è stata svolta, durante l'anno scolastico 2014/2015 presso la scuola Secondaria di primo grado dell'Istituto Comprensivo Rodari di Baranzate (MI), in una classe terza composta da 17 alunni, di cui due neo arrivati da Egitto e Filippine, 1 alunno rom ripetente, 1 alunno DA, 1 alunno DSA e 3 alunni BES e all'inizio dell'anno scolastico 2015/2016 presso una prima liceo scientifico del Liceo G. Galilei di Alessandria composta da 26 studenti, una prima liceo scientifico del Liceo A. Volta di Lodi di 26 alunni e presso una prima dell'Istituto Tecnico Tecnologico G. Fauser di Novara formata da 21 studenti di cui uno DSA.

Finalità

- favorire un apprendimento cooperativo attraverso attività laboratoriali e utilizzando un nuovo strumento didattico e metodologico.

Obiettivi

- rafforzare il concetto di perimetro ed area
- riflettere sul concetto di isoperimetria ed equivalenza
- far emergere le competenze già possedute dai ragazzi riguardo la geometria analitica
- far emergere la competenza nell'uso di formule inverse e sottolinearne l'importanza
- richiamare i concetti di perimetro e area
- sottolineare il legame tra Algebra e Geometria, in particolare il ruolo dell'una come linguaggio descrittivo dell'altra
- indurre negli allievi la consapevolezza delle competenze già in loro possesso e stimolarli

all’acquisizione di nuove.

Attività e sperimentazione scuola secondaria di primo grado

La proposta didattica prende in considerazione il nucleo tematico “Spazio e Figure” in quanto, analizzando negli anni le prove di stato INVALSI del primo ciclo, si può osservare che la percentuale più alta di errori si riscontra proprio in ambito geometrico. Se si considerano le indicazioni nazionali della scuola secondaria di primo grado si può osservare come la geometria sia ampliamente sviluppata nel corso degli anni, ma in classe viene attuata attraverso esercizi ripetitivi, tecnici e avulsi da qualsiasi contesto reale e i libri ne sono testimonianza.

La geometria è vista dagli studenti come un formulario per trovare lunghezze, aree e volumi o come un insieme di termini da imparare quindi non suscita in loro nessun interesse o stimolo, anzi spesso è motivo di frustrazione e scoraggiamento, spesso ci troviamo di fronte ad alunni rinunciatari che sostengono di non *“capirci nulla di problemi”*.

Fondamentale, per un apprendimento significativo, è suscitare negli alunni curiosità nei confronti della matematica, lavorando sulla motivazione, fornendo stimoli e strumenti diversi allo scopo di valorizzare i diversi stili d’apprendimento.

L’idea di fondo è stata quella di partire da situazioni a-didattiche che contemplassero contemporaneamente piano e spazio per arrivare via via alla formalizzazione di quanto appreso e collegare tra loro gli apprendimenti avvenuti. La scelta di questo percorso nasce per stimolare la curiosità degli alunni sollecitandoli a porsi domande e cercare vie risolutive nelle quali la matematica è un mezzo che facilita le cose.

L’apprendimento è significativo se avviene per coinvolgimento diretto nella situazione, attraverso un processo dinamico in cui l’allievo è oggetto soggetto.

Anche le IINN sottolineano l’importanza di partire da situazioni reali e significative *“La costruzione del pensiero matematico è un processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono … Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola.*”

Comenius Pestalozzi (pedagogista) sosteneva che *“la conoscenza deve cominciare attraverso i sensi, l’istruzione è vera se proviene dall’attività dei fanciulli, l’intuizione è una costruzione. Ci sono due modi di insegnamento, o andiamo dalle parole alle cose o dalle cose alle parole. Mio è il secondo metodo.”*

La metodologia adottata è di tipo laboratoriale e ha visto l’alternarsi di momenti di lavoro a piccoli gruppi ad altri di lavoro a classe intera, per garantire la cooperazione, il confronto tra i compagni offrendo l’opportunità a tutti di partecipare in prima persona discutendo e difendendo le proprie soluzioni proposte.

Il lavoro di gruppo stimola l’interazione tra gli studenti, e tra studenti ed insegnanti. Vygotskij, afferma che, “*essendo gli esseri umani inseriti in una matrice socioculturale, la formazione del bambino avviene attraverso la relazione, considerando quindi non solo la componente cognitiva, ma anche l’intreccio fra sviluppo emotivo e sviluppo cognitivo*”.

Massimi e minimi nel piano

Galileo in uno dei suoi libri (Discorsi e Dimostrazioni Matematiche 1638) parla della confusione che molti fanno tra area e perimetro, quindi solo se i concetti di perimetro ed area vengono messi a confronto possono reciprocamente chiarirsi.

«Quelli che non hanno nozioni di geometria, se devono determinare, come spesso accade, la grandezza di diverse città, intera cognizione gli par d’averne ogni volta che sanno la misura dei loro recinti, ignorando che può essere un recinto uguale a un altro, ma la piazza contenuta da questo,

assai maggiore della piazza contenuta da quello».

Area massima tra poligoni isoperimetrici

Come story-telling è stato scelto il *Mito di Didone* (vedi All.1). "*Giunsero in questi luoghi, ov'or vedrai sorger la gran cittade e l'alta rocca della nuova Carthago, che dal fatto Birsa nomassi, per l'astuta merce che, per fondarla, fèr di tanto sito quanto cerchiar di bue potesse un tergo*". [Eneide libro I, versi 365-369].

Didone attraverso uno stratagemma matematico o meglio un calcolo matematico aveva risolto un problema di isoperimetria: determinare la figura piana di area massima avendo a disposizione un perimetro fissato.

Agli alunni ho posto la domanda "*Come avrà fatto Didone a fondare la città di Cartagine?*". Tra le varie risposte ne ho scelta una che sembrava adatta per poter partire con l'osservazione "*taglio la pelle a pezzettini e li sparpaglio*". Analizzando assieme alla classe il termine "*sparpaglio*", si è giunti alla conclusione condivisa che questo modo di procedere presenta troppi fattori legati al caso e che quindi Didone si sarebbe basata sulla casualità e non avrebbe risolto il problema attraverso uno stratagemma matematico. Qualcuno ha proposto di tagliare tante strisce e legarle tra loro. Ne consegue allora un'altra domanda: "*Qual è la forma più conveniente da utilizzare come modello per la costruzione di Cartagine, sapendo che si ha a disposizione un perimetro ben definito?*".

Per rispondere alla domanda gli alunni devono andare a determinare quale tra i poligoni isoperimetrici ha area massima.

A casa avevo fatto ritagliare delle strisce di cartoncino alte 1,5 cm e lunghe 25 cm, ho suddiviso la classe in gruppi di quattro e ho chiesto a ciascun gruppo di costruire quattro quadrilateri diversi tra loro e di indicarmi la caratteristica comune e di individuare il quadrilatero di area massima, dicendo loro che in questa fase non era necessario applicare formule e fare calcoli. In fase di discussione a classe intera è stato evidenziato da tutti che la caratteristica comune era il perimetro che non variava e quello di area massima il trapezio. La verifica è stata fatta per via empirica con pallini di colore diverso, arrivando ad osservare che la conclusione a cui erano arrivati era errata.

Il campo di indagine è stato ristretto ai soli rettangoli in quanto figure piane regolari e di semplice gestione per simulare l'esaustione di aree irregolari. Ho dato loro un "cordino", come Emma Castelnuovo suggerisce in tante sue attività e questa ricalca una classica ed efficacissima sua proposta didattica, legato alle estremità e ben teso tra le dita, avvicinando o allontanando le dita, (vedi Fig.4) i ragazzi sono arrivati ad osservare attraverso domande guidate che si formano tanti rettangoli isoperimetrici con basi e altezza diverse individuando i due casi limite di area zero, quelli in cui l'altezza si "schiaccia" sulla base e la base si "schiaccia" sull'altezza.

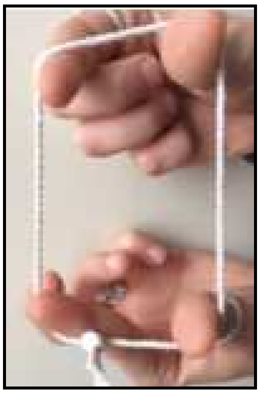


Fig.4 cordino

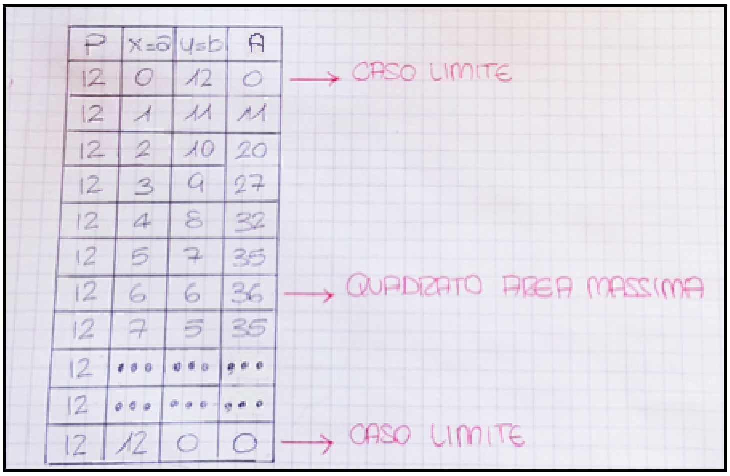
Gli alunni, suddivisi in piccoli gruppi, hanno lavorato per rispondere alla domanda "*Quale fra i* *rettangoli isoperimetrici ha area massima?"* Ad ogni gruppo è stata consegnata una scheda con indicazione di come procedere:

Prima consegna

- compilare una tabella di valori (vedi Fig.5);
- riportare il valore del semiperimetro, (perimetro assegnato 24 cm);
- le dimensioni dei rettangoli;
- le rispettive aree;
- individuare i casi limite;
- indicare rettangolo di area massima.

  Rispondere alle seguenti domande

  1. cosa succede se h o b hanno misura uguale a 12 cm?
  2. come varia la b al variare di h?
  3. i rettangoli isoperimetrici hanno medesima area?
  4. c'è un rettangolo che ha l'area massima?
  5. vi sono rettangoli equivalenti?



P	x=a	y=b	A	
12	0	12	0	→ CASO LIMITE
12	1	11	11	
12	2	10	20	
12	3	9	27	
12	4	8	32	
12	5	7	35	
12	6	6	36	→ QUADRATO AREA MASSIMA
12	7	5	35	
12	...	...	...	
12	...	...	...	
12	12	0	0	→ CASO LIMITE

Fig.5 - tabella valori rettangoli isoperimetrici

Seconda consegna

- costruire su cartoncino i diversi rettangoli individuati e incollarli su carta millimetrata (vedi Fig.6) ;
- unire i vertici liberi;
- scrivere le coordinate dei vertici liberi e osservare la caratteristica comune;

  Rispondere alle seguenti domande;

  1. unendo i vertici liberi che curva ottieni?
  2. quale operazione ti ha permesso di determinare la caratteristica comune?
  3. il risultato dell'operazione a cosa corrisponde?
  4. scrivi la relazione tra base altezza (puoi indicare con x il valore della base, con y il valore dell'altezza e con k il risultato dell'operazione);
  5. scrivi le coordinate dei casi limite;
  6. a che cosa corrisponde il valore sull'asse delle x e delle y?

Per determinare la caratteristica comune ho suggerito agli allievi di avvalersi delle quattro operazioni.

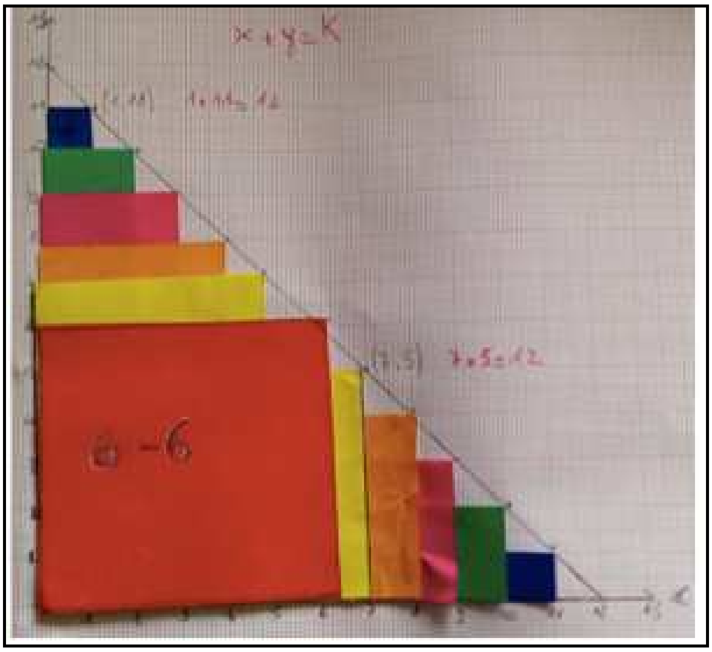


Fig.6 - curva rettangoli isoperimetrici

Osservazioni: nessun gruppo ha compilato la tabella utilizzando valori decimali per le dimensioni di base e altezza, ma solo valori interi, questo è stato oggetto di discussione. Ho fatto osservare il grafico che avevano costruito e ho chiesto loro se tra un rettangolo e l'altro era possibile inserire altri rettangoli e in caso affermativo che valori avrebbero assunto le dimensioni.

Il campo di indagine è proseguito con i triangoli, sempre in gruppo i ragazzi hanno costruito i diversi triangoli isoperimetrici che sono stati riempiti con pallini di diverso colore per concludere che a parità di perimetro il triangolo equilatero è quello di area massima. A ciascun gruppo ho consegnato un cartoncino, un cordino e una scheda di lavoro:

- disegnare sul foglio un segmento (base del triangolo) di lunghezza pari alla metà della misura del cordino;
- fissare il cordino ai due estremi del lato;
- inserire una matita nel cordino e muoverla lungo il foglio.

Rispondere alle seguenti domande

1. che curva si ottiene? (vedi Fig.7)
2. i punti della curva che cosa rappresentano?
3. quale triangolo ha area massima?

In questa fase ho tralasciato la ricerca della relazione algebrica e relativa funzione.

Dopo queste due prime fasi di lavoro, gli alunni hanno osservato che "*a parità di perimetro il poligono regolare è quello di area massima"*. Ho chiesto se il cerchio si poteva considerare un poligono regolare e di motivare la risposta, la verifica è stata fatta con il software GeoGebra. I discenti hanno quindi lavorato individualmente per rispondere alla domanda: "*tra i poligoni regolari isoperimetrici chi ha area massima?"*. Ho limitato il calcolo all'area del triangolo equilatero, quadrato e cerchio consentendo l'uso della calcolatrice. Tutti hanno evidenziato che a parità di perimetro il cerchio è quello di area massima.

Questa ultima fase ha permesso di rispondere all'iniziale domanda: Didone ha fondato Cartagine, delimitando una vasta zona, a forma di semicerchio affacciata sul mare, che aveva come diametro la riva del mare.

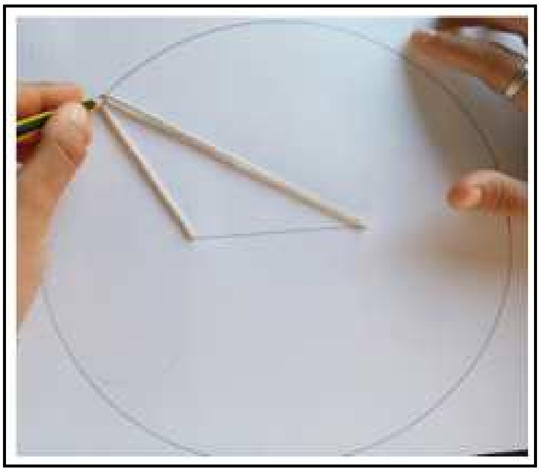


Fig.7 curva triangoli isoperimetrici

Dal Dialogo "Intorno a due nuove scienze" di Galileo Galilei:

"Il ché accade non solamente fra le superficie irregolari, ma fra le regolari, delle quali quelle di più lati sono sempre più capaci di quelle di manco lati, sì che in ultimo il cerchio […] è capacissimo sopra tutti gli altri poligoni di egual circuito" (citazione tratta da E. Castelnuovo, "Pentole, ombre, formichine" In viaggio con la matematica, La Nuova Italia,1998, p. 39).

Perimetro minimo tra poligoni equiestesi

Il problema di trovare tra famiglie di figure isoperimetriche (rettangoli, quadrilateri, poligoni regolari ecc.) quella di area massima ha un corrispettivo duale: trovare tra le figure equiestese di una data famiglia quella di perimetro minimo. I due problemi sono strettamente legati e la soluzione di uno è anche la soluzione dell'altro.

Ho posto ora il problema: *chi tra i poligoni equiestesi ha perimetro minimo*?

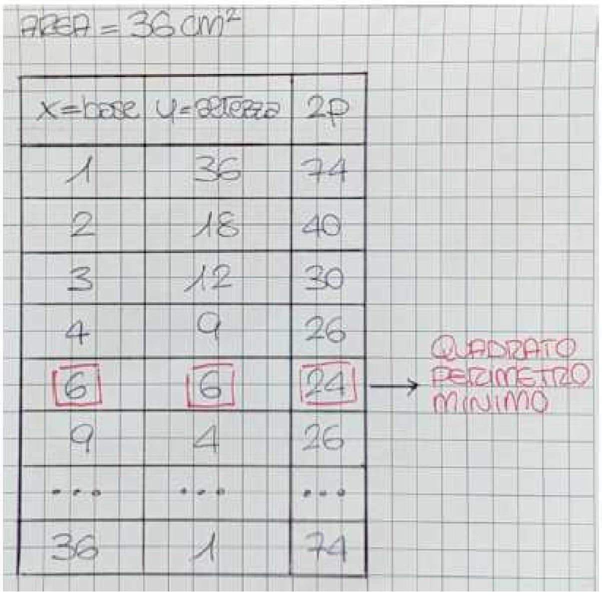
La classe è stata ancora suddivisa in gruppi piccoli. Ad ogni gruppo è stata consegnata una scheda per analizzare chi "*tra i rettangoli equiestesi ha perimetro minimo*" con indicazione di come procedere:

- Costruire una tabella dei valori (assegno due valori di area 36 cm^2 e 100 cm^2).
- Riportare i valori su un piano cartesiano e costruire i relativi rettangoli.
- Unire i vertici liberi.
- Osservare la proprietà delle coordinate dei vertici liberi.

Rispondere alle seguenti domande

1. come varia la b al variare di h?
2. i rettangoli equiestesi hanno medesimo perimetro?
3. c'è un rettangolo che ha perimetro minimo? (vedi Fig.8)
4. vi sono rettangoli isoperimetrici?
5. unendo i vertici liberi che curva ottieni? (vedi Fig.9)

Due gruppi hanno lavorato utilizzando come valore di area 36 cm^2 e gli altri due valore100 cm^2 per avere grafici da confrontare. In questa fase ho dovuto aiutare due gruppi perché non riuscivano a comprendere come compilare la tabella, ho suggerito di richiamare alla memoria come si calcola l'area di un rettangolo e procedere come nella tabella dei rettangoli isoperimetrici. Ciascun gruppo ha presentato il proprio lavoro osservando che il quadrato è quello di perimetro minimo. Due gruppi alla prima domanda hanno risposto "*se la base raddoppia, l'altezza dimezza e se triplica invece è un* *terzo”* quindi *“base e altezza con area costante rappresentano una proporzionalità inversa”*.



AREA = 36 cm²

x=base	y=altezza	2p
1	36	74
2	18	40
3	12	30
4	9	26
6	6	24
9	4	26
...	...	...
36	1	74

QUADRATO PERIMETRO MINIMO

Fig.8 - tabella rettangoli equiestesi **Fig.9 - curva rettangoli equiestesi**

Per i triangoli equiestesi mi sono avvalsa di un modello (vedi Fig.10), per discutere a classe intera, in una fase successiva, ponendo le seguenti domande:

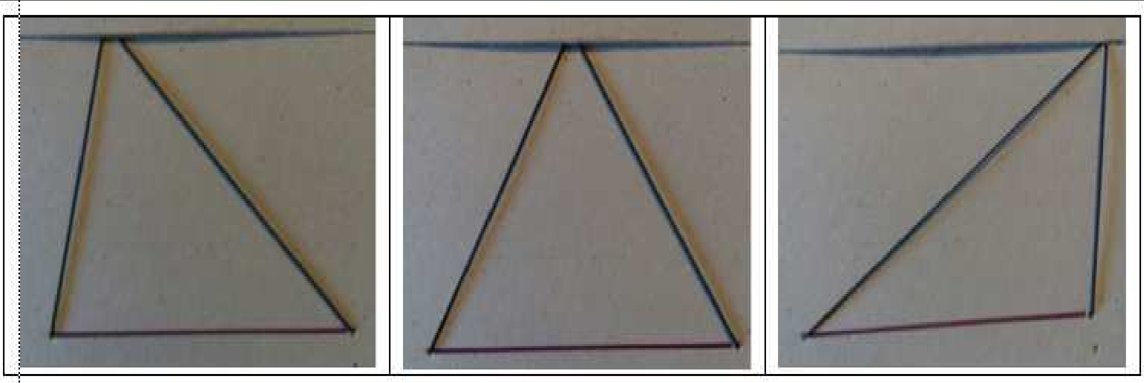


Fig.10 - triangoli equiestesi

1. muovendo il cordino che triangoli si formano?
2. pensi che i triangoli abbiano la stessa area? Motiva la tua risposta.
3. quale triangolo secondo voi ha la misura del perimetro minima?

La difficoltà maggiore per alcuni è stata quella di individuare equivalenza dei triangoli, quindi ho fatto disegnare sul quaderno almeno quattro triangoli che avevano osservato, riproponendo la stessa condizione, e di ciascuno tracciare l’altezza relativa alla base utilizzando colori diversi (vedi Fig.11).

Osservata la dualità del problema alcuni allievi sono arrivati alla risposta della domanda iniziale formulando quanto segue *“tra i poligoni isoperimetrici i poligono regolari sono quelli che hanno area massima e il cerchio è quello di area massima mentre tra i poligoni regolari equiestesi il cerchio ha perimetro minimo”*.

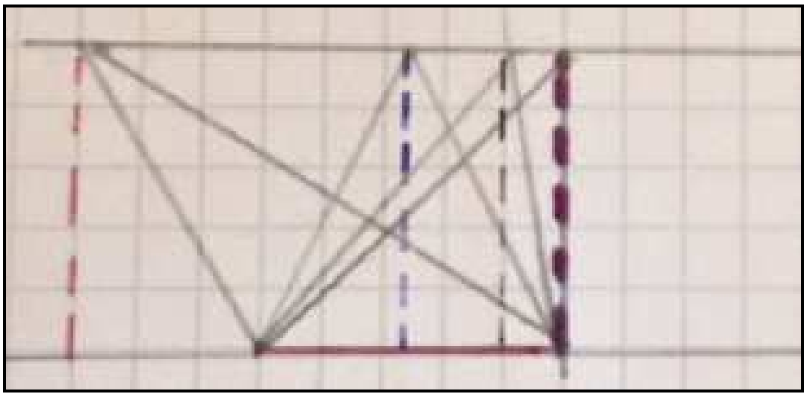


Fig.11 - triangoli e relative altezze

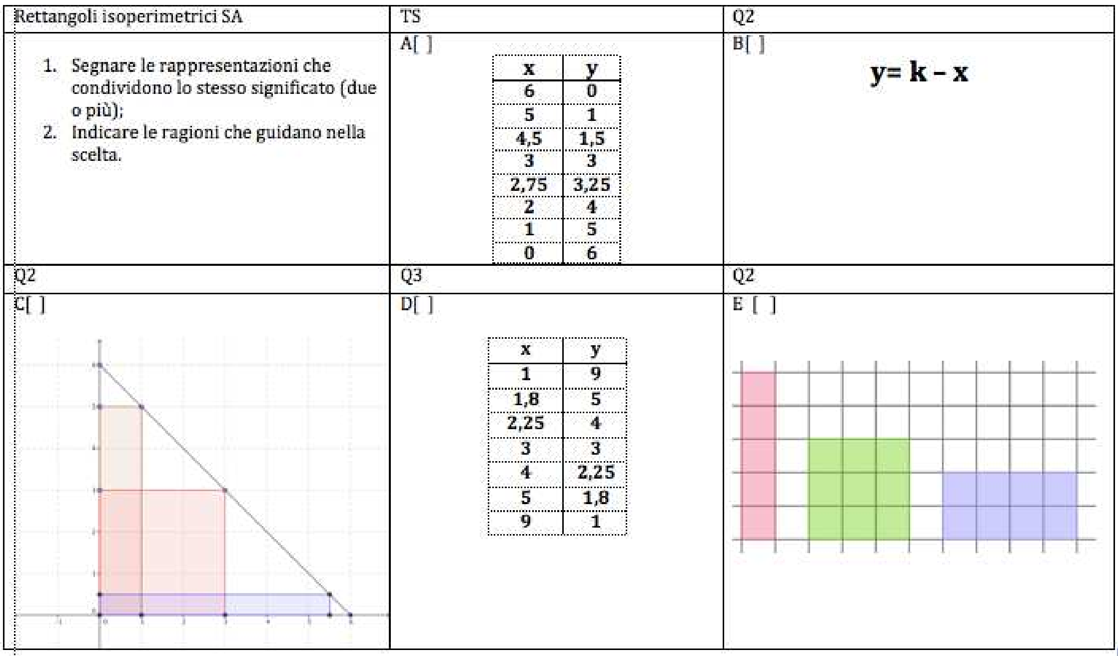
Verifica

A fine percorso sono state consegnate delle schede Merlo su i seguenti nodi concettuali: rettangoli isoperimetrici, rettangoli equivalenti-proporzionalità inversa, triangoli equivalenti.

Alla somministrazione delle schede non hanno partecipato cinque alunni in quanto: uno assente perché ritornato al paese di origine per un breve periodo e quattro non hanno partecipato a buona parte di questa sperimentazione perché seguivano lezioni di L2 e pure assenti durante la fase della verifica, hanno partecipato comunque ad altre attività durante la seconda parte del quadrimestre con relative schede.

La somministrazione delle schede ha seguito la metodologia MERLO, fase individuale, fase di gruppo, fase a classe intera e la valutazione è stata di tipo formativo.

Dopo un primo stupore degli alunni di fronte a un compito insolito, in cui non viene chiesto di applicare formule e fare calcoli, ho notato un notevole impegno da parte di tutti per cercare di riflettere e individuare i riquadri riferibili allo stesso oggetto matematico, la maggior difficoltà riscontrata è quella relativa all'argomentazione.



Rettangoli isoperimetrici SA

1. Segnare le rappresentazioni che condividono lo stesso significato (due o più);
2. Indicare le ragioni che guidano nella scelta.

TS

A[ ]

x	y
6	0
5	1
4,5	1,5
3	3
2,75	3,25
2	4
1	5
0	6

Q2

B[ ]

$y = k - x$

Q2

C[ ]

Q3

D[ ]

x	y
1	9
1,8	5
2,25	4
3	3
4	2,25
5	1,8
9	1

Q2

E [ ]

Fig.12 - scheda studente Rettangoli isoperimetrici

Il nodo concettuale della scheda si riferisce ai rettangoli isoperimetrici (vedi Fig.12).
La maggiore criticità (vedi Fig.13) si evidenzia nel riquadro [E] non vengono riconosciuti i rettangoli isoperimetrici e riquadro [B] non viene riconosciuta la relazione algebrica. Più della metà individua correttamente il concetto matematico, il 30% non dà motivazione della scelta.

	rettangoli isoperimetrici						
ID studente	TS[A]	Q2 [C]	Q2[E]	Q2[B]	Q3[D]	tot	percentuale
1	1	1	1	0	1	4	80
2	1	1	0	0	1	4	80
3	0	0	1	1	0	2	40
4	1	1	1	1	1	5	100
5	1	0	0	0	0	1	20
6	1	1	1	1	1	5	100
7	1	1	0	1	0	3	60
8	1	1	1	0	1	4	80
9	1	0	0	0	0	1	20
10	1	1	0	1	1	4	80
11	1	1	1	1	1	5	100
12	0	1	1	1	1	4	80
media	0,8	0,8	0,6	0,6	0,7	3,5	

Fig.13 analisi schede individuali

Nella fase di gruppo (omogenei per consentire a tutti di esprimere le proprie idee) solo un gruppo non ha individuato il riquadro [E] quindi non ha compilato correttamente la scheda. La fase di confronto tra i gruppi è stata fondamentale e significativa, gli alunni sono stati in grado di confrontarsi e sostenere le proprie convinzioni, ma allo stesso tempo è stato anche un momento di negoziazione di idee che in alcuni casi ha visto un cambio di opinione di fronte ad una argomentazione ritenuta corretta. L'alunno con DSA (ID 6) è stato capace di compilare correttamente la scheda ma non di motivare le scelte ed individuare il concetto alla base delle schede.

Rettangoli equivalenti SA

1. Segnare le rappresentazioni che condividono lo stesso significato (due o più);
2. Indicare le ragioni che guidano nella scelta.

TS

A[ ]

$$y=\frac{k}{x}$$

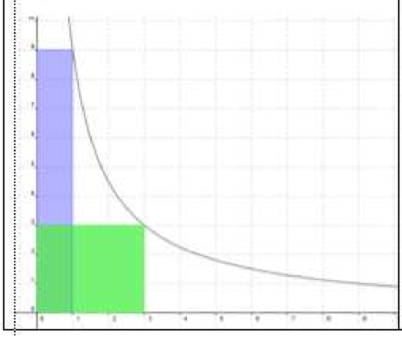
Q2

B[ ]

x	y
1	9
2	4.5
3	3
4	2.25
5	1.8
6	1.5
7	1.28
8	1.125
9	1

Q2

C[ ]



Q3

D[ ]

$$y=x^2$$

Q4

E [ ]

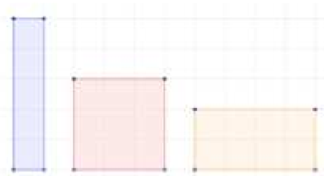


Fig.14 - scheda studente Rettangoli equivalenti

Il nodo concettuale della scheda (vedi Fig.14) si riferisce alla proporzionalità inversa riferibile ai rettangoli equivalenti. La scheda non ha presentato particolari difficoltà (vedi Fig.15) nella ricerca del nodo concettuale in quanto un discreto numero di allievi ha motivato le scelte individuando la proporzionalità inversa, alcuni non sono riusciti a vedere la relazione matematica e dato più preoccupante vedere il riquadro [E] come rappresentazione di rettangoli equivalenti.

	rettangoli equivalenti						
ID studente	TS[A]	Q2[D]	Q2[B]	Q3[A]	Q4[C]	tot	percentuale
1	0	1	1	0	0	2	40
2	0	1	1	1	1	4	80
3	0	0	1	0	0	1	20
4	1	1	1	1	1	5	100
5	1	0	0	0	0	1	20
6	1	0	1	1	0	3	60
7	1	1	1	1	1	5	100
8	0	1	1	1	0	3	60
9	1	1	1	1	1	5	100
10	1	1	1	1	1	5	100
11	1	1	1	1	1	5	100
12	1	1	1	1	1	5	100
media	0,67	0,75	0,92	0,75	0,58	3,67	

Fig.15 analisi schede individuali

Il nodo concettuale della scheda si riferisce all'equivalenza dei triangoli (vedi Fig.16). Nel riquadro [C] gli allievi (vedi Fig.17) non sono stati in grado di osservare, mediante un semplice calcolo, che l'area dei due triangoli è uguale. Questo errore, fatto anche nella scheda precedente, mi ha fatto riflettere sul fatto che occorre proporre maggiori situazioni in cui, per determinare area e perimetro, non sempre è necessario conoscere la lunghezza di base e altezza, ma bastano dei riferimenti, come in questo caso, rappresentato dai quadretti. Il riquadro [E] è stato visto come triangoli di ugual estensione.

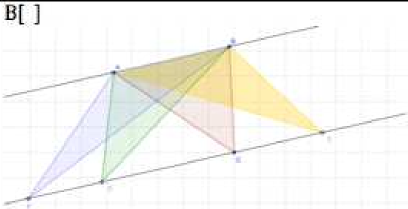
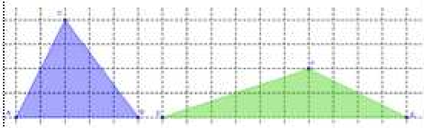
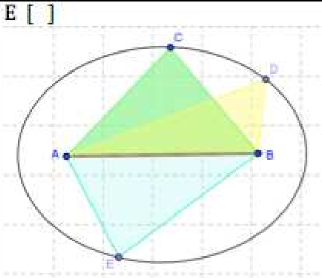
Triangoli equivalenti_SA	TS	Q2
1. Segnare le rappresentazioni che condividono lo stesso significato (due o più); 2. Indicare le ragioni che guidano nella scelta.	A[ ] Due triangoli sono equivalenti se occupano la stessa parte di piano	B[ ] 
Q2	Q3	Q4
C[ ] 	D[ ] Due triangoli sono congruenti se sovrapponendoli essi coincidono	E [ ] 

Fig.16 - scheda studente Triangoli equivalenti

	equivalenza triangoli						
ID studente	TS[A]	Q2[C]	Q2[B]	Q3[D]	Q4[E]	tot	percentuale
1	1	0	0	0	0	1	20
2	1	0	1	1	1	4	80
3	1	0	1	1	0	3	60
4	1	0	1	1	0	3	60
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	1	20
7	1	1	0	1	0	3	60
8	1	1	0	1	1	4	80
9	1	1	1	1	0	4	80
10	1	0	1	1	0	3	60
11	1	0	1	1	1	4	80
12	1	1	1	1	1	5	100
media	0,8	0,3	0,7	0,8	0,3	2,9	

Fig.17 - scheda analisi alunni

Nella fase di gruppo, un alunno che aveva individualmente compilato e argomentato correttamente la scheda non è stato in grado di sostenere le sue motivazioni, per cui il gruppo non è arrivato ad una soluzione condivisa ed ognuno ha mantenuto le proprie convinzioni.

Qui sotto (vedi Fig.18) sono riportate le osservazioni di solo tre gruppi perché due gruppi sono giunti alle medesime considerazioni.

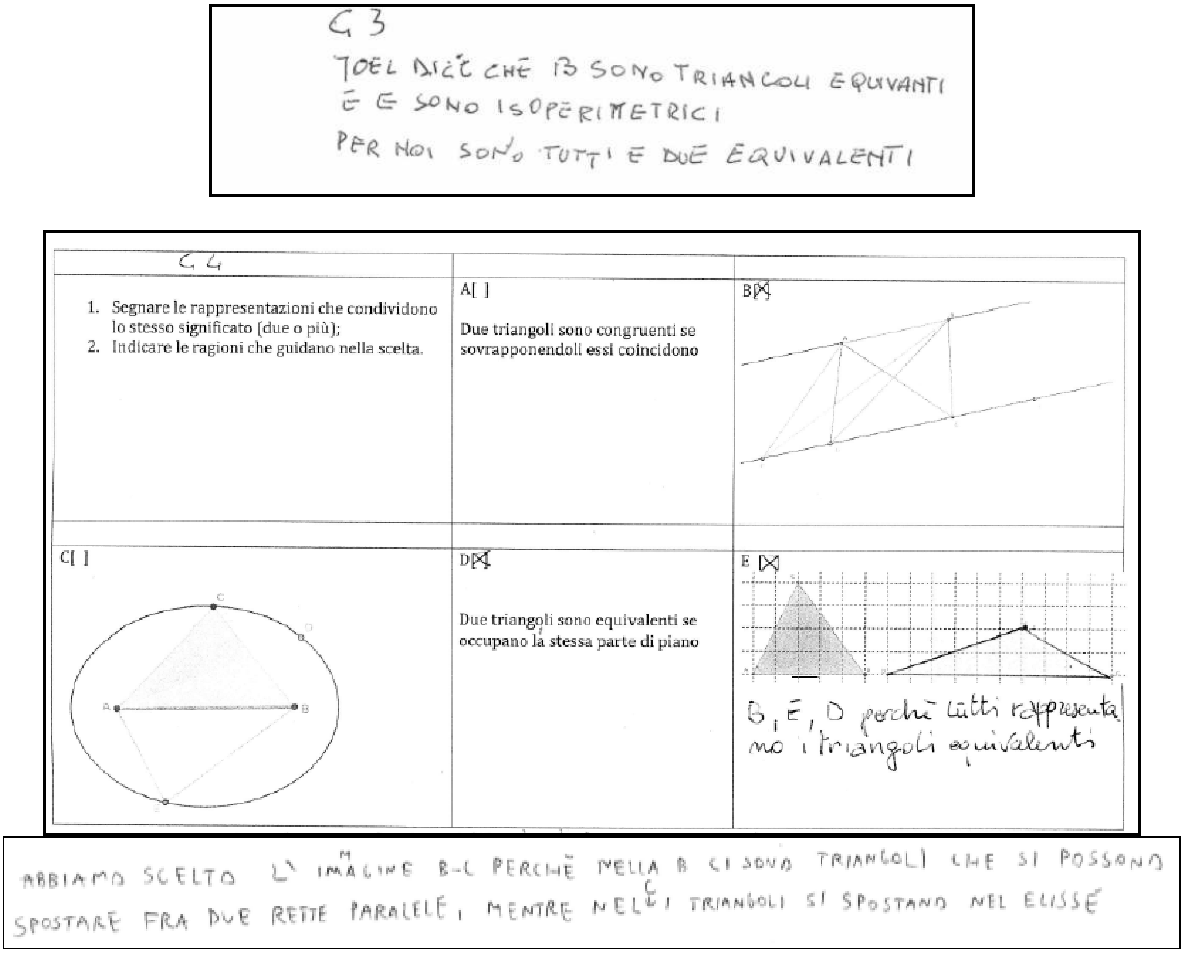


Fig.18 - risposte gruppi

Due gruppi individuano come comunanza di significato la congruenza tra i riquadri [B] e [C]: questo errore è stata una favorevole occasione per rivedere e ripassare i concetti di congruenza ed equivalenza, che per molti è ancora motivo di confusione. Alla LIM ho chiesto ad un alunno di ricostruire con GeoGebra il triangolo tra due rette parallele e di muovere il vertice libero, osservando che cosa restava invariato, per il riquadro [E] ho fatto riutilizzare il modello predisposto per la sperimentazione. Con questi due modelli dinamici i ragazzi sono arrivati alla conclusione che nel primo caso i triangoli rappresentati sono equivalenti mentre nel secondo sono isoperimetrici. Il successivo è stato quello di analizzare la definizione di congruenza e di individuare figure congruenti utilizzando come modelli libri e quaderni.

Sperimentazione nella secondaria di secondo grado

L'attività "Mito di Didone" è stata utilizzata come modulo di accoglienza a inizio anno scolastico in due classi prime di Liceo Scientifico e una classe prima di Istituto Tecnico Industriale, gli alunni coinvolti sono 70. La nostra esperienza didattica ci ha condotto a riflettere su un tipico misconcetto degli allievi che spesso confondono area con perimetro, figure equivalenti con figure isoperimetriche.

Iniziare l'anno scolastico con questa attività ci ha permesso di richiamare alcuni concetti fondamentali e di introdurre un aspetto a volte trascurato: il legame esistente tra geometria e algebra, materie spesso considerate dagli studenti a intersezione vuota.

L'uso dello story-telling, come metodo per veicolare competenze, ha favorito molto il nostro approccio iniziale con loro, allentando le tensioni che di solito caratterizzano l'inizio di un nuovo percorso scolastico, e predisponendo gli studenti ad un lavoro proficuo e attento.

Il tipo di didattica messa in atto ci ha permesso di favorire la conoscenza reciproca e l'integrazione degli studenti spesso provenienti da realtà quanto mai diversificate.

L'itinerario didattico seguito è stato simile, con gli ampliamenti del caso, a quello della secondaria di primo grado, questo il sommario del modulo didattico (vedi Fig.19):

Fig.19 - sommario

Al fine di facilitare il lavoro degli studenti nella registrazione dei risultati di volta in volta ottenuti, abbiamo loro fornito il seguente file *Attività il mito di Didone* in formato elettronico. Quest'ultimo è stato da loro completato con foto, file di GeoGebra e tabelle, mentre tutto il materiale prodotto è stato depositato in un repository (dropbox, moodle, google drive...).

Durante le discussioni sono emerse le competenze e i misconcetti già presenti nei ragazzi e questo ha permesso anche a noi docenti di fare il focus sulle azioni didattiche da intraprendere. Il nostro ruolo è stato quello di tutors e moderatori, volto a condurli verso percorsi concettuali corretti. Nella versione studente i Ts e i Qi non compaiono e gli item sono mescolati.

Produzione dei ragazzi

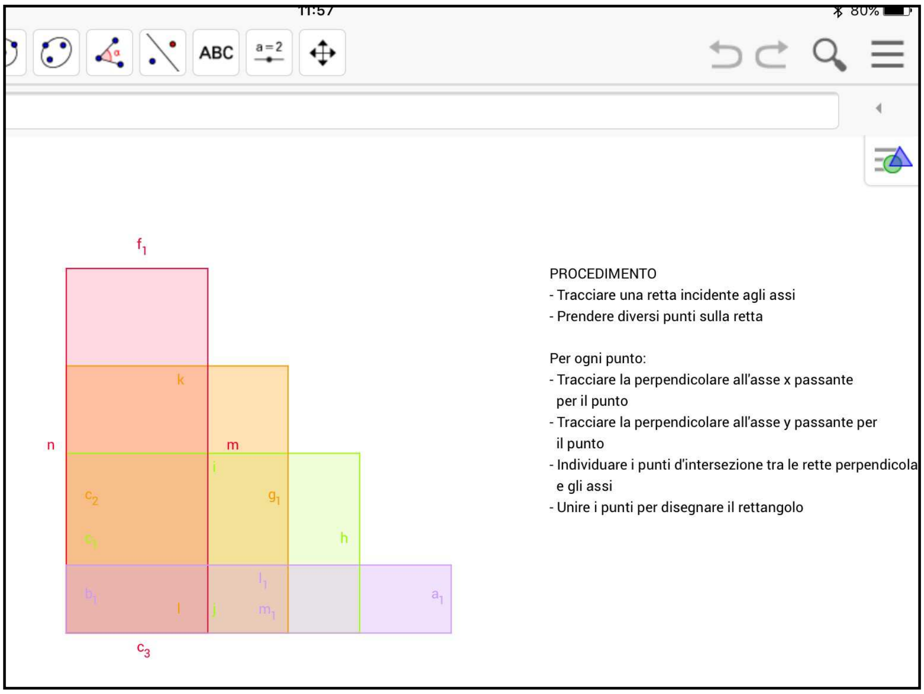
Questa attività ha visto la partecipazione attiva ed entusiasta dei ragazzi, oltre che una produzione vastissima di materiali. Chi non possedeva connessione o PC poteva eseguire il lavoro sul quaderno e poi caricare il materiale utilizzando il cellulare o i PC della scuola.

Domande:

1. *Come avrà fatto Didone a fondare la città di Cartagine?*
2. *Qual è la forma più conveniente da utilizzare come modello per la costruzione di Cartagine, sapendo che si ha a disposizione un perimetro ben definito?*

Risposte degli allievi:

1. *Annalisa: usare la pelle come tenda in modo da sfruttarne l'ombra (in certe ore l'ombra è maggiore della superficie reale) obiezione: in certe altre ore l'ombra occupa una superficie minore di quella reale.*
2. *Davide: cucire più pelli di bue*
   Obiezione: Didone ha a disposizione solo una pelle di bue
3. *Andrea: tagliare la pelle in strisce il più sottili possibile per poter occupare una maggior porzione di terreno.*



Di seguito qualche commento dei ragazzi (vedi Fig.20):

- *……….*
- *scrivete le coordinate di questi vertici, qual è la caratteristica comune?*
  A(11;1) B(10;2) C(9;3) D(8;4) E(7;5) F(6;6)

Abbiamo notato che le coordinate dei vertici non appartenenti agli assi corrispondono alle misure delle dimensioni dei rispettivi quadrilateri. Dunque:

se: $x=b$ $y=h$

allora $2(b+h)= 2(x+y)= 2p$

Fig.20 - commento studenti

Verifica

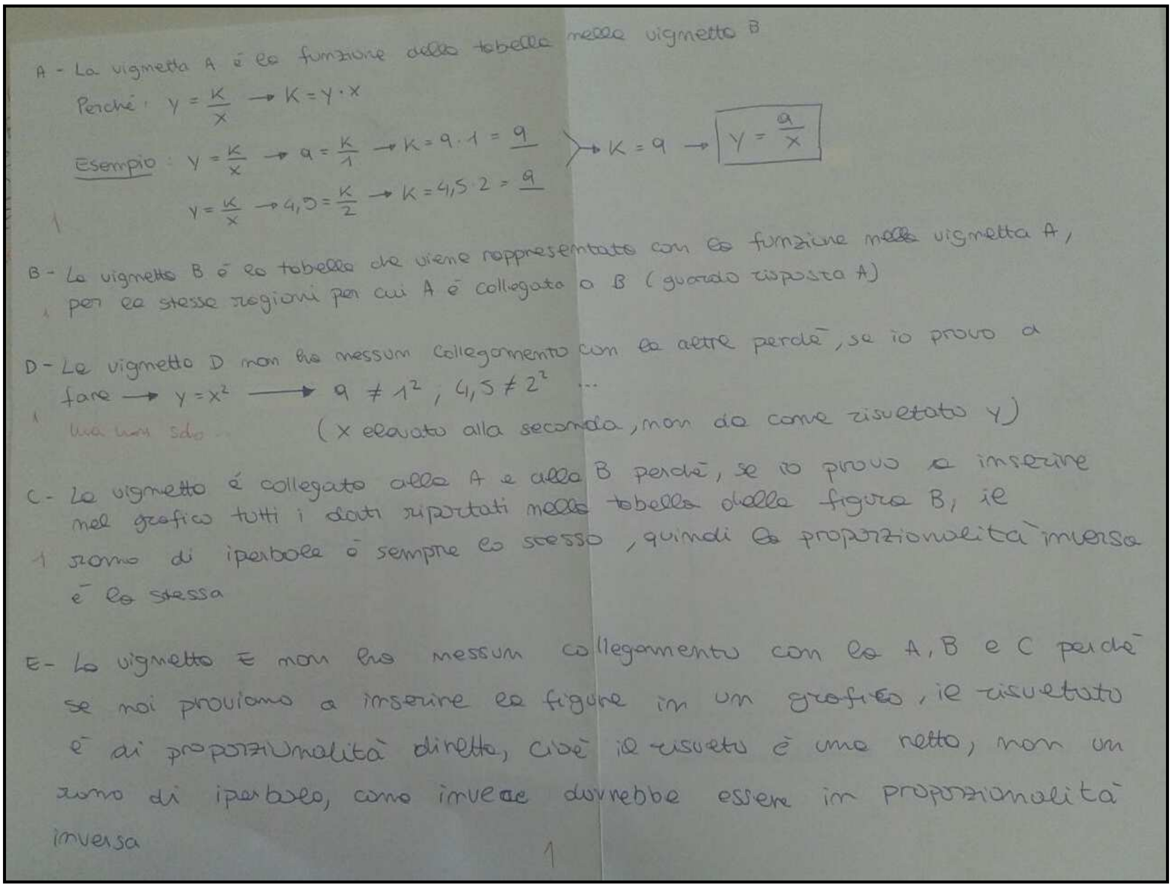
Alla fine dell'attività sono stati proposti i quesiti Merlo precedentemente visti per verificare l'acquisizione dei concetti trattati durante la proposta didattica.

Gli studenti, dopo qualche incertezza dovuta al carattere inconsueto della verifica, hanno risposto in maniera adeguata e attenta.

Ecco alcune loro motivazioni sulla scelta dei riquadri:

HO ~~SCELTO a PERCHÉ~~ IL SIGNIFICATO È Y=K-X, IN CUI K CORRISPONDE A 6.
HO SCELTO a PERCHÉ Y È UGUALE 6-X;
HO SCELTO b PERCHÈ RAPPRESENTA IL SIGNIFICATO;
HO SCELTO c PERCHÈ LE COORDINATE SI TROVANO CON LA FORMULA Y=K-X;
NON HO SCELTO d PERCHÉ NON C'È FORMULA PER TROVARE Y;
HO SCELTO e PERCHÈ LE DIMENSIONI (X=LUNGHEZZA, Y=ALTEZZA) SI TROVANO CON LA FORMULA Y=K-X;

Ho messo insieme A e C perché mettendo i dati (A) sul piano cartesiano viene lo stesso risultato presente in C, ovvero una retta passante per per i vertici di ogni poligono, non ho scelto D perché il risultato che ho ottenuto mettendo i dati sul piano cartesiano è diverso da quello di A e C.
Ho messo anche B ed E perché applicando la formula e sul piano cartesiano di C A ed E ~~il risultato è sempre lo stesso~~, l'
y=k-x operazione riesce.


A - La vignetta A è la funzione della tabella nella vignetta B

Perché: $y = \frac{K}{x} \rightarrow K = y \cdot x$

Esempio: $y = \frac{K}{x} \rightarrow 9 = \frac{K}{1} \rightarrow K = 9 \cdot 1 = 9$; $y = \frac{K}{x} \rightarrow 4,5 = \frac{K}{2} \rightarrow K = 4,5 \cdot 2 = 9$ $\rightarrow K = 9 \rightarrow \boxed{y = \frac{9}{x}}$

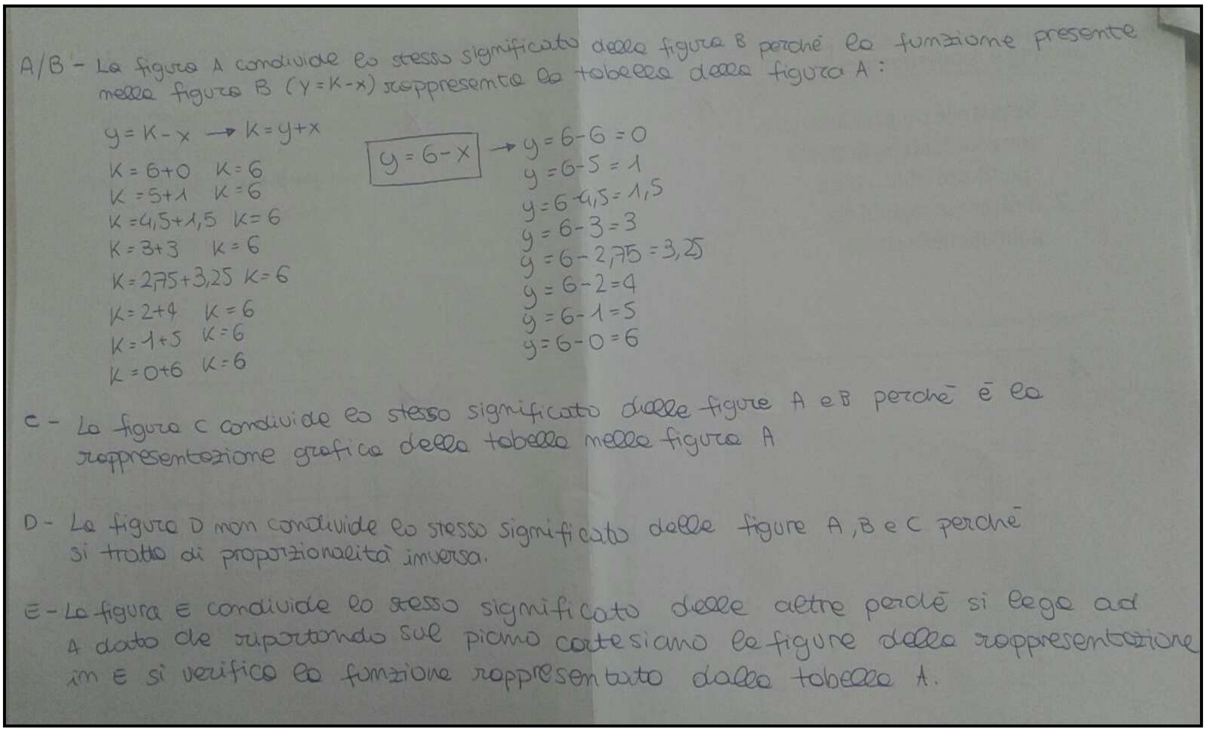
B - La vignetta B è la tabella che viene rappresentata con la funzione nella vignetta A, per le stesse ragioni per cui A è collegata a B (guarda risposta A)

D - La vignetta D non ha nessun collegamento con le altre perché, se io provo a fare $\rightarrow y = x^2 \longrightarrow 9 \neq 1^2 ; 4,5 \neq 2^2 \ldots$

(x elevato alla seconda, non da come risultato y)

C - La vignetta è collegata alla A e alla B perché, se io provo a inserire nel grafico tutti i dati riportati nella tabella della figura B, il ramo di iperbole è sempre lo stesso, quindi la proporzionalità inversa è la stessa

E - La vignetta E non ha nessun collegamento con la A, B e C perché se noi proviamo a inserire le figure in un grafico, il risultato è di proporzionalità diretta, cioè il risultato è una retta, non un ramo di iperbole, come invece dovrebbe essere in proporzionalità inversa


A/B - La figura A condivide lo stesso significato della figura B perché la funzione presente nella figura B ($y = K - x$) rappresenta la tabella della figura A:

$y = K - x \rightarrow K = y + x$

$K = 6+0 \quad K = 6$
$K = 5+1 \quad K = 6$
$K = 4,5+1,5 \quad K = 6$
$K = 3+3 \quad K = 6$
$K = 2,75+3,25 \quad K = 6$
$K = 2+4 \quad K = 6$
$K = 1+5 \quad K = 6$
$K = 0+6 \quad K = 6$

$\boxed{y = 6 - x} \rightarrow y = 6-6 = 0$
$y = 6-5 = 1$
$y = 6-4,5 = 1,5$
$y = 6-3 = 3$
$y = 6-2,75 = 3,25$
$y = 6-2 = 4$
$y = 6-1 = 5$
$y = 6-0 = 6$

C - La figura C condivide lo stesso significato delle figure A e B perché è la rappresentazione grafica della tabella nella figura A

D - La figura D non condivide lo stesso significato delle figure A, B e C perché si tratta di proporzionalità inversa.

E - La figura E condivide lo stesso significato delle altre perché si lega ad A dato che riportando sul piano cartesiano le figure della rappresentazione in E si verifica la funzione rappresentata dalla tabella A.

Fig.21 - risposte alunni

I risultati sono stati molto soddisfacenti, quasi tutti gli studenti, infatti, hanno individuato correttamente gli item in condivisione di significato.

Nella tabella seguente (vedi Fig.22) si osservano le percentuali dei risultati:

	Rettangoli isoperimetrici		Rettangoli equiestesi	
	Percentuale Item correti	Percentuale motivazioni correte	Percentuale Item correti	Percentuale motivazioni correte
Liceo Scientifico Galielo Galilei Alessandria	80	73	98	62
Liceo Scientifico A. Volta Lodi	85	80	90	85
Istituto Teconologico G. Fauser Novara	93	87	96	64

Fig.22 - le percentuali dei risultati

Valutazione con bersaglio

Il gruppo dei docenti ha pensato, sin dalle prime sperimentazioni di somministrazione in classe, ad una possibile modalità valutativa da abbinare a ciascuna scheda, utilizzando una griglia di correzione che tenesse in considerazione la distanza dal TS (vedi Fig.23).

Le difficoltà maggiori riguardano una classificazione univoca nel riconoscere i vari Q2 in base ad una griglia precostituita che non tenga conto dello stile della didattica del docente somministratore.

Una proposta del gruppo è stata:

- item vicino al centro (livello 1): semplice cambiamento di registro;
- item a distanza media dal centro (livello 2): cambiamento del contesto, situazioni problematiche con nodo concettuale non evidente;
- item lontano dal centro (livello 3): necessità di passaggi rielaborativi, sia concettuali che grafici e di calcolo.

Volendo fare un'ipotesi di valutazione seguendo i seguenti criteri, ho suddiviso il punteggio da assegnare in due parti, ognuna delle quali concorresse per il 50% al voto finale, la valutazione risulta quindi somma di un punteggio derivante dalla corretta individuazione degli statements (quelli segnati e non) e di una corretta argomentazione.

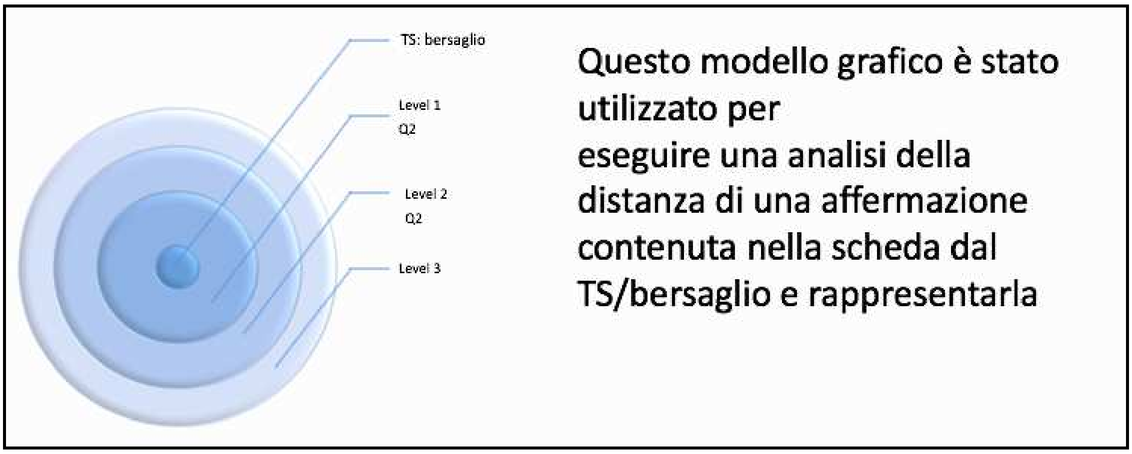


Fig.23 - bersaglio

Nello specifico:

valutazione per corretta individuazione statement

- punti 0,5 per esatta individuazione statement più vicino al TS
- incremento di 0,5 per ogni corretta individuazione di statement a livelli superiori, cioè più distanti
- punti 0,5 per corretta individuazione di statement esterni al confine di significato

valutazione per argomentazione

- punti 1 per ogni corretta ed esauriente argomentazione.

Conclusione

Avendo sperimentato le schede Merlo sia in questa attività che durante tutto l'anno scolastico 2014/2015 con classi sia di primaria che di secondaria (anche tipologie di scuola differenti) possiamo ritenere che punto di forza di questa attività sono sia la ricerca dello stesso significato matematico con rappresentazioni diverse che la discussione che emerge dalle motivazioni di scelte dei ragazzi.

È evidente che l'uso dei quesiti Merlo non si adatta, come anche per i quesiti Invalsi, ad una didattica tradizionale; l'utilizzo di questa metodologia porta ad una didattica laboratoriale che conduca i ragazzi alla scoperta del pensiero matematico.

La discussione che segue in classe in seguito all'utilizzo delle schede Merlo dovrebbe diventare momento centrale e dovrebbe rientrare nell'azione educativa dell'attività Merlo, al fine di educare all'argomentazione e alla creazione di un pensiero con logico-matematico. La capacità di argomentare può essere educata e l'introduzione di Merlo nella pratica didattica attiva proprio questa abilità.

Dichiarazione di conflitti di interesse

Gli autori dichiarano di non avere conflitti di interesse rispetto la paternità o la pubblicazione di questo articolo.

Deposito dei materiali dell'attività

Al seguente link sono depositati eventuali materiali inerenti questo l'articolo. Questi materiali nel tempo potranno essere modificati e arricchiti seguendo l'evoluzione delle idee sottostanti o/e future sperimentazioni svolte dagli autori dell'articolo.

http://www.edimast.it/J/20150102/01630185AB/

Bibliografia

Arzarello, F., Kenett, R. S., Robutti, O., & Shafrir, U. (to be submitted). *The application of concept science to the training of teachers of quantitative literacy and statistical concepts*.

Castelnuovo, E. (2005). *La matematica, Figure piane, Modulo A-B*. La Nuova Italia.

Castelnuovo, E. (2008). *L'Officina matematica, ragionare con i materiali.* Edizioni La meridiana.

Chiari, G. (2011). *Educazione interculturale e apprendimento cooperative: teoria e pratica dell'educazione tra pari*. Quaderno 57 (UniTn).

Duval, R. (2006). *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics*. Educational Studies in Mathematics, 61, 103-131.

Etkind, M., Kenett, R., & Shafrir, U. (2010). *The evidence based management of learning. Diagnosis and development of conceptual thinking with meaning equivalence reusable learning objects*. Invited paper. Proceeding of the 8th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8). Ljubljana – Slovenia.

Etkind, M., & Shafrir, U. (2013). *Teaching and Learning in the Digital Age with Pedagogy for Conceptual Thinking and Peer Cooperation*. In: Proc. 7th International Technology, Education and Development Conference (INTED) (pp. 5342-5352). Valencia, Spain.

Sbaragli S. (2006). *La capacità di riconoscere "analogie": il caso di area e volume*. La matematica e la sua didattica. Anno 20, n. 2, 247-285.

Shafrir, U., & Etkind, M. (2010). Concept Science: Content and Structure of Labeled Patterns in Human Experience. Version 31.0.

Shafrir, U., & Kenett, R. (2010). *Conceptual thinking and metrology concepts*. Accrediation and Quality Assurance – Springer.

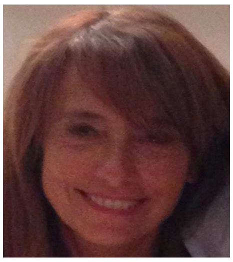
Vygotsky, L. (1934). *Pensiero e linguaggio*. Edizioni Laterza.

Abbati Susanna
IC G. Rodari
Via Aquileia, 1, Baranzate (MI)
E-mail: susy.abbati@gmail.com
Italy

Curriculum essenziale: https://it.linkedin.com/in/susanna-abbati-11169027

Genoni Luigia
I.T.Tecnologico G. Fauser
Via Ricci 14 28100 Novara (NO)
E-mail: genoni@fauser.edu
Italy

Curriculum essenziale: https://it.linkedin.com/in/luigia-genoni-48b255104



Coviello Arianna
LS G. Galilei
Spalto Borgoglio, 49, Alessandria (AL)
E-mail: coviello.arianna@gmail.com
Italy

Curriculum essenziale: https://it.linkedin.com/in/arianna-coviello-57318273

Trinchero Germana
IIS Santore di Santarosa
Corso Peschiera, 230, 10139 Torino (TO)
E-mail: trincherogermana@yahoo.it
Italy

Curriculum essenziale: https://www.linkedin.com/in/germana-trinchero-89754533/en

Cena Alberto
IIS E. Bona
Via Antonio Gramsci, 22, 13900 Biella (BI)
E-mail: alberto.cena@gmail.com
Italy

Curriculum essenziale: https://it.linkedin.com/in/alberto-cena-b34b90b4

Fratti Santina
IIS A. Volta
Viale Papa Giovanni XXIII, 9, Lodi (LO)
E-mail: sfratti.volta@gmail.com
Italy

Curriculum essenziale: https://it.linkedin.com/in/santina-fratti-554255104

Turiano Fiorenza
IIS Arimondi – Eula
Piazzetta Giovanni Baralis, 4/5, Savigliano (CN)
E-mail: fiorenza.turiano@gmail.com
Italy

Curriculum essenziale: https://www.linkedin.com/in/fiorenza-turiano-75a3601a

Received December 19, 2015; *revised* January 05, 2016; *accepted* January 10, 2016; *published online* January 19, 2016